CS Space

Финал

Задача 1 (Особая функция)**.** Существует ли такая функция $f \in C^2(\mathbb{R})$, что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$309 < \frac{f'(x)}{f(x)} < 444, \qquad 444 < \frac{f''(x)}{f'(x)} < 601?$$

Доказательство. Из $309 < \frac{f'}{f}$ следует, что f не обращается в нуль. Считаем $f > 0$ и введём

$$r(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Тогда $r \in C^1(\mathbb{R})$ и по условию

$$309 < r < 444.$$

Кроме того,

$$\frac{f''}{f'} = \big(\ln f'\big)' = \big(\ln f + \ln r\big)' = r + \frac{r'}{r},$$

поэтому из $444 < \frac{f''}{f'}$ получаем

$$r + \frac{r'}{r} > 444 \Longrightarrow r' > r(444 - r).$$

Положим $s(x) = 444 - r(x)$. Тогда $0 < s < 135$ и

$$s' = -r' < -r(444 - r) = -rs < -309s.$$

Значит, для любого $x < 0$

$$\ln s(0) - \ln s(x) = \int_x^0 \frac{s'(t)}{s(t)} dt < \int_x^0 (-309) dt = 309x,$$

то есть

$$s(x) > s(0)e^{-309x}.$$

При $x \to -\infty$ правая часть стремится к $+\infty$, что противоречит ограниченности $s(x) < 135$. Следовательно, такой функции f не существует. $\square$

Задача 2 (Отскок случайного блуждания)**.** Рассмотрим симметричное случайное блуждание $(S_k)_{k=0}^n$ на целых числах:
- В начальный момент $S_0 = 0$;
- На каждом шаге значение либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1, причём оба варианта происходят с вероятностью $1/2$ и не зависят от остальных шагов.

Обозначим через m наименьшее значение, которого блуждание достигало за первые n шагов:
$$m = \min_{0 \le k \le n} S_k.$$
Обозначим через R разницу между положением процесса в финальной точке и его минимумом:
$$R = S_n - m.$$
Найдите распределение случайной величины R, то есть вычислите $\mathbb{P}(R_n = r)$ для всех $r = 0, 1, \dots, n$.

Доказательство. Заметим, что
$$R = S_n - m = \max_{0 \le k \le n} (S_n - S_k).$$
Введём "перевёрнутую" траекторию
$$\widetilde{S}_j := S_n - S_{n-j}, \qquad j = 0, 1, \dots, n.$$
Тогда $R = \max_{0 \le j \le n} \widetilde{S}_j$. Так как шаги ± 1 независимы и равновероятны, то чтение шагов с конца ничего не меняет: распределение R совпадает с распределением максимума $M = \max_{0 \le j \le n} S_j$.

Пусть $a \ge 1$ — целое. Рассмотрим траектории, для которых $M \ge a$, но $S_n < a$, и пусть τ — первый момент, когда $S_\tau = a$. Оставим траекторию до τ как есть, а все шаги после τ поменяем на противоположные. Тогда
$$S_n' = 2a - S_n,$$
поэтому из $S_n \le a - 1$ следует $S_n' \ge a + 1$. Преобразование обратимо, значит
$$\mathbb{P}(M \ge a,\ S_n < a) = \mathbb{P}(S_n \ge a + 1),$$
и потому
$$\mathbb{P}(M \ge a) = \mathbb{P}(S_n \ge a) + \mathbb{P}(S_n \ge a + 1).$$
Отсюда для $r = 0, 1, \dots, n$
$$\mathbb{P}(R = r) = \mathbb{P}(M = r) = \mathbb{P}(M \ge r) - \mathbb{P}(M \ge r+1) = \mathbb{P}(S_n = r) + \mathbb{P}(S_n = r+1).$$
Наконец,
$$\mathbb{P}(S_n = j) = 2^{-n} \binom{n}{\frac{n+j}{2}} \quad \text{если } n + j \text{ чётно, иначе } 0,$$

и значит

$$\boxed{\mathbb{P}(R=r) = 2^{-n}\binom{n}{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor}, \qquad r = 0, 1, \ldots, n.}$$

□

Задача 3 (Двудольный подграф)**.** Даны связный граф G с n вершинами и $k \in \mathbb{N}$, у рёбер графа есть веса — попарно различные положительные числа. Докажите, что связный двудольный подграф G наибольшего веса, состоящий из n вершин и $n-1+k$ рёбер, содержит хотя бы $n-1-1000k$ рёбер максимального остовного дерева G.

Доказательство. Будем действовать от обратного и возьмем контрпример к задаче. Несколько обобщим задачу: пусть ребра теперь имеют длину 0 или 1, и обобщенный граф будет двудольным, если длина любого пути между любыми разноцветными вершинами будет нечетной. Теперь, если есть ребро, взятое и в остовное дерево, и в двудольный подграф, мы можем его стянуть и пересчитать длины ребер. Сделаем такие операции, пока можно. После этих операций мы получим граф на $t > 1000k$ вершинах, остовное дерево T на нем, а также множество ребер U, $U \cap T =$, $|U| = t + k - 1$, причем граф на ребрах только из U связен, двудолен, и это подграф наибольшего веса с такими свойствами на $U \cup T$. Не умаляя общности, длина всех ребер из U равна 0. Удалим также из U все петли.

Заметим, что тогда длины всех ребер из T равны 1, иначе мы бы могли взять ребро xy длины 0 и заменить на какое-то ребро из U, лежащее на пути xy – одно из них имеет меньший вес.

Если в графе U есть вершина v степени 1, то мы можем заменить ребро из нее из U на ребро из v наибольшего веса, входящее в T.

Пусть теперь множество вершин V можно разбить на 3 множества V_1, V_2, V_3 таким образом, что все V_i связны по ребрам U и при различных i, j между V_i и V_j есть ровно 1 ребро из U.

Поскольку ребра дерева должны связывать все вершины, существует такой индекс a, что для всех $i \neq a$ между вершинами V_i и V_a есть ребро дерева T, причем эти 2 ребра – самые тяжелые из возможных. Не умаляя общности, $a = 1$, Заменим теперь ребра из U между V_1, V_2 и V_1, V_3 на самые тяжелые ребра из T, соединяющие эти множества. Перекрасив теперь все вершины множества V_1, мы получим корректную раскраску в 2 цвета, причем общий вес ребер увеличился.

Таким образом, граф V не может быть разбит на 3 множества вышеописанным образом. Заметим, что если $|V| > 3$ и в V есть 2 смежные вершины степени 2 (u, v), то множество $V \setminus u, v$ связно, а значит множества $\{u\}, \{v\}, V \setminus \{u, v\}$ подходят в качестве разбиения. А значит, таких смежных вершин нет.

Обозначим через m количество вершин степени 2. Тогда по несмежности вершин степени 2 общее количество ребер не менее $2m$, отсюда $2m \leq t +$

$k-1$. С другой стороны, общее количество вершин равно t, откуда общее количество ребер не менее $\frac{3(t-k)}{2}+(t+k)>t+k$, поскольку $t>1000k$, что и приводит нас к противоречию.

□

Задача 4 (Степень многочлена)**.** Детсадовцы Миша и Маша играют в игру. Сначала Миша называет целое неотрицательное число k. Затем Маша называет вещественное число α, являющееся корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами. После этого Миша должен указать многочлен $F(x,y)$ с целыми коэффициентами, степень которого по переменной y не превосходит k, обладающий следующим свойством:

- множество вещественных чисел x, для которых существует вещественное y такое, что $F(x,y)=0$, имеет наибольший элемент, и этот наибольший элемент равен α.

Какое наименьшее значение k гарантирует Мише победу?

Доказательство. Ответ: 4.

Покажем сначала, что степени 4 Мише достаточно.

Пусть α — вещественный корень многочлена $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$. Для определённости считаем $\alpha>0$; случай $\alpha<0$ разбирается аналогично.

Если α является наибольшим вещественным корнем P, то Миша может взять $F(x,y)=P(x)$, и условие выполнено.

Пусть теперь α не является наибольшим вещественным корнем P, и пусть α_1 — ближайший вещественный корень P, больший α. Выберем рациональное число $\frac{p}{q}$ такое, что

$$\alpha<\frac{p}{q}<\alpha_1.$$

Рассмотрим многочлен

$$F(x,y)=P(x)^2+(y^2+qx-p)^2.$$

Если $F(x,y)=0$, то обязательно $P(x)=0$ и $y^2=p-qx$, откуда $x\le\frac{p}{q}$. Следовательно, из всех вещественных корней P допускается только α. При этом для $x=\alpha$ существует вещественное y, удовлетворяющее $F(\alpha,y)=0$. Таким образом, наибольшее возможное значение x равно α, а степень F по y равна 4, что доказывает достаточность $k=4$.

Докажем теперь, что меньшего значения k недостаточно.

Пусть $\alpha>0$ — вещественный корень неприводимого многочлена $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$, причём α не является его наибольшим вещественным корнем. Пусть Миша сумел подобрать многочлен $F(x,y)$ степени не выше k по y, удовлетворяющий условию.

Во-первых, степень F по y не может быть нечётной: при нечётной степени уравнение $F(x,y)=0$ имеет вещественный корень по y при почти любом x, и множество допустимых x не будет ограничено сверху.

Во-вторых, степень по y не может быть равна 0, так как тогда F не зависит от y и наибольшее допустимое x обязано быть наибольшим вещественным корнем некоторого многочлена, что невозможно для выбранного α.

Следовательно, при $k < 4$ остаётся единственная возможность: степень по y равна 2. Тогда

$$F(x, y) = A(x)y^2 + B(x)y + C(x),$$

где $A, B, C \in \mathbb{Z}[x]$. Для фиксированного x вещественный корень по y существует тогда и только тогда, когда

$$B(x)^2 - 4A(x)C(x) \geq 0.$$

Значит, наибольшее допустимое значение x является наибольшим вещественным корнем многочлена $B^2 - 4AC$, что противоречит выбору α.

Это противоречие показывает, что $k \geq 4$.

Итак, минимальное значение, которое должен назвать Миша, равно 4.

$\square$

Задача 5 (Грузовик)**.** Обозначим через $\mathcal{L}(N)$ наименьшее общее кратное всех натуральных чисел от 1 до N. Найдите все функции $\text{🚚}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которых при всех натуральных n, m выполнено:

$$\mathcal{L}(\text{🚚}(n)) + \mathcal{L}(\text{🚚}(m)) \;\vdots\; \mathcal{L}(n) + \mathcal{L}(m).$$

Грузовик. Покажем, что для всех m выполнено

$$\mathcal{L}(\text{🚚}(m)) = \mathcal{L}(m).$$

Сначала предположим, что существуют сколь угодно большие m, для которых

$$\mathcal{L}(\text{🚚}(m)) \leq \mathcal{L}(m).$$

Зафиксируем произвольное a. По условию

$$\mathcal{L}(\text{🚚}(m)) + \mathcal{L}(\text{🚚}(a))$$

делится на

$$\mathcal{L}(m) + \mathcal{L}(a)$$

для сколь угодно больших m. При достаточно больших m это возможно лишь тогда, когда

$$\mathcal{L}(\text{🚚}(m)) + \mathcal{L}(\text{🚚}(a)) = \mathcal{L}(m) + \mathcal{L}(a).$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}(\text{🚚}(m)) - \mathcal{L}(m) = \mathcal{L}(a) - \mathcal{L}(\text{🚚}(a)) = k,$$

где k — фиксированное целое число, не зависящее от m. Но при неограниченном росте m левая часть не может оставаться постоянной, если только $k = 0$. Значит,

$$\mathcal{L}(\text{🚚}(a)) = \mathcal{L}(a).$$

Так как a выбиралось произвольно, получаем

$$\mathcal{L}(\text{🚚}(m)) = \mathcal{L}(m)$$

для всех m.

Остаётся рассмотреть случай, когда существует N такое, что при всех $n > N$

$$\mathcal{L}(\text{🚚}(n)) > \mathcal{L}(n).$$

Рассмотрим такое n. По условию

$$\mathcal{L}(\text{🚚}(\text{🚚}(n))) + \mathcal{L}(\text{🚚}(n))$$

делится на

$$K = \mathcal{L}(\text{🚚}(n)) + \mathcal{L}(n).$$

Аналогично,

$$\mathcal{L}(\text{🚚}^{(k+1)}(n)) + \mathcal{L}(\text{🚚}^{(k)}(n))$$

делится на K для любого $k \geq 1$, где $\text{🚚}^{(k)}$ — k-я итерация функции 🚚.

По индукции получаем, что $\mathcal{L}(\text{🚚}^{(k)}(n))$ не делится на K ни при каком k. С другой стороны, значения $\text{🚚}^{(k)}(n)$ строго возрастают, а значит $\mathcal{L}(\text{🚚}^{(k)}(n))$ рано или поздно станет кратным K, что даёт противоречие.

Следовательно, этот случай невозможен, и для всех m выполняется

$$\mathcal{L}(\text{🚚}(m)) = \mathcal{L}(m).$$

Таким образом, все подходящие функции 🚚 — это в точности функции, сохраняющие значение $\mathcal{L}$, то есть такие, что между m и $\text{🚚}(m)$ не появляется новых простых степеней.

$\square$

Задача 6 (Чёрно-белые числа)**.** Число 4 покрашено в белый цвет, а все остальные целые числа покрашены в чёрный.
Если x белое, то разрешается перекрасить в белый числа

$$5x - 10 \ \text{ и } \ 27x^2 + 7x + 47.$$

Найдите наименьшее возможное расстояние между двумя различными белыми числами после серии перекрашиваний.

Доказательство. Будем работать по модулю 71.

Если x белое, то перекрашиваются

$$y_1 = 5x - 10, \qquad y_2 = 27x^2 + 7x + 47.$$

Значит, остатки y_1, y_2 по модулю 71 зависят только от остатка $r \equiv x \pmod{71}$:

$$y_1 \equiv 5r - 10 \pmod{71}, \qquad y_2 \equiv 27r^2 + 7r + 47 \pmod{71}.$$

Пусть S — множество остатков по модулю 71, которые могут иметь белые числа. Начинаем с $4 \in S$.

Шаг 1: считаем образы по модулю 71.

Из $r = 4$:

$$5 \cdot 4 - 10 = 10, \qquad 27 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 + 47 = 27 \cdot 16 + 28 + 47 = 507 \equiv 10 \pmod{71}.$$

Значит, $10 \in S$.

Из $r = 10$:

$$5 \cdot 10 - 10 = 40,$$

$$27 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 47 = 2700 + 70 + 47 = 2817 \equiv 48 \pmod{71}.$$

Значит, $40, 48 \in S$.

Из $r = 40$:

$$5 \cdot 40 - 10 = 190 \equiv 48 \pmod{71},$$

$$27 \cdot 40^2 + 7 \cdot 40 + 47 = 27 \cdot 1600 + 280 + 47 = 43527 \equiv 4 \pmod{71}.$$

Из $r = 48$:

$$5 \cdot 48 - 10 = 230 \equiv 17 \pmod{71},$$

$$27 \cdot 48^2 + 7 \cdot 48 + 47 = 27 \cdot 2304 + 336 + 47 = 62591 \equiv 40 \pmod{71}.$$

Значит, $17 \in S$.

Из $r = 17$:

$$5 \cdot 17 - 10 = 75 \equiv 4 \pmod{71},$$

$$27 \cdot 17^2 + 7 \cdot 17 + 47 = 27 \cdot 289 + 119 + 47 = 7969 \equiv 17 \pmod{71}.$$

Итак, множество

$$S_0 = \{4, 10, 17, 40, 48\}$$

содержит 4 и замкнуто относительно переходов $r \mapsto 5r - 10$ и $r \mapsto 27r^2 + 7r + 47$ по модулю 71. Следовательно, по индукции после любой серии перекрашиваний любое белое число имеет остаток из S_0 по модулю 71.

Шаг 2: нижняя оценка на расстояние.

Возьмём два различных белых целых числа $a \neq b$ и положим $d = |a - b|$. Если $a \equiv b \pmod{71}$, то $71 \mid d$, значит $d \geq 71$.

Если же $a \not\equiv b \pmod{71}$, то их остатки по модулю 71 — два разных элемента из S_0. Отсортируем:

$$4 < 10 < 17 < 40 < 48.$$

Тогда круговые промежутки равны

$$10-4=6,\quad 17-10=7,\quad 40-17=23,\quad 48-40=8,\quad 71+4-48=27,$$

и минимальный равен 6. Значит, для любых разных остатков из S_0 их расстояние по кругу не меньше 6, а значит и для любых белых $a \neq b$ невозможно $|a-b| \in \{1,2,3,4,5\}$. Следовательно,

$$|a-b| \geq 6.$$

Шаг 3: достижимость.

Из исходного белого 4 по правилу $5x-10$ получаем белое

$$5 \cdot 4 - 10 = 10,$$

и

$$|10-4| = 6.$$

Итак, наименьшее возможное расстояние между двумя различными белыми числами равно 6. □

Задача 7 (Фирма)**.** В фирму по ремонту пришли несколько заказов за день. Один заказ представляет из себя отрезок времени, в который работник будет его выполнять. Каждый работник может выполнить множество заказов, если они не пересекаются по времени. Обозначим через M наименьшее возможное количество работников, которые могут выполнить все заказы.
Положим теперь, что заказы приходят последовательно в заранее выбранном порядке, но фирма не знает этот порядокч. На каждом новом заказе фирма обязана назначать сотрудника и после выбора уже не может его заменить.

(a) Рассмотрим стратегию «назначать заказ самому младшему работнику». Докажите, что она потребует не более CM^2 работников для некоторой большой константы C.

(b) Правда ли, что стратегия пункта (a) требует не более $CM \log M$ работников для некоторой большой константы C?

(c) Предложите стратегию выделения работников, которая гарантированно потребует не более CM работников для некоторой большой константы C.

Замечание. Каждый пункт этой задачи оценивается в один балл.

Доказательство. а)Положим противное и рассмотрим I – некую работу 1–го работника. Заметим, что для какого-то $i \in [2, 2M+2]$ существует работа i–го работника, чей отрезок лежит строго внутри I – иначе один из концов I покрыт хотя бы $M+1$ – им отрезком работы, и в этом случае их невозможно выполнить M рабочим. Перейдем к этому i и продолжим процесс, получим последовательность из $> M$ вложенных отрезков, что снова ведет нас к противоречию.

b)Да, верно. Докажем индукцией по m следующее утверждение: Пусть рабочих произвольное количество. Тогда каких бы $20m \log_2 m$ мы рабочих не взяли, то для любого отрезка прямой I, чьи концы не принадлежат отрезкам данных работников, существует отрезок работы одного из них I', каждая точка которого принадлежит хотя бы m разным отрезкам работ из этого множества.

Докажем это для m – степени двойки. Для произвольного m следует с точностью до константы.

База: $m = 1$ – верно.

Переход: Пусть $M = 2k$. Рассмотрим первых $20k \log k$ рабочих из взятых. По индукции существует отрезок работы I, каждая точка которого покрыта хотя бы k работами из них. Заметим, что существует не более $12k$ работ, покрывающий один из концов I – иначе среди них будет работа, каждая точка которой покрыта хотя бы $2k + 1$–ой из них. Но тогда, поскольку $40k \log k + 12k < m \log m$, применим индукцию для всех оставшихся хотя $20m \log m - 20k \log k - 12k$ рабочих, не покрывающий концы отрезка I, и отрезка I. По индукции существует отрезок I', покрытый хотя бы k отрезками из них. Тогда итого он покрыт хотя бы $m = 2k$ отрезками, что и требовалось.

c)Алгоритм, описанный выше, достигает такой оценки, но доказательство этого факта непростое. Опишем более просто доказываемый алгоритм.

Будем раздавать работникам метки – натуральные числа. В качестве метки i–го отрезка возьмем такое минимально возможное t, что, если взять его и все отрезки с метками от 1 до t, никакая точка прямой не будет покрыта более чем t отрезками из них.

Определяя метки по таким правилам, получается, что никакая точка прямой не покрывается 3 отрезками с одинаковой меткой.

Теперь зарезервируем для каждой метки 10 своих работников и будем раздавать им работы по описанному в предыдущих пунктах жадному алгоритму. $\square$

Задача 8 (Строка Дракона). Однажды к Принцессе в башню прилетел коварный Дракон и принёс строку из `0` и `1` длины n. После этого к Принцессе на чай зашёл Принц и они сыграли в следующую игру:

- Принц с Принцессой — союзники и играют против Дракона.
- Дракон сообщает строку Принцессе, Принц не получает никакой информации.
- Происходит n раундов по правилам: на i-ом раунде Принц с Принцессой взакрытую пишут по одному биту (`0` или `1`), после чего показывают их, и Дракон также говорит i-ый бит своей строки. Если все три бита равны между собой, Дракон выдаёт игрокам одну конфету.

Принц и Принцесса могут обсудить стратегию игры заранее, но строка Дракона заранее им неизвестна.

Обозначим через $C(n)$ наибольшее число конфет, которое игроки могут гарантированно заработать вне зависимости от строки Дракона. Найдите

$$\sup_{n\to\infty} \frac{C(n)}{n}.$$

Замечание. Данная задача оценивается отличным от остальных способом:

- оптимальное решение даст вам полный балл;
- неоптимальное решение может принести ненулевое количество баллов, которое вы узнаете только после рассказа — поэтому можно сдавать и неоптимальные решения;
- число попыток, как обычно, ограничено тремя.

Доказательство. Ответ: $0.810...$, а именно, корень уравнения $\ln 2 = (1-\alpha)\ln 3 - \alpha\ln\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$.

Оценка: Рассмотрим 2 множества позиций A_1, A_2, на которых ошибаются принц и Принцесса. Заметим, что эти два множества однозначно задают строку – действительно, если эти множества совпадают, то и весь процесс идет одинаково.

Обозначив $X = A_1 \cap A_2$. При фиксированном X существует $3^{n-|X|}$ способов выбрать множества A_1, A_2. Тогда $2^n \le \sum_{S(n)\le i\le n} C_n^i 3^{n-i}$. Оценив правую часть наибольшим слагаемым, обозначив $\alpha = \sup \frac{S(n)}{n}$, взяв логарифмы и перейдя к пределу, получим, что $\ln 2 \le (1-\alpha)\ln 3 - \alpha\ln\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$, отсюда α не больше этого корня.

Пример: Обозначим α за корень и выберем $a < \alpha$, Возьмем $b = a + \frac{a}{3}$ и возьмем t такое, что tb целое. Тогда из вероятностных соображений существует множество M битовых строк длины t размера $\le \frac{poly(t)2^t}{C_t^{bt}}$ такое, что для любой строки существует строка из M на расстоянии bt от нее.

Наш алгоритм будет устроен следующим образом – разрежем строку длины N на много словок длины t. Стратегия Принцессы следующая: в текущем блоке она передает, к какой строке множества M близка строка в следующем блоке.Принц же просто называет строку множества M. Каким образом Принцесса передает? Она видит следующий кусок и знает, где именно ошибется на нем второй, причем таких ошибок не более bt. Тогда Принцесса выбирает некоторое множество позиций, на которых ошибется сам, причем такое, что объединение этих множеств имеет размер не более чем tt. Количество таких строк не менее $2^{t-bt}C_{bt}^{at}$. Можно проверить теперь, что при больших t $\frac{poly(t)2^t}{C_t^{bt}} < 2^{t-bt}C_{bt}^{at}$ – действительно, заметим, что в блоке длины t у нас могу реализоваться все пары множеств ошибок, одно из которых имеет размер bt, а пересечение – размер at. Но количество пар таких множеств отличается от количества пар множеств с пересечением не менее at в $poly(t)$ раз, откуда и видно, что при большом t неравенство верно. Таким образом, искомый супремум равен этому α.

Комментарий: Можно показать, что работает следующая стратегия: Принцесса выбирает случайный набор битовых чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, известных обоим. Числа в наборе имеют длину n и выбраны независимо. У них также есть общее число y длины n, изначально равное 0. Теперь Принц называет на i-том ходу i-тый бит числа y только единицы, а Принцесса некоторым образом называет 0 или 1, и если она называет 1, то y меняется на y_i^x. Оказывается, с вероятностью, стремящейся к 1, Принцесса для каждой начальной строки может выбирать нули и единицы таким образом, что д они заработают хотя бы $(\alpha - \epsilon)n$ конфет для любого $\epsilon > 0$ и достаточно больших n

$\square$