Отборочный этап

Задача 1 (Муравей на додекаэдре)**.** Рассмотрим правильный додекаэдр, у которого длина каждого ребра равна 1. Пусть A и B — центры двух диаметрально противоположных граней додекаэдра (то есть такие центры, которые соединяются отрезком, проходящим через центр многогранника).
Муравей находится в точке A и может перемещаться только по поверхности додекаэдра, оставаясь на его гранях. Найдите длину кратчайшего пути муравья от точки A до точки B по поверхности многогранника.

Доказательство. Кратчайший путь по поверхности при фиксированной последовательности граней после развёртки этих граней в плоскость становится отрезком. Между центрами противоположных граней кратчайшая геодезическая проходит через ровно 4 грани (в графе смежности граней это расстояние 3), причём есть два кандидата; по развёртке видно, что путь через вершину длиннее, поэтому берём путь, пересекающий общие рёбра в их серединах.

Развернём в плоскость цепочку из 4 правильных пятиугольников F_0, F_1, F_2, F_3, где A — центр F_0, а B — центр F_3 (после развёртки). Обозначим центры через C_0, C_1, C_2, C_3.

В правильном пятиугольнике со стороной 1 радиус вписанной окружности равен $a = \frac{1}{2\tan(\pi/5)}$, поэтому расстояние между центрами двух соседних граней на развёртке равно

$$|C_{k+1} - C_k| = 2a = \cot\frac{\pi}{5}.$$

Для выбранной цепочки (это видно на развёртке) направления векторов C_0C_1 и C_2C_3 совпадают, а вектор C_1C_2 повернут относительно них на угол $\frac{\pi}{5}$. Положим $L = \cot\frac{\pi}{5}$ и отождествим плоскость с $\mathbb{C}$. Тогда

$$C_3 - C_0 = L(1 + e^{i\pi/5} + 1) = L(2 + e^{i\pi/5}),$$

и потому

$$|C_3 - C_0| = L|2 + e^{i\pi/5}|.$$

Далее

$$|2 + e^{i\pi/5}|^2 = (2 + \cos\frac{\pi}{5})^2 + \sin^2\frac{\pi}{5} = 5 + 4\cos\frac{\pi}{5}.$$

Так как $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, получаем

$$|2 + e^{i\pi/5}|^2 = 6 + \sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$d^2 = \cot^2\frac{\pi}{5}\,(6 + \sqrt{5}).$$

Учитывая $\cot^2\frac{\pi}{5}=\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$, получаем

$$d^2=\frac{40+17\sqrt{5}}{5},\qquad d=\sqrt{\frac{40+17\sqrt{5}}{5}}\approx 3.9500166.$$

$\square$

Задача 2 (Равновесия Нэша)**.** Рассмотрим аукцион с запечатанными ставками. В аукционе участвуют 10 игроков. Ценность лота определяется следующим образом: за ширмой независимо подбрасывают 30 честных монет, и за каждый выпавший орёл к стоимости лота прибавляется 1 рубль. Каждый игрок выбирает неотрицательную целую ставку. Лот достаётся одному из игроков, сделавших максимальную ставку; если максимальную ставку сделали несколько игроков, победитель выбирается равновероятно среди них. Победитель платит свою ставку, остальные не платят ничего. Требуется определить число чистых равновесий Нэша.

Доказательство. Обозначим случайную ценность лота через V. Тогда $V\sim\text{Bin}(30,\frac{1}{2})$ и $\mathbb{E}V=15$.

Пусть в профиле максимальная ставка равна b, и её делают ровно $k\geq 1$ игроков. Тогда ожидаемый выигрыш каждого из них равен

$$u_{\text{max}}=\frac{1}{k}(15-b),$$

а любой игрок с меньшей ставкой имеет выигрыш 0.

1. Ограничение на b. Если $b\geq 16$, то $u_{\text{max}}<0$, и игрок с максимальной ставкой выгодно отклоняется к 0, поэтому в равновесии $b\leq 15$. Если $b\leq 13$, то игрок с меньшей ставкой может поставить $b+1$ и получить $15-(b+1)>0$, значит в равновесии $b\geq 14$. Итак, $b\in\{14,15\}$.

2. Случай $b=14$. Если $k<10$, то игрок с меньшей ставкой, поставив 14, получает $\frac{1}{k+1}(15-14)=\frac{1}{k+1}>0$, значит равновесие невозможно. Следовательно, единственное равновесие при $b=14$ — это $(14,\dots,14)$.

3. Случай $b=15$. Если $k=1$, то единственный игрок со ставкой 15 имеет выигрыш 0 и выгодно отклоняется к 14, получая положительный выигрыш (либо 1, либо $\frac{1}{t+1}$ при ничьей на 14). Если же $k\geq 2$, то любой игрок со ставкой 15 не может улучшить 0 отклонением (ставка ≤ 14 даёт 0, ставка ≥ 16 даёт отрицательный выигрыш), и любой игрок со ставкой <15 также не может получить >0. Значит равновесия при $b=15$ — ровно профили, где ставок 15 как минимум две.

4. Подсчёт. Число профилей из $\{0,1,\dots,15\}^{10}$, где хотя бы две ставки равны 15, равно

$$16^{10}-15^{10}-\binom{10}{1}15^9.$$

Добавляя профиль $(14, \ldots, 14)$, получаем

$$16^{10} - 15^{10} - 10 \cdot 15^9 + 1 = 138427643402.$$

$\square$

Задача 3 (Кокасательная)**.** Дан приведённый кубический многочлен

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r, \qquad p, q, r \in \mathbb{R}.$$

В точке $x = t$ касательная к графику $y = f(x)$ — это прямая, касающаяся графика в точке $(t, f(t))$. Кокасательная (нормаль) в точке $x = s$ — это прямая, проходящая через $(s, f(s))$ и перпендикулярная касательной в этой точке.
Назовём *интересной* прямую, которая одновременно:

- является касательной к графику в некоторой точке $(t, f(t))$,
- является кокасательной (нормалями) к графику в некоторой (возможно другой) точке $(s, f(s))$.

Известно, что для конкретного многочлена существуют ровно 2 интересные прямые,
Найдите все возможные длины отрезков, высекаемых интересной прямой (расстояния между точками касания и кокасания):

$$d = \sqrt{(t-s)^2 + \big(f(t) - f(s)\big)^2}.$$

Доказательство. Сдвиг по оси x на $p/3$ убирает квадратный член, а сдвиг по оси y убирает свободный член и не меняет ни углов наклона касательных/-нормалей, ни расстояние между точками на графике. Поэтому можно считать

$$f(x) = x^3 + ax$$

(ниже $a \in \mathbb{R}$).

Пусть одна и та же прямая является касательной в $x = t$ и нормалью в $x = s$. Обозначим ее угловой коэффициент через m. Тогда $m = f'(t) = 3t^2 + a$ и одновременно $m = -1/f'(s)$, то есть $(3t^2 + a)(3s^2 + a) = -1$. Условие прохождения через обе точки дает $f(s) - f(t) = m(s - t)$. Но $f(s) - f(t) = (s-t)(s^2+st+t^2+a)$, значит при $s \neq t$ получаем $s^2+st+t^2+a = m = 3t^2+a$, откуда $s^2 + st - 2t^2 = (s-t)(s+2t) = 0$ и потому

$$s = -2t.$$

Подставляя в $(3t^2 + a)(3s^2 + a) = -1$ и обозначая $u = t^2 \geq 0$, получаем $(3u + a)(12u + a) = -1$, то есть

$$36u^2 + 15au + (a^2 + 1) = 0.$$

Поскольку интересных прямых ровно две, решений по t ровно два, значит уравнение по u имеет ровно один корень $u > 0$, то есть дискриминант равен нулю: $81a^2 - 144 = 0$, откуда $a = \pm 4/3$. Положительный корень $u = -5a/24$ существует только при $a = -4/3$, и тогда

$$u = \frac{5}{18}, \qquad m = 3u + a = \frac{5}{6} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Теперь $s = -2t$, поэтому $t-s = 3t$ и $f(t)-f(s) = f(t)-f(-2t) = 3t(3t^2+a) = 3tm$. Следовательно

$$d^2 = (t-s)^2+(f(t)-f(s))^2 = 9t^2(1+m^2) = 9u\left(1+m^2\right) = 9\cdot\frac{5}{18}\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{8}.$$

Значит возможная длина единственна:

$$d = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

□

Задача 4 (10 чисел)**.** Найти десять положительных целых чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_{10},$$

таких, что для любых $i \neq j$ выполняется

$$|x_i - x_j| \geq 100,$$

и при этом имеет место равенство

$$\frac{\left(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}\right)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2} = 3.$$

Доказательство. Домножение всех чисел на 100 не меняет значение дроби, поэтому достаточно найти целые $y_1, \dots, y_{10}$ такие, что $|y_i - y_j| \geq 1$ и $(y_1 + \dots + y_{10})^2 = 3(y_1^2 + \dots + y_{10}^2)$, а затем положить $x_i = 100y_i$.

Рассмотрим уравнение как квадратное по одной переменной. Зафиксируем 9 чисел, пусть их сумма равна A, а десятая переменная равна y. Тогда условие имеет вид $(A+y)^2 = 3(B+y^2)$, откуда получается квадратное уравнение по y; по Виету сумма его корней равна A. Значит, если набор $(\dots, y)$ является решением, то после замены $y \mapsto A - y$ (прыжок Виета) снова получаем решение.

Стартуем с решения

$$(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

так как $S = 3$, $Q = 3$ и $S^2 = 3Q$.

Теперь последовательно применяем прыжок Виета к нулевой координате $y = 0$. Тогда A равна сумме остальных девяти, то есть текущей сумме S, и новая координата становится $A - 0 = S$. При каждом таком шаге сумма удваивается, поэтому получаем

$$(1, 1, 1, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192).$$

Остались повторяющиеся единицы. Применим прыжок Виета к каждой из трех единиц по очереди. Если текущая сумма равна S и выбранная координата равна 1, то $A = S - 1$ и новая координата равна $A - 1 = S - 2$. Три таких шага дают

$$(382, 763, 1525, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192).$$

Все числа положительны и попарно различны, значит $|y_i - y_j| \geq 1$, и равенство сохранялось на каждом шаге.

Возвращаясь к исходной задаче, положим $x_i = 100y_i$. $\square$

Задача 5 (Дом, который построил Тимофей)**.** Рассмотрим «треугольный дом, который построил Тимофей».

- Берём правильную треугольную призму с ребром основания 1 и высотой 1 (то есть боковые грани — квадраты 1×1).
- К верхнему основанию призмы приклеиваем правильную треугольную пирамиду (правильный тетраэдр без основания), так что её основание совпадает с верхним треугольником призмы.
- Получается выпуклое тело с 7 гранями: 4 равносторонними треугольниками и 3 квадратами.

Развёрткой этого тела называется плоская фигура, получающаяся разрезанием поверхности по некоторым рёбрам и раскладыванием всех граней на плоскости без наложений (грани могут соприкасаться только по общим сторонам или вершинам).
Две развёртки считаются одинаковыми, если одну можно совместить с другой движением плоскости (разрешены повороты, параллельные переносы и отражения).
Максим хочет найти количество различных развёрток «треугольного дома Тимофея», но ему кажется это очень сложной задачей. Помогите ему это сделать.

Доказательство. Обозначим грани: T — нижний треугольник, S_1, S_2, S_3 — три квадрата призмы по кругу, R_1, R_2, R_3 — три боковые треугольные грани «крыши» по кругу, где S_i граничит с R_i.

Рассмотрим двойственный граф G (вершины — грани, ребро — общая сторона). Тогда: T соединён с каждым S_i, S_1, S_2, S_3 образуют треугольник, R_1, R_2, R_3 образуют треугольник, и есть рёбра S_iR_i для $i = 1, 2, 3$. Всего у G 7 вершин и 12 рёбер.

Развёртке соответствует выбор разрезаемых рёбер поверхности; в двойственном графе это эквивалентно выбору поддерева, содержащего все 7 вершин, то есть остовного дерева G. Для данного тела все такие развёртки не самопересекаются, поэтому число развёрток равно числу остовных деревьев G с учётом симметрий тела.

1) Число остовных деревьев G. По теореме Кирхгофа это определитель приведённой матрицы Лапласа. Удалим вершину T. Тогда остаётся матрица размера 6×6 в блок-форме

$$L = \begin{pmatrix} 5I - J & -I \\ -I & 4I - J \end{pmatrix},$$

где I — единичная 3×3, J — матрица из единиц, верхний блок соответствует S_1, S_2, S_3, нижний — R_1, R_2, R_3. Разложим $\mathbb{R}^3 = \langle (1,1,1) \rangle \oplus (1,1,1)^\perp$. На $(1,1,1)^\perp$ матрица J действует как 0, поэтому на каждом из двух базисных направлений получаем

$$\det \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 19,$$

то есть вклад 19^2. На $\langle (1,1,1) \rangle$ матрица J действует как умножение на 3, поэтому получаем

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Значит

$$\tau(G) = \det L = 19^2 = 361.$$

2) Учёт симметрий. Группа симметрий тела, сохраняющих типы граней, изоморфна D_3 (повороты и отражения, переставляющие индексы $1, 2, 3$), её порядок равен 6. Две развёртки считаются одинаковыми тогда и только тогда, когда соответствующие остовные деревья переходят друг в друга автоморфизмом D_3. По лемме Бёрнсайда число различных развёрток равно

$$N = \frac{1}{6} \sum_{g \in D_3} \mathrm{Fix}(g),$$

где $\mathrm{Fix}(g)$ — число остовных деревьев, неподвижных при g.

Очевидно $\mathrm{Fix}(\mathrm{id}) = 361$.

Для поворота на 120° (и на 240°) неподвижное дерево обязано содержать либо все три ребра TS_i, либо ни одного; так как вершина T должна быть связана с остальными, эти три ребра входят все. Аналогично, чтобы подключить R_1, R_2, R_3, должны войти все три ребра S_iR_i. Любое ребро внутри треугольника $S_1S_2S_3$ или $R_1R_2R_3$ тогда создаёт цикл, поэтому такое дерево единственно:

$$\mathrm{Fix}(\text{поворот}) = 1,$$

и таких поворотов два.

Для отражения (их три) фиксируются T, S_1, R_1, а пары (S_2, S_3) и (R_2, R_3) переставляются. Неподвижное дерево должно содержать рёбра попарно симметрично (или фиксированные). Краткая проверка случаев на связность и отсутствие циклов даёт ровно 5 вариантов, то есть

$$\text{Fix}(\text{отражение}) = 5,$$

и таких отражений три.

Итак,

$$N = \frac{361 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5}{6} = \frac{378}{6} = 63.$$

Следовательно, число различных развёрток равно 63. □

Задача 6 (Мартышка и клавиатура)**.** Мартышка бесконечно печатает независимую последовательность букв, каждый раз выбирая одну из латинских букв $\{A, B, \dots, Z\}$ равновероятно.
Пусть

$$W = \text{CSSPACECSSPACECSSPACECSSPACECS}.$$

Обозначим через τ математическое ожидание числа напечатанных букв до первого появления слова W как непрерывного фрагмента напечатанной строки.

Доказательство. Пусть печатается независимая равновероятная последовательность букв из алфавита размера q. Зафиксируем слово W длины m и обозначим через τ математическое ожидание времени до первого появления W.

Для $t \geq m$ положим

$$I_t = \mathbb{1}\{X_{t-m+1} \dots X_t = W\},$$

а для $t < m$ положим $I_t = 0$. Пусть

$$T = \min\{t \geq 1 : I_t = 1\}.$$

Тогда $\tau = \mathbb{E}[T]$ и

$$S_n = \sum_{t=1}^{n} I_t.$$

По линейности математического ожидания

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{t=m}^{n} q^{-m} = (n - m + 1)q^{-m}.$$

Назовем $k \in \{1, \dots, m\}$ границей слова W, если

$$W_{1..k} = W_{m-k+1..m},$$

и обозначим множество всех длин границ через $\mathcal{B}$.

Если $T = t$, то дополнительные вхождения слова W внутри отрезка $[t, t+m-1]$ возможны только за счет перекрытий, соответствующих границам $k \in \mathcal{B}$. Для фиксированного k вероятность такого перекрывающегося вхождения равна q^{-k}. Следовательно,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} I_t\right] = \sum_{k \in \mathcal{B}} q^{-k}.$$

С другой стороны,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} I_t\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] = \lim_{n\to\infty} (n-m+1)q^{-m} = \frac{\tau}{q^m}.$$

Отсюда

$$\tau = \sum_{k \in \mathcal{B}} q^k.$$

Для данного слова положим

$$U = \mathsf{CSSPACE}, \qquad |U| = 7,$$

тогда

$$W = UUUU\mathsf{CS},$$

и

$$\mathcal{B} = \{2, 9, 16, 23, 30\}.$$

Следовательно,

$$\tau = 26^{30} + 26^{23} + 26^{16} + 26^9 + 26^2.$$

□

Задача 7 (Простые суммы двух)**.** Сколько существует последовательностей

$$(a_1, a_2, \dots, a_{100}),$$

где каждый элемент — натуральное число от 1 до 100, то есть

$$a_i \in \{1, 2, \dots, 100\},$$

и при этом для любых различных индексов $i \neq j$ сумма двух элементов является простым числом:

$$a_i + a_j \text{ — простое число для всех } 1 \le i < j \le 100?$$

Требуется найти количество таких последовательностей.

Доказательство. Пусть $(a_1, \dots, a_{100})$ удовлетворяет условию.

Если $a_i = a_j = x$ при $i \neq j$, то $2x$ простое, откуда $x = 1$. Следовательно, любое значение, отличное от 1, встречается не более одного раза.

Если существуют два различных индекса $i \neq j$ такие, что $a_i \neq 1$ и $a_j \neq 1$, то $a_i + a_j$ чётно и не меньше 4, значит не простое. Противоречие. Следовательно, существует не более одного элемента, отличного от 1.

Пусть $a_k = x \neq 1$, остальные элементы равны 1. Тогда необходимо и достаточно, чтобы $1 + x$ было простым. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$x = p - 1,$$

где p — простое число из отрезка $[3, 101]$. Таких простых 25.

Подсчет. Существует одна последовательность $(1, \dots, 1)$. Для каждого допустимого x и каждого выбора позиции k получаем допустимую последовательность. Поэтому общее число равно

$$1 + 100 \cdot 25 = 2501.$$

□

Задача 8 (Перевернутый многочлен)**.** Пусть

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{1000} x^{1000}$$

— многочлен степени 1000 с условиями $a_0 = a_{1000} = 1$.
Определим перевёрнутый многочлен

$$\mathrm{rev}(P)(x) = x^{1000} P\left(\frac{1}{x}\right) = a_{1000} + a_{999} x + \cdots + a_0 x^{1000}.$$

Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = P(x) + \mathrm{rev}(P)(x).$$

Известно, что все корни многочлена $Q(x)$ вещественные и учитываются с кратностями.
Найти наименьшее возможное значение суммы модулей всех корней $Q(x)$:

$$\sum_{i=1}^{1000} |r_i|,$$

где $r_1, \dots, r_{1000}$ — корни $Q(x)$ с учётом кратностей.

Доказательство. Многочлен

$$Q(x) = P(x) + x^{1000} P(1/x)$$

удовлетворяет равенству

$$x^{1000}Q(1/x) = Q(x).$$

Следовательно, если r — корень $Q(x)$, то $1/r$ также корень той же кратности. Так как все корни вещественные, они разбиваются на 500 пар $(r, 1/r)$.

Для каждой пары выполняется

$$|r| + \left|\frac{1}{r}\right| \geq 2,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{1000} |r_i| \geq 500 \cdot 2 = 1000.$$

Равенство достигается, если $|r| = 1$ для всех корней. Возьмем

$$P(x) = (x+1)^{1000}.$$

Тогда $a_0 = a_{1000} = 1$, rev$(P) = P$, и

$$Q(x) = 2(x+1)^{1000}.$$

Все корни равны -1 с суммарной кратностью 1000, поэтому

$$\sum_{i=1}^{1000} |r_i| = 1000.$$

Минимальное возможное значение равно 1000. $\square$

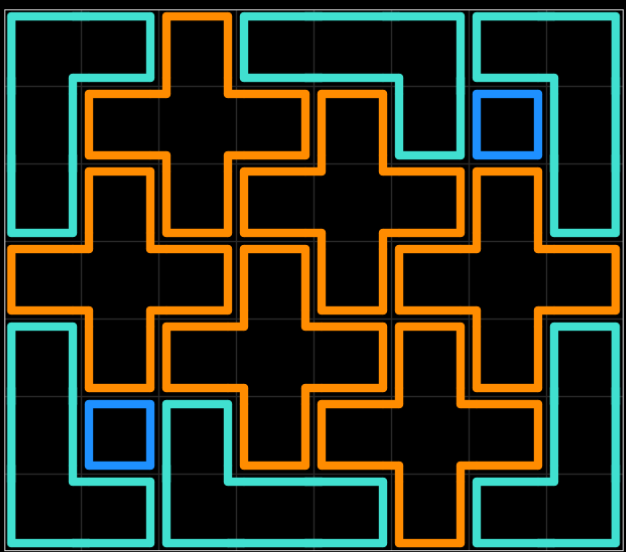
Задача 9 (Замощения прямоугольника)**.** Прямоугольник размера 7×8, разбитый на единичные клетки, требуется полностью разрезать на непересекающиеся фигуры следующих типов:

1. X**-пентамино** — фигура из 5 клеток, состоящая из одной центральной клетки и четырёх клеток, примыкающих к ней по сторонам (крестообразная форма).
2. L**-тетрамино** — фигура из 4 клеток, соединённых по сторонам и образующих букву «L». Эту фигуру разрешено поворачивать и переворачивать.
3. **Одиночные клетки** — фигуры размера 1×1.

Обозначим:

- x — количество использованных X-пентамино,
- l — количество использованных L-тетрамино,
- s — количество одиночных клеток.

Требуется разрезать прямоугольник без перекрытий и пропусков так, чтобы величина
$$l + s$$
была минимальной.



Доказательство. Ответ равен 8. Пример разбиения с $x = 6$, $l = 6$, $s = 2$ изображен на рисунке, поэтому $l + s = 8$ достижимо.

Докажем, что меньше нельзя. Всегда $5x + 4l + s = 56$, то есть $4l + s = 56 - 5x$.

Оценим x. Рассмотрим каёмку толщины 1: на ней 26 клеток, внутри 30 клеток. Центр креста не может лежать на каёмке. На каждой из четырех сторон каёмки кресты могут занимать не более 2 клеток (иначе два креста пересекутся), значит на всей каёмке кресты занимают не более 8 клеток. Тогда внутри кресты занимают не менее $5x - 8$ клеток, откуда $5x - 8 \le 30$ и $x \le 7$.

Исключим $x = 7$. Тогда $4l + s = 21$. Чтобы иметь $l + s \le 7$, необходимо $l \ge 5$, а так как $4l \le 21$, получаем $l = 5$ и $s = 1$.

В шахматной раскраске каждое L-тетрамино покрывает 2 черных и 2 белых клетки, значит вклад всех L равен 0 в разность $\Delta = \#$черных $- \#$белых. Каждый крест дает вклад ± 3, каждая одиночная клетка дает вклад ± 1. Так как у доски $\Delta = 0$, получаем

$$3(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_x) + (\sigma_1 + \dots + \sigma_s) = 0$$

при $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$, $\sigma_j \in \{+1, -1\}$. Отсюда $\sigma_1 + \dots + \sigma_s$ делится на 3, а значит s нечётно влечет $\sigma_1 + \dots + \sigma_s$ нечётно, что невозможно при $x = 7$, потому что левая часть тогда равна сумме числа, кратного 3, и нечётного числа. В частности, при $s = 1$ имеем $\sigma_1 = \pm 1$, и равенство невозможно. Значит $x \ne 7$, следовательно $x \le 6$.

Если $x = 6$, то $4l + s = 26$, откуда $l \le 6$ и $l + s \ge 6 + 2 = 8$.

Если $x \le 5$, то $4l + s = 56 - 5x \ge 31$, поэтому $l + s \ge \lceil \frac{31}{4} \rceil = 8$.

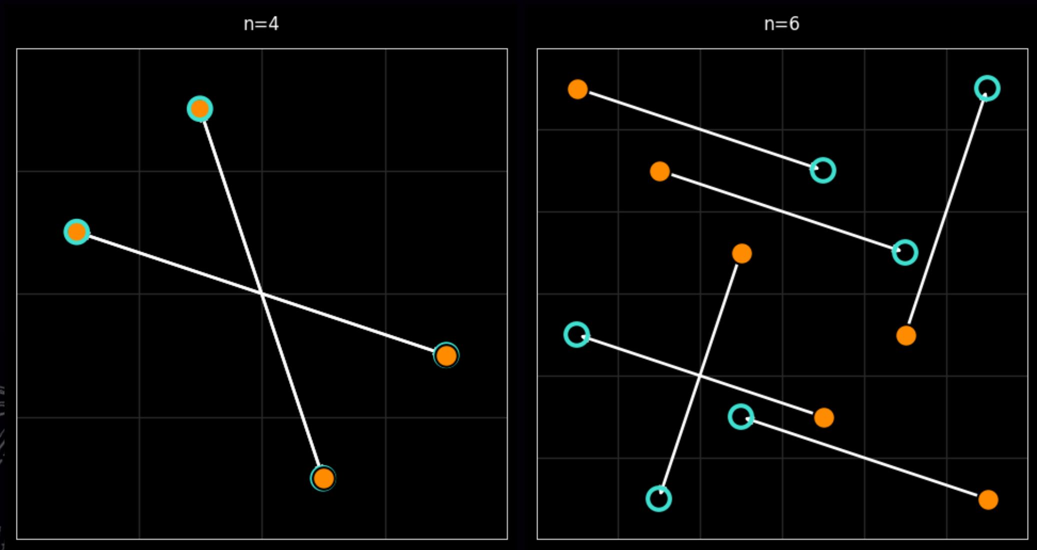
Итак, $l + s \ge 8$ во всех случаях и 8 достигается, значит минимум равен 8. $\square$

Задача 10 (Волшебник Алексей)**.** На шахматной доске $n \times n$ стоит n ладей так, что никакие две не бьют друг друга (то есть в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно одна ладья).
Волшебник Алексей превратил всех ладей в верблюдов. Верблюд ходит прыжком на $(1, 3)$: из клетки (x, y) он может попасть в одну из клеток $(x \pm 1, y \pm 3)$ или $(x \pm 3, y \pm 1)$ (если она существует на доске).
Каждый верблюд делает ровно один ход. После этого волшебник Алексей превращает всех верблюдов обратно в ладей. Оказалось, что ладьи снова стоят правильно (то есть снова по одной в каждой строке и каждом столбце).
При каких n это возможно?

Доказательство. Если $n \le 3$, то хода верблюда $(1, 3)$ на доске нет, значит условие невыполнимо.

Далее считаем $n \ge 4$. Каждый ход верблюда меняет номер строки на 1 или 3, то есть меняет чётность строки. Значит после хода количество фигур на чётных строках станет равным количеству фигур, которые были на нечётных строках, и наоборот.

Если n нечётно, то на доске $n \times n$ нечётных строк на одну больше, чем чётных, поэтому исходно ладей на нечётных строках больше, чем на чётных, а после хода наоборот. Это невозможно, так как после превращения обратно в ладьи снова должна быть ровно одна ладья в каждой строке. Значит при нечётном n невозможно.



Пусть n чётно и $n \geq 4$. Достаточно дать конструкции для $n = 4$ и $n = 6$ и показать шаг $n \to n + 4$.

Для $n = 4$ и $n = 6$ примеры расстановок и ходов заданы на рисунках.

Если конструкция существует для n, то для $n + 4$ оставим ее в левом верхнем углу $n \times n$, а в правом нижнем углу 4×4 добавим фиксированный блок-рисунок для $n = 4$ (в нём верблюды ходят, не выходя из этого блока). Тогда в каждой новой строке и новом столбце ровно одна ладья, и после ходов это свойство сохраняется. Следовательно, конструкция существует для всех чётных $n \geq 4$.

Итак, это возможно тогда и только тогда, когда n чётно и $n \geq 4$. $\square$