

Финал

Задача 1 (Матрицы). Артур написал подряд на доске 3 квадратные матрицы $A, B, C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Юра удивился и сказал: «как ни расставляя между матрицами символы „+“ или „·“, результатом всегда будет единичная матрица». Какое максимальное количество выражений Юры могут быть верными?

Доказательство. Давайте докажем, что все 4 условия одновременно не могут быть выполнены:

$$A + B + C = I \quad (1)$$

$$A \cdot B + C = I \quad (2)$$

$$A + B \cdot C = I \quad (3)$$

$$A \cdot B \cdot C = I \quad (4)$$

Заметим, что из последнего выражения следует, что матрицы A, B, C обратимы.

Домножим первое выражение справа на $-C$, второе справа на C , третье на 1 , а четвёртое на -1 и сложим.

$$\begin{aligned} -AC - BC - C^2 + ABC + C^2 + A + BC - ABC &= -C + C + I - I \\ -AC + A &= 0 \\ C &= I. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить, что $A = I$. Тогда из четвёртого выражения следует, что и $B = I$, что очевидно не удовлетворяет остальным соотношениям.

Теперь докажем, что при чётных n могут быть выполнены три соотношения. Пусть $A = C$, $B = A^{-2}$. Тогда выражение (4) автоматически выполнено, а (2) и (3) сводятся к выражениям $A^2 - A + I = 0$. Нетрудно проверить, что матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ обратима и удовлетворяет соотношению $A^2 - A + I = 0$. Для всех остальных чётных n берём блочно-диагональную матрицу с блоками A .

В случае нечётного n заметим, что у матрицы $n \times n$ всегда будет вещественное собственное число λ с собственным вектором v_λ (корень характеристического многочлена нечётной степени).

Докажем, что для нечётных n три соотношения не могут быть выполнены.

Предположим, что (3) и (4) верны. Тогда

$$A^2 - A + I = 0.$$

Применив данный оператор к вектору v_λ , получим, что

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

что неправда, так как у данного квадратного уравнения нет вещественных корней.

Аналогично разбирается случай верности (2) и (4) выражения. Значит, по принципу Дирихле соотношение (4) не выполнено.

Из (2) вычтем (1). Получим

$$(A - I)(B - I) = I.$$

Аналогично из (3) вычтем (1). Получим

$$(B - I)(C - I) = I.$$

Из чего следует, что $A = C$. Получим, что

$$\begin{aligned} 2A + B &= I \\ A \cdot B + A &= I. \end{aligned}$$

Решая систему, получим

$$2A^2 - 2A + I = 0,$$

что не может быть верно в силу наличия вещественного собственного числа. $\square$

Задача 2 (Раскраска ребер). Дан связный граф на n вершинах, степень каждой вершины хотя бы $n - a$. Докажите, что его рёбра можно так раскрасить в a цветов, что между любыми двумя вершинами будет путь, в котором все цвета рёбер различны.

Доказательство. Будем доказывать по индукции. Положим, при всех меньших n утверждение верно. Рассмотрим граф на n вершинах и максимальную клику C в нём — пусть она имеет размер d . Покрасим все ее рёбра в a -тый цвет и потом стянем.

Докажем, что степень каждой вершины в новом графе не менее $n - a - d + 2$:

1. Рассмотрим сначала вершину v_C , в которую мы стянули C . Степень каждой вершины исходной клики была не менее $n - a$. Из них мы удалили $d - 1$ ребро — значит, осталось хотя бы $n - a - d + 1$.

Заметим, что после стягивания может получиться точное равенство $\deg v_C = n - a - d + 1$ только в случае, если все вершины C имели одинаковых соседей вне клики. Но такого не бывает: клику можно было бы расширить, а C была выбрана максимальной.

2. Для вершины u вне C заметим, что если она не имела общих с вершинами клики рёбер, степень u не изменилась. А если из нее вело ребро в клику, то таких рёбер было не более чем $d - 1$, и из них осталось хотя бы одно.

Теперь по предположению индукции рёбра нового графа раскрашиваются в $a - 1$ цвет, что и даст требуемую раскраску. $\square$

Задача 3 (Сумма). Существует ли такая последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \dots$, что для любого натурального k сумма $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{2k}$ сходится абсолютно и равна 0?

Доказательство. Ответ: существует. Давайте возьмем бесконечно гладкую функцию F на окружности, симметричную относительно вещественной оси и такую, что все ее производные в точке 0 равны нулю, а также с нулевым средним.

Рассмотрим представление F в виде ряда Фурье и обозначим через c_n его коэффициенты:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

По симметричности и вещественности все c_n вещественны. Тогда $2k$ -ая производная этой функции в точке 1 равна

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2k} i^{2k} c_n$$

По гладкости эта сумма сходится абсолютно, откуда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} (c_n + c_{-n}) = 0$ для любого k ; теперь последовательность $a_n = c_n + c_{-n}$ удовлетворяет условию задачи. $\square$

Задача 4 (Загадочная сумма). Посчитайте предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + nk + k^2}$$

Доказательство. Определим $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + nk + k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Полученное выражение под пределом — это верхние суммы Дарбу для интеграла f на отрезке от 0 до 1 и равномерного разбиения. Значит, предел стремится к несобственному интегралу. Если этот интеграл сходится, то и предел сходится и равен интегралу.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\
 &= \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\
 &= \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}} du \\
 &= \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u}{\sqrt{3}} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{\log 3}{2} - \frac{\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\log 3}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

□

Задача 5 (Шифр Миши). Программист Миша изобрёл новый способ кодировать вещественные числа, дополненные особыми числами $-\infty$ и ∞ . Опишем его в виде рекурсивной функции f :

- если число отрицательно, пишем 0, а иначе пишем 1;
- дописываем к этой цифре $f(\ln(|x|))$;
- считаем, что $\ln(0) = -\infty$, $|\infty| = \infty$, $\ln(\infty) = \infty$;
- например, число e в этой системе счисления записывается так: 11101111111111111111...

Мише стало интересно, применима ли на практике его система счисления. Для этого необходимо убедиться, что для любых двух различных вещественных чисел соответствующие им бесконечные строки будут разными. Верно ли это?

Доказательство. Ответ: да, будут различны.

Будем смотреть на кодирование чисел немного по-другому: обозначим $f(x) = |\log x|$. Тогда Миша смотрит на последовательность $x_0 = x, x_1 =$

$f(x), x_2 = f(f(x)), \dots$ и пишет 1 на i -ом месте, если $x_i \geq 1$, иначе 0. Функция f убывает на $[0, \infty]$ и стремится к бесконечности при $x \rightarrow 0$.

Пусть для 2-х чисел $x < y$ их запись в Мишиной системе счисления одинакова. Это значит, что при одновременном применении f оба числа больше или меньше 1 одновременно. Не умаляя общности, $0 < x < y < 1$, поскольку каждое число при применении сколько-то операций f попадет в отрезок $[0, 1]$.

Тогда кодировка одинакова для всего отрезка $[x, y]$, и ее первый символ — 0.

Обозначим через S их общую кодировку и посмотрим на начальный кусок последовательности вида 01111111 (где следующий символ — 0), пусть он состоит из k символов. Пусть отрезок $[x, y]$ при k -кратном применении f переходит в отрезок $[a, b]$. Положим, мы доказали, что длина отрезка $[a, b]$ больше длины $[x, y]$ хотя бы в 1.00001 раз. В таком случае, рассмотрев несколько начальных кусков, получим, что длина отрезка $[x_n, y_n]$ при каком-то n будет сколь угодно большой, но она не может быть больше 1, что приводит к противоречию.

Обозначим $F_t(x) = e^{\dots e^x}$, а именно t -кратное применение $\exp(\cdot)$. Пусть после применения k раз функции $\log |x|$ к отрезку $[x, y]$ получился отрезок $[a, b]$. Тогда отрезок $[x, y]$ получается из $[a, b]$ применением функции $G(x) = \frac{1}{F_k(x)} = \frac{1}{e^{\dots e^x}}$. Тогда $G'(x) = \frac{e^x e^{e^x} \dots e^{e^{\dots e^x}}}{e^{\dots e^x}}$, то есть в числителе $\prod_{0 < i < k} F_i(x)$, а в знаменателе $F_k(x)$.

Докажем, что всегда $|G'| < 0.9999$.

После логарифмирования это равносильно неравенству $\sum_{0 \leq i < k-1} F_i(x) \leq F_{k-1}(x) - \varepsilon$ для малого $\varepsilon > 0$. При $k = 2$ это неравенство превращается в $x \leq e^x - \varepsilon$, при $k = 3$ получится $x + e^x \leq e^{e^x} - \varepsilon$ и так далее. Неравенство при $k = 2$ верно, поскольку $e^x \geq x + 1$, а остальные получаются из предыдущих по индукции дифференцированием. Таким образом, $|G'| < 0.9999$, значит, отрезок $[x, y]$ короче отрезка $[a, b]$ хотя бы в 0.9999 раз, из чего и следует то, что у всех чисел кодировки разные. $\square$

Задача 6 (Отрезки). Назовем множество отрезков A с концами в целых точках отрезка $[1, n]$ *удобным*, если любой отрезок с концами в целых числах от 1 до n представляется в виде объединения не более чем 1000 отрезков из A . Для всех ли n существует удобное множество из $1000n$ отрезков?

Доказательство. Ответ: нет. Назовем множество отрезков (a, n) -удобным, если любой отрезок с концами в $[1, n]$ представляется в виде объединения не более чем a отрезков этого множества. Докажем по индукции такое утверждение: для любых натуральных a, b при достаточно большом $N(a, b)$ в любом (a, N) -удобном множестве хотя бы $\frac{bn}{10}$ ребер. База: $a = 1$.

Переход: пусть мы знаем это при всех $a_0 < a$, а также при всех $b_0 < b$ и $a_0 = a$; докажем утверждение для пары (a, b) . Возьмем $N(a, b) = N = N_1 N_2$, где $N_1 = N(a, b - 1)$, $N_2 = 100N(a - 2, 10000N_1)$.

Разобьем отрезок длины N на N_2 отрезков длины N_1 (называемых базовыми). Назовём отрезок множества A маленьким, если его концы лежат в одном базовом отрезке, иначе большим. Заметим, что по индукции базовых отрезков хотя бы $\frac{b-1}{10} N_1 N_2 = \frac{(b-1)N}{10}$.

Давайте назовем базовый отрезок *интересным*, если для любой целой точки на нем верно, что она является концом хотя бы одного большого отрезка. Заметим, что если интересных отрезков больше половины, то хотя бы из половины вершин исходит большой отрезок, т.е. больших отрезков хотя бы $\frac{N}{4}$, и утверждение доказано.

В противном же случае рассмотрим множество неинтересных отрезков (пусть их T). Построим новое множество отрезков A' с концами в $[1, T]$. В множество A' возьмем отрезок $[x, y]$ тогда и только тогда, когда в A существует большой отрезок с концами в x -ом и y -ом неинтересном отрезке соответственно. Докажем, что любой отрезок с концами в $[1, T]$ покрывается не более чем $a - 2$ отрезками из A' . Действительно, рассмотрим отрезок в исходном отрезке с концами в таких точках x -го и y -го интересного отрезка, что из них не выходят рёбра вовне этих отрезков. Он покрывается не более чем a отрезками из A , и при этом концы отрезка покрываются маленькими отрезками.

Тогда, взяв прообразы этих отрезков в A' , получим покрытие отрезка $[x, y]$ из не более чем $a - 2$ отрезков. Но $|T| \geq N(a - 2, 10000N_1)$, откуда $|A'| \geq 10000N_1|T| \geq N$, то есть $|A| \geq \frac{(b-1)N}{10} \geq \frac{bN}{10}$, что и заканчивает индукционный переход. $\square$

Задача 7 (Волнистые многочлены). Многочлен $f(x)$ степени n называется *волнистым*, если он имеет ровно один корень в каждом из n интервалов $(\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1})$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$. Изначально Иван держит в руках многочлен $f_0(x)$ степени $\deg f = n - 1$. За один ход он может поменять его на многочлен $h(x)$, если $\deg h = n - 1$ и многочлен $xf(x) - h(x)$ является волнистым. Докажите, что все многочлены, которые могут быть получены Иваном, имеют ограниченные коэффициенты (возможно, граница зависит от его исходного многочлена).

Доказательство. Для многочлена f рассмотрим величину $N(f) = \sum_{j=0}^n \left| C_n^j f\left(\frac{j}{n+1}\right) \right|$. Докажем, что когда Иван меняет многочлен f на h , значение этой величины не увеличивается, из этого будет следовать требуемое.

Обозначим $b_j = (-1)^j f\left(\frac{j}{n+1}\right)$, $c_j = (-1)^j f\left(\frac{j}{n+1}\right)$. По волнистости $xf - h$, все значения чисел $d_j = b_j - \frac{j}{n+1}c_j$ имеют одинаковый знак.

Тогда

$$\sum d_j C_n^j = - \sum C_n^j \frac{j}{n+1} c_j = \sum C_n^j \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) c_j.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} N(h) &= \sum |b_j C_n^j| = \sum C_n^j \left| \frac{j}{n+1} c_j + d_j \right| \leq \sum C_n^j \left| \frac{j}{n+1} c_j \right| + C_n^j |d_j| = \\ &= \sum C_n^j \left| \frac{j}{n+1} c_j \right| + \left| \sum C_n^j \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) c_j \right| \leq N(f). \end{aligned}$$

□

Задача 8 (Числа в дереве). На доске написаны числа: 555 нулей, 111 единиц, 358 двоек — в сумме 1024 числа. Тимофей нарисовал полное двоичное дерево глубины 10 и расставил в его листьях все числа с доски в некотором порядке. В каждой вершине, имеющей детей, он посчитал L и R — суммы чисел в листьях её левого и правого поддеревьев — и записал к себе в тетрадь величину $|L - R|$. Чему равна наименьшая возможная сумма чисел в тетради Тимофея?

Доказательство. Ответ: 1248. Давайте решим задачу для случая, если все числа на доске — это нули и единицы, и всего на доске их 2^k . Пусть единиц ровно t . Обозначим через $F(t, k)$ ответ на эту задачу. Тогда

$$F(t, k) = \min_x F(x, k-1) + F(t-x, k-1) + |t-2x|$$

Оказывается, что каждый раз единицы выгодно делить как можно более поровну. А именно, давайте рассмотрим функцию F_1 , заданную как

- $F_1(0, 0) = 0$
- $F_1(2k, t) = 2F_1(k, t-1)$ при $t \geq 1$
- $F_1(2k+1, t) = F_1(k, t-1) + F_1(k+1, t-1) + 1$ при $t \geq 1$

Докажем теперь, что $F = F_1$, то есть что для F_1 выполнено неравенство

$$F_1(x+y, t) \leq F_1(x, t-1) + F_1(y, t-1) + |x-y|.$$

Будем доказывать данное утверждение по индукции. Пусть оно верно для всех меньших t, x, y , и $t \geq 2$. Также для удобства положим $x > y$, $x = 2a + 1$ чётно, а $y = 2b$ нечётно; остальные случаи рассматриваются аналогично. Тогда $F_1(x, t-1) + F_1(y, t-1) + |x-y| = F_1(a, t-2) + F_1(a+1, t-2) + 1 + 2F_1(b, t-2) + (2a+1-2b) \geq F_1(a+b, t-1) + F_1(a+b+1, t-1) + 1 = F_1(2a+2b+1, t)$, что и требовалось.

Таким образом, $F = F_1$. Научимся теперь считать F_1 . Обозначим $g(t, k) = \min(t \bmod 2^k, 2^k - t \bmod 2^k)$, а также $F_2(t, k) = \sum_{i=1}^k g(t, i)$. Покажем, что $F_1 = F_2$. Действительно, нам необходимо проверить 3 свойства функции F_1 . $F_2(0, 0) = 0$ по определению. Проверим теперь по индукции третье свойство, второе проверяется аналогично.

$F_2(x, k) = g(x, k) + F_2(x \bmod 2^{k-1}, k-1)$. Заметим теперь, что $g(2a+1, k) = g(a+1, k-1) + g(a, k-1)$ для любого k . Более того, если $a \neq 2^{k-1} - 1$, то

$$(2a+1) \bmod 2^k = (a+1) \bmod 2^{k-1} + a \bmod 2^{k-1},$$

и равенство следует по индукции. Для $a = 2^{k-1} - 1$ же оно верно, поскольку $F_2(2^k - 1, k) = k$. Таким образом, $F = F_1 = F_2$.

Вернемся к исходной задаче. Давайте продлим дерево на еще один уровень, и, если в листе стояло число 1, то напомним в двух его детях 1 и 0, если 0 — то 0 и 0, если 2 — то 1 и 1. Получается, что ответ на задачу не более $F(111 + 2 \cdot 358, 11) - 111$. С другой стороны, заметим, что $F(4t+2, 2k) = F(2t, k-1) + F(2t+2, k-1) + 2$, а значит, если мы будем делить наши нули, единицы и двойки так, что на каждом ходу суммы слева и справа отличаются не более чем на 2, то сумма чисел в тетради Тимофея будет в точности равна $F(111 + 2 \cdot 358, 11) - 111$. Но так делить на каждом ходу возможно, а значит ответ равен $F(111 + 2 \cdot 358, 11) - 111 = F(827, 11) - 111 = 1359 - 111 = 1248$. $\square$

Задача 9 (Алиса и Боб). Алиса и Боб находятся в разных городах и играют в следующую игру. Они получают два битовых числа длины n : Алисе сообщается число x , а Бобу — число y . В их распоряжении есть устройство связи, которое позволяет передавать друг другу битовые сообщения:

- за одно сообщение можно послать 0 или 1;
- сообщения отправляются последовательно;
- разрешено несколько раз подряд отправить сообщение в одну сторону.

Алиса и Боб могут заранее договориться, какие сообщения они будут посылать и как определяют их очередность. Как им нужно действовать, чтобы в результате оба игрока узнали значение $\text{MAX}(x, y)$ за $n + \mathcal{O}(\log n)$ сообщений?

Доказательство. Подготовка:

- Зафиксируем основанием всех функций $\log$ в этом решении число 2.
- Если n — не степень 2, округлим $\log n$ вверх. Все утверждения останутся верными.

Алиса и Боб должны разделить свои строки x и y на $\frac{n}{\log n}$ блоков по $\log n$ бит, обозначим блоки за $x_1, \dots, x_{n/\log n}$ и $y_1, \dots, y_{n/\log n}$. Заметим, что последовательностей из $\log n$ бит всего n . Значит, какой-то последовательности нет в качестве блока в строке Алисы, она фиксирует любую такую последовательность a . Боб поступает аналогично и фиксирует последовательность b . Пер-

вым шагом Алиса и Боб обмениваются блоками a и b , тратя на это $2 \log n$ сообщений.

Теперь Алиса отправляет Бобу свои нечётные блоки $x_1, x_3 \dots$, Боб — чётные $y_2, y_4, \dots$. Когда один из игроков замечает, что очередной блок у них не совпадает, он отправляет на следующем шаге фиксированный блок (a или b), которого нет в его строке. Другой игрок поймет, что пора остановиться. И затем игроки решат, у кого строка больше, и один из игроков доотправит до конца всю свою строку. $\square$