

## Отборочный этап

**Задача 1** (Фальшивая монета). Есть 2025 монет, 1 фальшивая. Разрешается взять любые 100 и спросить, есть ли из них фальшивая. За сколько запросов можно гарантировано найти фальшивую?

*Доказательство.* Все, что нам важно от монет после нескольких запросов — какие монеты еще могут быть фальшивыми, а какие — уже нет, причем чем больше монет, которые могут быть фальшивыми, тем сложнее нам угадать. Когда мы спрашиваем про набор монет, мы делим множество потенциально фальшивых монет на две части и оставляем одну из них в зависимости от ответа на вопрос. Отсюда нам нужно делить множество потенциально фальшивых монет как можно более поровну. Значит сначала надо 19 раз спросить про 100 новых монет, в худшем случае останется 125 потенциально фальшивых монет, из которых мы найдем нужную двоичным поиском за 7 вопросов.  $\square$

**Задача 2** (Кубик). Вася написал в вершинах кубика вещественные числа от 0 до 1 и посчитал величину «сумма квадратов чисел в вершинах минус просуммированные по рёбрам произведения чисел в их концах». Чему равен ее максимум?

*Доказательство.* Ответ: 4. Пример: четыре единицы в несмежных углах куба.

Докажем верхнюю оценку. Заменим квадраты чисел в вершинах на сами числа — это не уменьшит ответ. Теперь заметим, что получившаяся функция линейна по каждой переменной, то есть ее максимум достигается в ситуации, когда все переменные — 1 или 0. Но в таком случае, если ровно  $t$  переменных равны 1, то существует хотя бы  $t - 4$  вертикальных ребра, таких, что на их концах обе переменные равны 1. Значит, значение функции не более 4, что и требовалось.  $\square$

**Задача 3** (Игра Незнайки). Незнайка участвует в магической игре: он  $n$  раз подкидывает монетку с вероятностью орла  $p$ , изначально  $p = 0.5$ . Если выпадает орёл, в его кармане появляется тугрик и  $p$  уменьшается на 0.1. В противном случае Незнайка ничего не выигрывает и  $p$  увеличивается на 0.1. Сколько в среднем тугриков выиграет Незнайка?

*Доказательство.* Будем считать, что Незнайка не просто проигрывает монету, а отдает ее Знайке. Тогда игроки симметричны: для Знайки игра ровно такая же, как для Незнайки; а значит, и ожидание количества монет у них одинаковое. Но суммарное количество побед равно  $n$ , то есть Незнайка в среднем выигрывает  $\frac{n}{2}$  игр.  $\square$

**Задача 4** (Числа на круге). По кругу расположено  $n > 2$  натуральных чисел. Каждую секунду все числа заменяются на модуль разности соседей. При каких  $n$  все числа гарантированно станут нулями?

*Доказательство.* Во-первых, заметим, что максимум из чисел на круге не возрастает. Значит, если при любой начальной расстановке все числа станут делиться на 2, то рано или поздно они все станут нулями: поделив на 2, мы получим, что они все станут делиться на 4, потом на 8 и так далее, но при этом они ограничены.

Значит, достаточно рассмотреть ситуацию по модулю 2. Но в этом случае нас интересуют только остатки чисел при делении на 2, но не сами числа. Пусть на  $i$ -той позиции стоит остаток  $c_i$  по модулю 2. Рассмотрим многочлен  $\sum c_i x^i$  над  $\mathbb{F}_2$ . Описанная в условии операция умножает многочлен на  $\frac{1}{x} + x$  и заменяет на его остаток по модулю  $x^n - 1$ . Значит, все числа станут нулями тогда и только тогда, когда какая-то степень  $(\frac{1}{x} + x)^m$  делится на  $x^n - 1$  над  $\mathbb{F}_2$ , а это происходит в точности тогда, когда  $n$  — степень двойки.  $\square$

**Задача 5** (Пентограмма). На одном небезызвестном факультете математики есть клуб паранормальных явлений. Для вступления в этот клуб каждый новый участник должен пройти ритуал вступления. С помощью циркуля и линейки они рисуют на полу большой правильный пятиугольник и просят участника бросить мелок внутрь фигуры. Если мелок окажется ближе к центру, чем к границе, то участник успешно прошел обряд. Иначе лучше даже не знать, что случится.

Федя хочет попасть в клуб. Для этого ему нужно посчитать вероятность успешного прохождения.

Считайте, что Федя не промахивается, а бросает абсолютно случайно (распределение равномерное на пятиугольнике), а мелок точечного размера.

Помогите Феде разобраться, какие у него шансы!

*Доказательство.* Решим вспомогательную задачу. Дан прямоугольный треугольник с координатами  $A = (0, 0)$ ;  $B = (1, 0)$ ;  $C = (0, r)$ . Найдите вероятность того, что случайная точка в треугольнике ближе к вершине  $C$ , чем к катету  $AB$ .

Множество равноудалённых от стороны треугольника и противоположной вершины точек — это парабола с директрисой  $y = 0$  и фокусом  $(0, r)$ , которая задаётся уравнением

$$y^2 = (r - y)^2 + x^2$$

$$y = \frac{x^2}{2r} + \frac{r}{2}$$

Обозначим длину боковой стороны в треугольнике за  $R = \sqrt{1 + r^2}$ .

Заметим, что парабола пересекает гипотенузу  $CB$  в точке  $D = (\frac{r}{r+R}, \frac{rR}{r+R})$  и катет в точке  $M = (0, \frac{r}{2})$ . Искомая вероятность равна отношению площади криволинейного треугольника  $CDM$  и площади  $ABC$ :

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^{\frac{r}{r+R}} r(1-x) - (\frac{x^2}{2r} + \frac{r}{2}) dx}{\frac{r}{2}} &= \int_0^{\frac{r}{r+R}} 1 - 2x - \frac{x^2}{r^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{r}{r+R}} 1 - 2x - \frac{x^2(R^2 - r^2)}{r^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{r}{r+R}} (x-1)^2 - \frac{x^2 R^2}{r^2} dx \\ &= \left. \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{x^3 R^2}{3r^2} \right|_0^{\frac{r}{r+R}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{R^3}{3(r+R)^3} - \frac{rR^2}{3(r+R)^3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{R^2}{3(r+R)^2} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3(\frac{r}{R} + 1)^2}. \end{aligned}$$

Вернёмся к исходной задаче. Разделим пятиугольник на 10 равных прямоугольных треугольников. Вероятность попадания точки в каждый равна  $\frac{1}{10}$ .

При этом  $\frac{r}{R} = \sin(54^\circ) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ .

Теперь мы можем найти ответ на задачу:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3\left(\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}-1}{15} \approx 0.2314757303333.$$

□

**Задача 6** (Бесконечные мудрецы). В комнате бесконечное (возможно несчётное) число мудрецов. Выбираются 10 из них и ставятся в круг. Затем им равномерно надеваются шапки 10 цветов (каждому шапка случайного цвета).

Каждый мудрец видит только цвета шапок остальных, но не свою. Самих мудрецов он при этом не видит (шапки волшебные). По команде они одновременно говорят один из 10 цветов. Если хотя бы один мудрец говорит свой цвет, они побеждают. Как им максимизировать вероятность победы? Какова будет эта вероятность?

*Доказательство.* Рассмотрим двудольный граф:

- одной его долей будут всевозможные последовательности шапок длины 9 — доступная произвольному мудрецу информация;
- второй долей будут всевозможные циклические расстановки 10 шапок на круге (с точностью до поворота круга);
- проведём ребро между картинкой мудреца и порядком на круге в случае, если один из мудрецов увидит такую картину при данной расстановке шапок на круге.

Тогда стратегию каждого мудреца можно описать набором вещественных чисел на ребрах  $p_{ij}$  (вероятности взятия ребра), для которого сумма чисел на ребрах, смежных с каждой вершиной первой доли, равна 1:

$$\sum_j p_{ij} = 1.$$

Рассмотрев среднюю вероятность на ребрах для всех мудрецов, можно считать, что для каждого мудреца эти числа одинаковы и равны средней вероятности. Тогда вероятность победы мудрецов при выборе некой расстановки шапок по кругу — это  $1 - \prod_i (1 - p_{ij})$ . Можно заметить, что оптимальная сумма вероятностей должна достигаться в ситуации, когда все  $p_{ij}$  равны 0 или 1 (для доказательства этого можно “подвигать” нецелые вероятности, не уменьшая сумму). Также заметим, что вероятность взятия вершины во 2 доле равна  $\frac{10}{10^d}$ , где  $d$  — максимальное число, такое, что порядок шапок, соответствующий этой вершине, является  $d$  — периодическим. То есть, во второй доле  $10^9 - 10^4 - 9$  вершин с вероятностью взятия  $10^{-9}$  и 1998 вершин с вероятностью взятия  $5 \cdot 10^{-10}$ .

Таким образом, нам нужно выбрать паросочетание, максимизирующее сумму вероятностей вершин во второй доле. Поскольку в первой доле находится  $10^9$  вершин, то максимальная сумма вероятностей будет в случае, если в паросочетании взято  $10^9 - 10^4 - 9$  вершин с периодом 10 и  $10^4 + 9$  вершин с периодом 5. В этом случае искомая вероятность равна  $\frac{10^9 - 5 \cdot 10^3 - 9}{10^9} = 0.999994991$ .

Такое паросочетание действительно существует. Приведем набросок одного из возможных доказательств.

Обозначим через  $V_1$  множество вершин второй доли с периодом 10, через  $V_2$  множество вершин 2 доли с периодом 5, через  $U$  множество вершин 1 доли. Графом  $G$  назовем объединение долей  $V_1, V_2$  и  $U$ . С одной стороны, в  $G$  по лемме Холла существует паросочетание, покрывающее все  $V_1$ . То есть нам достаточно доказать, что в  $G$  есть паросочетание, покрывающее все  $U$ .

Воспользуемся леммой Холла. Если такого паросочетания не существует, тогда найдётся такое  $U_1 \in U$ , что  $|N(U_1)| < |U_1|$ , где  $N(U_1)$  — множество соседей  $U_1$ . Пусть в  $U_1$  ровно  $t$  вершин, для которых их степень в  $G$  меньше 10. Тогда каждая из этих  $t$  вершин смежна с некой расстановкой шапок с периодом 1 или 2. С другой стороны, из  $N(U_1)$  в  $G \setminus U_1$  ведет не более  $t$  ребер. Будем называть такие ребра разрезными.

Назовем вершину первой доли хорошей, если среди всех путей длины 4 из нее хотя бы доля в  $\frac{7}{10}$  не содержит разрезных ребер. Хорошая вершина  $z_1$  существует в  $U_1$ , поскольку все вершины степени меньше 10 далеки друг от друга, а значит пути длины 4 из них не пересекаются, и одна из таких вершин подходит. По аналогичным соображениям хорошая вершина  $z_2$  существует и в  $U \setminus U_1$ , если  $U_1$  не пусто, поскольку  $(V_1 \cap V_2) \setminus N(U_1) > 10^4$ , и мы сможем найти вершину, далекую от разрезных ребер. Возьмем также хорошую вершину  $z_3$ , в которой в кадой позиции цвета шапок отличаются от цветов  $z_1$  и  $z_2$  — такая существует, поскольку разных возможных вершин гораздо больше, чем разрезных ребер.

Теперь, рассмотрев случайный путь  $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ , можно заметить, что с ненулевой вероятностью он не содержит разрезных ребер, что входит в противоречие с определением  $U_1$ , что и требовалось.  $\square$

**Задача 7** (Мудрецы и шляпы). В круг стоят 10 мудрецов, каждому дали шляпу одного из 10 цветов. Мудрецы видят все шляпы, кроме своей. По команде они одновременно говорят один из 10 цветов. Если хотя бы один мудрец верно называет свой цвет, они побеждают. Могут ли мудрецы гарантировано победить?

**Доказательство.** Да, могут. Сопоставим цветам шапок числа от 1 до 10. Первый будет называть цвет шапки так, чтобы сумма всех чисел делилась на 10. Второй — чтобы она давала остаток 1 при делении на 10, и так далее. Один из них угадает.  $\square$

**Задача 8** (Бесконечная сумма). Посчитайте бесконечную сумму

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^3 + 2^3} + \frac{1}{1^3 + 2^3 + 3^3} + \dots$$

*Доказательство.* Воспользуемся формулой суммы кубов  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  и суммы обратных квадратов  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n} + \frac{4}{(n+1)^2} + \frac{8}{n+1} \right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} - 4 - 8 = \frac{4\pi^2}{3} - 12 \approx 1.1594725348 \end{aligned}$$

□

**Задача 9** (Фокус с шляпами). В комнате сидят  $n$  мудрецов. Каждому из них с вероятностью  $p$  надели красную шляпу, а с вероятностью  $(1-p)$  — синюю. Каждый мудрец видит все шляпы, кроме своей, и знает вероятность  $p$ . По команде они одновременно говорят цвет, если каждый угадал цвет своей шляпы, мудрецы побеждают. Чему равна максимальная вероятность победы?

*Доказательство.* Рассмотрим граф, вершины которого — упорядоченные наборы шапок на мудрецах (обозначаемые К и С), ребро между вершинами проводится, если наборы отличаются в одной позиции. Тогда множество наборов, на которых мудрецы победят, не содержит двух связанных ребром вершин. Наоборот, если множество вершин  $T$  не содержит смежных вершин, мудрецы могут победить на них — для этого, если мудрец может назвать такой цвет шапки, что набор шапок попадет в  $T$ , он его попросту назовет.

Фиксируем такое  $T$ , и пусть также для удобства  $p \geq \frac{1}{2}$ . Рассмотрим произвольный путь длины  $n$  из (КККК...К) в (СССС...С). Заметим, что на данном пути никакие 2 вершины из не являются соседями, то есть обозначив через  $r_i$  долю вершин с  $i$  красными шапками, которые принадлежат  $T$ , получим, что  $r_i + r_{i+1} \leq 1$  для любого  $i$ , и нам нужно максимизировать  $\sum C_n^i p^i (1-p)^{n-i} r_i$ .

Во-первых, если не все  $r_i$  равны 1 или 0, то мы можем подвигать их, не уменьшив сумму.

Во-вторых, функция  $C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$  выпукла по  $i$ , откуда если два соседних  $r_i$  равны 0, мы можем увеличить ответ, «придвинув» левую или правую часть в сторону этих нулей.

Поэтому нам достаточно рассмотреть только два множества: все наборы с четным числом синих шапок и все наборы с нечетным числом синих шапок. Вероятность в первом случае равна  $\frac{1+(2p-1)^n}{2}$ , соответственно, во-втором —  $\frac{1-(2p-1)^n}{2}$ . Откуда ответ  $\frac{1+|2p-1|^n}{2}$ . □

**Задача 10** (Покрывание кликами). Компания из  $3n$  людей разбилась на  $n$  троек. Они хотят провести несколько встреч, причем на каждую встречу собирается ровно  $n$  человек — по одному из каждой тройки. Обозначим через  $CC(n)$  минимальное число встреч, необходимых для того, чтобы каждая пара людей из разных компаний поучаствовала вместе хотя бы в одной встрече.

Докажите, что  $\frac{3}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{CC(n)}{\log_2 n} \leq 3$ .

**Доказательство.** Пусть было проведено  $t$  встреч. Давайте каждой тройке поставим в соответствие последовательность  $T_i$  длины  $t$  из чисел 1,2,3 в зависимости от того, какой из людей был на встрече.

### Верхняя оценка.

Условие «любые 2 человека из разных троек встречались» в точности означает, что для любых  $i, j$  и любых  $c_1, c_2, 1 \leq c_1, c_2 \leq 3$  существует такая позиция  $p$ , что  $T_i(p) = c_1, T_j(p) = c_2$ . Для оценки нам надо найти наибольшее количество последовательностей длины  $t$ , обладающих этим свойством.

Пусть  $t = 6k + 3$ . Возьмем все последовательности  $T$  следующего вида:

- Среди первых  $2k$  символов ровно по  $k$  единиц и двоек.
- Если для какого-то  $1 \leq i \leq 2k$   $T(i) = 1$ , то  $T(2k + i) = 2$  и  $T(4k + i) = 3$ .
- Если для какого-то  $1 \leq i \leq 2k$   $T(i) = 2$ , то  $T(2k + i) = 3$  и  $T(4k + i) = 1$ .
- $T(6k + 1) = 1, T(6k + 2) = 2, T(6k + 3) = 3$ .

Это множество обладает нужным свойством и имеет размер хотя бы  $2^{(2-\epsilon)k}$  для любого фиксированного  $\epsilon$  при большом  $k$ , что доказывает верхнюю оценку.

### Нижняя оценка.

Заметим, что поскольку различных наборов размеров  $O(t^3)$ , мы можем считать, что во всех последовательностях одинаковое количество единиц, одинаковое количество двоек и одинаковое количество троек. Не умаляя общности, количество троек не меньше, чем единиц и двоек. Обозначим через  $u, v$  кол-во единиц и двоек соответственно.

Рассмотрим множество пар  $(U_i, V_i)$ , где  $U_i$  — множество позиций единиц, а  $V_i$  — двоек. Тогда  $U_i, V_i$  не пересекаются, но для всех различных  $i, j$  множества  $U_i$  и  $V_j$  пересекаются.

Обозначим количество пар через  $M$ . Тогда в случайной перестановке множества позиций для любого  $i$  с вероятностью  $\frac{1}{C_{u+v}^u}$  все  $U_i$  предшествуют всем  $V_i$ . Заметим, что для любой перестановки таких индексов  $i$  существует не более одного: если нашлись два таких индекса  $i, j$ , то либо  $U_i, V_j$  не пересекаются, либо  $U_j, V_i$  не пересекаются. Отсюда  $M \leq C_{u+v}^u \leq 2^{\frac{2t}{3}}$ .  $\square$