Math Cup 2026

Финал. Условия

Задача 1 (Произведение)**.** Вычислите

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{\frac{n^2+k^2}{n^2}}.$$

Задача 2 (Матрицы)**.** Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $A, B\colon V \to V$ — линейные операторы, для которых выполнено

$$A^2 = 0, \quad B^2 = 0, \quad ABA = A, \quad BAB = B.$$

Пусть $T = AB - BA$. Докажите, что $V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$.

Задача 3 (Многочлен)**.** Пусть $P(x)$ — такой многочлен с вещественными коэффициентами, что $2P(m) - P(m+1)$ является целым числом для любого $m \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $P(m) \in \mathbb{Z}$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Задача 4 (Блуждание по плоскости)**.** Фишка стоит на бесконечной клетчатой плоскости в клетке $(1, 0)$ и начинает движение по следующим правилам:

- за ход выбирается одна из двух координат x, y с вероятностью $\frac{1}{2}$;
- если выбранная координата не равна нулю, то она с вероятностью $\frac{2}{3}$ изменяется на 1 в сторону нуля, а с вероятностью $\frac{1}{3}$ — на 1 от нуля;
- если выбранная координата равна нулю, то она становится равной 1 или -1 с равными вероятностями.

Найдите математическое ожидание числа ходов до первого попадания в $(0, 0)$.

Задача 5 (Клетки)**.** Назовём множество клеток M квадрата $n \times n$ *допустимым*, если:

- никакие две клетки из M не смежны по ребру;
- после удаления всех клеток M каждая оставшаяся клетка имеет хотя бы одного соседа по ребру среди оставшихся клеток.

Пусть X_n — максимальный размер допустимого множества в квадрате $n \times n$. Найдите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n^2}.$$

Задача 6 (Гамильтонов граф)**.** В простом графе G на n вершинах есть гамильтонов путь. Придумайте алгоритм, который находит в G простой путь длины

a) $\Omega(\log n)$ за полиномиальное от n время;

b) $\omega(\log n)$ за *в среднем* полиномиальное от n время.

Пояснение. Для функций $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \exists c > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N : f(n) \geqslant cg(n);$$
$$f(n) \in \omega(g(n)) \iff \forall C > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N : f(n) > Cg(n).$$

Задача 7 (Касательные)**.** Существует ли такая непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемая на a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $\mathbb{R}$ любая касательная к графику f в отрицательной точке пересекает график в *конечном* числе точек; любая касательная к графику f в положительной точке пересекает график в *счётном бесконечном* числе точек?

Задача 8 (Строки)**.** Назовем *связанными* два множества A, B строк длины n, если для любой пары строк $a \in A$ и $b \in B$ никакой префикс строки a не является суффиксом строки b. Положим $f(n) = \max\limits_{A,B}\Big[\min(|A|, |B|)\Big]$ среди всех связанных A, B для данного n. Докажите, что

a) $\frac{f(n)}{2^n} \geqslant \frac{1}{1000\sqrt{n}}$

b) $\frac{f(n)}{2^n} \leqslant \frac{1000}{\sqrt{n}}$

Задача 9 (Геометрия)**.** Пусть попарно не пересекающиеся окружности $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ касаются окружности ω внешним образом в точках A, B, C соответственно.

Пусть существует окружность Ω_A, содержащая внутри себя ω, ω_B и ω_C и касающаяся каждой из них, причём касание с ω происходит в точке A. Аналогично существуют Ω_B, Ω_C.

Пусть X_A — точка пересечения Ω_B и Ω_C, лежащая во внутренности Ω_A, аналогично определим X_B, X_C.

Докажите, что прямые AX_A, BX_B, CX_C пересекаются в одной точке.