

Финал

Задача 1 (Матрицы). Артур написал подряд на доске 3 квадратные матрицы $A, B, C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Юра удивился и сказал: «как ни расставляй между матрицами символы „+“ или „·“, результатом всегда будет единичная матрица». Какое максимальное количество выражений Юры могут быть верными?

Задача 2 (Раскраска ребер). Дан связный граф на n вершинах, степень каждой вершины хотя бы $n - a$. Докажите, что его рёбра можно так раскрасить в a цветов, что между любыми двумя вершинами будет путь, в котором все цвета рёбер различны.

Задача 3 (Сумма). Существует ли такая последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \dots$, что для любого натурального k сумма $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{2k}$ сходится абсолютно и равна 0?

Задача 4 (Загадочная сумма). Посчитайте предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + nk + k^2}$$

Задача 5 (Шифр Миши). Программист Миша изобрёл новый способ кодировать вещественные числа, дополненные особыми числами $-\infty$ и ∞ . Опишем его в виде рекурсивной функции f :

- если число отрицательно, пишем 0, а иначе пишем 1;
- дописываем к этой цифре $f(\ln(|x|))$;
- считаем, что $\ln(0) = -\infty$, $|\infty| = \infty$, $\ln(\infty) = \infty$;
- например, число e в этой системе счисления записывается так: 111011111111111111 ...

Мише стало интересно, применима ли на практике его система счисления. Для этого необходимо убедиться, что для любых двух различных вещественных чисел соответствующие им бесконечные строки будут разными. Верно ли это?

Задача 6 (Отрезки). Назовем множество отрезков A с концами в целых точках отрезка $[1, n]$ *удобным*, если любой отрезок с концами в целых числах от 1 до n представляется в виде объединения не более чем 1000 отрезков из A . Для всех ли n существует удобное множество из $1000n$ отрезков?

Задача 7 (Волнистые многочлены). Многочлен $f(x)$ степени n называется *волнистым*, если он имеет ровно один корень в каждом из n интервалов $(\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1})$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$. Изначально Иван держит в руках многочлен $f_0(x)$ степени $\deg f = n - 1$. За один ход он может поменять его на многочлен $h(x)$, если $\deg h = n - 1$ и многочлен $xf(x) - h(x)$ является волнистым. Докажите, что все многочлены, которые могут быть получены Иваном, имеют ограниченные коэффициенты (возможно, граница зависит от его исходного многочлена).

Задача 8 (Числа в дереве). На доске написаны числа: 555 нулей, 111 единиц, 358 двоек — в сумме 1024 числа. Тимофей нарисовал полное двоичное дерево глубины 10 и расставил в его листьях все числа с доски в некотором порядке. В каждой вершине, имеющей детей, он посчитал L и R — суммы чисел в листьях её левого и правого поддеревьев — и записал к себе в тетрадь величину $|L - R|$. Чему равна наименьшая возможная сумма чисел в тетради Тимофея?

Задача 9 (Алиса и Боб). Алиса и Боб находятся в разных городах и играют в следующую игру. Они получают два битовых числа длины n : Алисе сообщается число x , а Бобу — число y . В их распоряжении есть устройство связи, которое позволяет передавать друг другу битовые сообщения:

- за одно сообщение можно послать 0 или 1;
- сообщения отправляются последовательно;
- разрешено несколько раз подряд отправить сообщение в одну сторону.

Алиса и Боб могут заранее договориться, какие сообщения они будут посылать и как определяют их очерёдность. Как им нужно действовать, чтобы в результате оба игрока узнали значение $\text{MAX}(x, y)$ за $n + \mathcal{O}(\log n)$ сообщений?