

Клыкова Наталья Викторовна

Учитель математики

МАОУ города Иркутска гимназии № 2

Проще традиционного решения.

Использование геометрических преобразований в школьном курсе геометрии имеет большое методическое значение. Методы симметрии, поворота, параллельного переноса, гомотетии позволяют решать значительный класс задач на доказательство, построение и вычисление.

Действующая программа по геометрии не предполагает использовать идею геометрических преобразований в качестве главной идеи школьного курса геометрии, хотя предусматривает знакомство с отдельными видами движений (осевой симметрией, центральной симметрией, поворотом вокруг точки, параллельным переносом) и подобием. И только в программах факультативных занятий, а также в углубленном и профилированном изучении математики геометрические преобразования занимают значительное место. Мы рассматриваем использование геометрических преобразований лишь в аспекте доказательства.

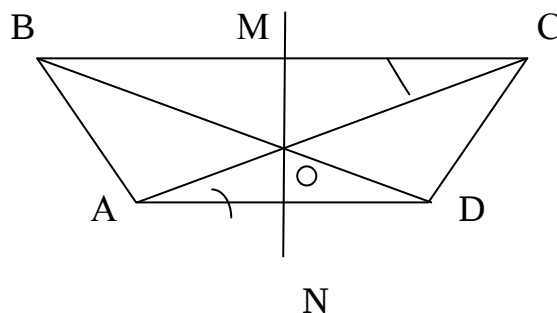
Задача 1. Через центр O параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD параллелограмма соответственно в точках M и N . Докажите, что $BM=DN$.

Решение: Симметрия с центром O переведет точку A в точку C и точку B в точку D ($AO=OC$, $BO=OD$), при этом отрезок BC перейдет в отрезок DA (центральная симметрия переводит отрезок в отрезок). Точке M отрезка BC в этой симметрии будет соответствовать точка отрезка AD , являющаяся пересечением его с прямой MO , т.е. точка N , а потому $BM=DN$.

Задача 2. Докажите, что прямая, содержащая точку O пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ и точку M – середину основания BC , пересекает

второе основание AD трапеции ABCD в точке N, являющейся серединой основания AD.

Решение: Рассмотрим гомотетию с центром O, при которой отрезок BC переходит в отрезок AD. Образом точки M в этой гомотетии является точка пересечения прямой MO и отрезка AD. Так как гомотетия сохраняет отношение расстояний, то этой точкой является середина AD, т.е. точка N.



Рассмотрим традиционное решение этой задачи.

$\triangle DNO \sim \triangle OBM$ ($\angle BOM = \angle NOD$, $\angle OBM = \angle NDO$), следовательно, $BM:ND = OM:ON$.

Аналогично из подобия треугольников MOC и AON имеем: $MC:AN = OM:ON$. Значит, $BM:ND = MC:AN$ или $BM:MC = ND:AN$, но $BM:MC = 1$, следовательно, $ND:AN = 1$, т.е. N – середина отрезка AD.

Я опустила в решении этой задачи обоснование многих фактов, например равенство углов OBM и NDO, BCO и CAD и т.д. И, тем не менее, совершенно очевидно, что решение задачи с использованием геометрических преобразований проще традиционного решения.

Задача 3. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC точка M пересечения медиан, точка N пересечения высот и центр O описанной окружности принадлежат одной прямой и $OM:MN = 1:2$.

Решение: Так как в задаче требуется доказать, что точка М делит отрезок ОН в отношении 1:2, то целесообразно использовать гомотетию с центром в точке М и $k=1/2$.

Рассмотрим общий случай: треугольник АВС разносторонний и, значит, точки О, Н, М различные.

Гомотетия с центром М и коэффициентом $k=1/2$ переводит треугольник АВС в треугольник $A'B'C'$, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника. Соответствующие стороны этих треугольников параллельны. Высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника АВС переходят в высоты $A'A'_1$, $B'B'_1$, $C'C'_1$ треугольника $A'B'C'$, которые являются перпендикулярными к сторонам данного треугольника, проведенными через их середины.

Значит, точка Н пересечения высот треугольника при указанной гомотетии переходит в центр О описанной около треугольника АВС окружности. Отсюда следует, что точка М (центр гомотетии), Н и О (соответственные точки в гомотетии) лежат на одной прямой и $\overrightarrow{MO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MH} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MH} \Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{MH}|$.

Если треугольник АВС правильный, то $O=H=M$ и прямая, о которой идет речь в задаче, не определена.

Преимущества метода геометрических преобразований видно из многих фактов, среди которых важное место занимает овладение действиями, составляющими метод геометрических преобразований.

Анализ решений задач методами симметрии, поворота, параллельного переноса и гомотетии позволил выделить требования, которые предъявляют эти методы мышлению решающего. Учащиеся должны уметь:

- строить фигуры, в которые переходят данные фигуры при симметрии, повороте, параллельном переносе и гомотетии;

- видеть соответственные при указанном преобразовании точки на соответственных при этом же преобразовании фигурах;

- выделять элементы, определяющие преобразование: ось симметрии, центр поворота, определять угол поворота, направление параллельного переноса, его расстояние, находить центр гомотетии, вычислять его коэффициент;

- строить соответственные при указанном преобразовании точки на заданных произвольных фигурах;

- использовать специфические свойства преобразований.

Формирование указанных умений должно быть предметом специального обучения, оно осуществляется в процессе выполнения упражнений.

Возникает вопрос: нельзя ли указать эвристическую схему применения различных видов геометрических преобразований в конкретных ситуациях? Оказывается, что возможны рекомендации относительно примечания частных видов геометрических преобразований.

Доказать некоторое соотношение в равнобедренном треугольнике, равнобедренной трапеции, прямоугольнике, ромбе удастся часто с помощью осевой симметрии. Использование поворота эффективно при установлении зависимостей в равностороннем треугольнике, квадрате, при доказательстве перпендикулярности прямых. Метод параллельного переноса дает желаемый результат при доказательстве различных соотношений в параллелограмме, трапеции, а также при построении этих фигур. Преобразование гомотетии эффективно, если рассматриваются два параллельных отрезка разной длины, отрезок, разделенный в данном отношении, две окружности различной длины радиусов. Разумеется, никакие критерии не сообщаются ученику в готовом виде, а учащиеся овладевают ими в ходе работы. Проиллюстрируем сказанное на упражнениях.

1. Дан квадрат ABCD. Через центр этого квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, отличные от прямых AC и BD. Докажите, что отрезки, образуемые пересечением этих прямых с квадратом, равны.

Известно, что квадрат имеет четыре оси симметрии, а повороты вокруг точки пересечения диагоналей квадрата на 90^0 , 180^0 отображают его на себя. Поэтому для доказательства соотношений в квадрате может быть использован метод симметрии либо метод поворота. Так как в условии задачи используются две взаимно перпендикулярные прямые, содержащие центр квадрата, то в данном случае предпочтительнее метод поворота.

2. Длины отрезков, одним концом которых является точка, а другим – точки прямой, разделены в одном и том же отношении. Докажите, что точки деления принадлежат одной прямой.

Так как в задаче говорится о делении отрезков в одном и том же отношении, то для доказательства указанного соотношения целесообразно использование метода гомотетии.

Реализация этой идеи на уроках геометрии, создает комфорт между учеником и задачей, обуславливающий, радость ученика от взаимодействия с задачей или теоремой.