CS Space
Клуб технологий и науки

Math Cup 2026

Финал. Решения

Задача 1 (Произведение)**.** Вычислите

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\sqrt[n]{\frac{n^2+k^2}{n^2}}.$$

Ответ: $2\,e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Обозначим искомый предел за L. Прологарифмировав произведение, получаем риманову сумму:

$$\ln L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right)=\int\limits_0^1\ln(1+x^2)\,dx.$$

Решение 1. Интегрируем по частям:

$$\int\limits_0^1\ln(1+x^2)\,dx=\left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1-2\int\limits_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\ln 2-2\int\limits_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$$

Так как $\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$, имеем $\int\limits_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\left[x-\arctan x\right]_0^1=1-\frac{\pi}{4}$, поэтому

$$\ln L=\ln 2-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\ln 2+\frac{\pi}{2}-2.$$

Решение 2. При $|x|\leqslant 1$ равномерно сходится разложение $\ln(1+x^2)=\sum\limits_{m\geqslant 1}(-1)^{m-1}\frac{x^{2m}}{m}$, поэтому его можно интегрировать почленно:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1\ln(1+x^2)dx&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m(2m+1)}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}-2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2m+1}=\ln 2+2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Решение 3. Введём параметр: пусть $I(a)=\int\limits_0^1\ln(1+ax^2)\,dx$, тогда $I(0)=0$, а нужное значение равно $I(1)$. Дифференцируя,

$$I'(a)=\int\limits_0^1\frac{x^2}{1+ax^2}\,dx=\frac{1}{a}-\frac{\arctan\sqrt{a}}{a\sqrt{a}}.$$

Интегрируя по a от 0 до 1, получаем то же значение $\ln 2+\frac{\pi}{2}-2$.

Задача 2 (Матрицы)**.** Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $A, B\colon V \to V$ — линейные операторы, для которых выполнено

$$A^2 = 0, \quad B^2 = 0, \quad ABA = A, \quad BAB = B.$$

Пусть $T = AB - BA$. Докажите, что $V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$.

$$T^2 = (AB - BA)^2 = ABAB - AB \cdot BA - BA \cdot AB + BABA = AB + BA,$$
$$T^3 = (AB - BA)(AB + BA) = ABAB - BABA = AB - BA = T.$$

Решение 1. Для любого $x \in V$ запишем

$$x = (x - T^2x) + T^2x.$$

Тогда

$$T(x - T^2x) = Tx - T^3x = 0, \qquad T^2x = T(Tx) \in \operatorname{Im} T.$$

Значит, $x - T^2x \in \ker T$, откуда $V = \ker T + \operatorname{Im} T$.

Осталось проверить, что сумма прямая. Для этого достаточно показать пустоту пересечения подпространств. Пусть $z \in \ker T \cap \operatorname{Im} T$. Тогда $z = Ty$ и $Tz = 0$, поэтому $T^2y = 0$. Следовательно,

$$z = Ty = T^3y = T(T^2y) = 0.$$

Решение 2. Из $T^3 = T$ имеем $T^3 - T = T(T - I)(T + I) = 0$. Поэтому минимальный многочлен T делит $t(t-1)(t+1)$, а значит, не имеет кратных корней. Следовательно, T диагонализуем и

$$V = \ker T \oplus \ker(T - I) \oplus \ker(T + I).$$

Докажем, что $\operatorname{Im} T = \ker(T - I) \oplus \ker(T + I)$ из чего будет следовать требуемое.

1. $\ker(T - I) \oplus \ker(T + I) \subseteq \operatorname{Im} T$.
   Если $Tv = \lambda v$, где $\lambda = \pm 1$, то $v = \lambda T v \in \operatorname{Im} T$.
2. $\ker(T - I) \oplus \ker(T + I) \supseteq \operatorname{Im} T$.
   Если $x = x_0 + x_+ + x_-$, где $x_0 \in \ker T$, $x_+ \in \ker(T - I)$, $x_- \in \ker(T + I)$, то

$$Tx = x_+ - x_- \in \ker(T - I) \oplus \ker(T + I).$$

Задача 3 (Многочлен)**.** Пусть $P(x)$ — такой многочлен с вещественными коэффициентами, что $2P(m) - P(m+1)$ является целым числом для любого $m \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $P(m) \in \mathbb{Z}$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Обозначим $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$. Условие переписывается как

$$Q(x) := 2P(x) - P(x+1) = P(x) - \Delta P(x),$$

причём $Q(m) \in \mathbb{Z}$ для всех $m \in \mathbb{Z}$.

Решение 1. Пусть $\deg P = n$, тогда $\Delta^{n+1} P \equiv 0$. Применяя оператор Δ^k к тождеству $Q = P - \Delta P$, получаем $\Delta^k Q = \Delta^k P - \Delta^{k+1} P$ при каждом $k \geqslant 0$. Складывая эти равенства для $k = 0, 1, \ldots, n$, телескопическая сумма даёт

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta^k Q = P - \Delta^{n+1} P = P.$$

Поскольку $Q(m) \in \mathbb{Z}$, целыми будут и все его конечные разности $\Delta^k Q(m)$, а значит $P(m)$ — сумма целых чисел, то есть $P(m) \in \mathbb{Z}$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Решение 2. Индукция по $n = \deg P$.

При $n = 0$ многочлен $P \equiv c$ и $c = Q(0) \in \mathbb{Z}$.

Пусть $n \geqslant 1$ и утверждение верно для меньших степеней. Применяя Δ к $Q = P - \Delta P$, видим, что ΔQ — результат той же операции $R \mapsto R - \Delta R$, применённой к ΔP. При этом $\Delta Q(m) \in \mathbb{Z}$ и $\deg \Delta P = n - 1$, поэтому по предположению индукции $\Delta P(m) \in \mathbb{Z}$ для всех m, и тогда $P(m) = Q(m) + \Delta P(m) \in \mathbb{Z}$.

Решение 3. Запишем P в биномиальном базисе $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k \binom{x}{k}, \qquad d = \deg P.$$

Из $\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}$ следует $2\binom{x}{k} - \binom{x+1}{k} = \binom{x}{k} - \binom{x}{k-1}$, поэтому (при $a_{d+1} := 0$)

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{d} (a_k - a_{k+1}) \binom{x}{k}.$$

Многочлен принимает целые значения во всех целых точках в точности тогда, когда все его коэффициенты в этом базисе целые. Применяя это к Q, получаем $a_k - a_{k+1} \in \mathbb{Z}$; по нисходящей индукции $a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$, значит и $P(m) \in \mathbb{Z}$ для всех $m \in \mathbb{Z}$.

Задача 4 (Блуждание по плоскости)**.** Фишка стоит на бесконечной клетчатой плоскости в клетке $(1,0)$ и начинает движение по следующим правилам:

- за ход выбирается одна из двух координат x, y с вероятностью $\frac{1}{2}$;
- если выбранная координата не равна нулю, то она с вероятностью $\frac{2}{3}$ изменяется на 1 в сторону нуля, а с вероятностью $\frac{1}{3}$ — на 1 от нуля;
- если выбранная координата равна нулю, то она становится равной 1 или -1 с равными вероятностями.

Найдите математическое ожидание числа ходов до первого попадания в $(0,0)$.

Ответ: $E = 15$.

Решение. Рассмотрим цепь $Z_n = (|X_n|, |Y_n|)$. Искомое матожидание равно времени первого попадания Z_n в $(0,0)$.

Для одной координаты имеем марковскую цепь Q:

$$0 \to 1, \qquad k \to k-1 \text{ с вероятностью } \frac{2}{3}, \qquad k \to k+1 \text{ с вероятностью } \frac{1}{3}.$$

Её стационарное распределение π можно найти из уравнений:

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{2}{3}\pi_1, \\ \frac{1}{3}\pi_k = \frac{2}{3}\pi_{k+1}, k \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \pi_1 = \frac{3}{2}\pi_0, \\ \pi_{k+1} = \frac{1}{2}\pi_k, k \geqslant 1 \end{cases} \implies \pi_k = \frac{3}{2}\pi_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}, k \geqslant 1.$$

Сумма всех вероятностей должна быть равна единице. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \pi_0 + \frac{3}{2}\pi_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 4\pi_0 = 1 \implies \pi_0 = \frac{1}{4}.$$

Двумерная цепь обновляет за ход одну из координат, поэтому её стационарное распределение равно произведению $\Pi_{i,j} = \pi_i \pi_j$. В частности, $\Pi_{0,0} = \pi_0^2 = \frac{1}{16}$. По лемме Каца среднее время возвращения в $(0,0)$, если стартовать из $(0,0)$, равно $\frac{1}{\Pi_{0,0}} = 16$.

После первого хода из $(0,0)$ цепь попадает в $(1,0)$ или $(0,1)$; по симметрии ожидания из них равны. Если искомое ожидание равно E, то $16 = 1 + E$, откуда $E = 15$.

Задача 5 (Клетки)**.** Назовём множество клеток M квадрата $n \times n$ *допустимым*, если:

- никакие две клетки из M не смежны по ребру;
- после удаления всех клеток M каждая оставшаяся клетка имеет хотя бы одного соседа по ребру среди оставшихся клеток.

Пусть X_n — максимальный размер допустимого множества в квадрате $n \times n$. Найдите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n^2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{n^2} = \dfrac{3}{8}$.

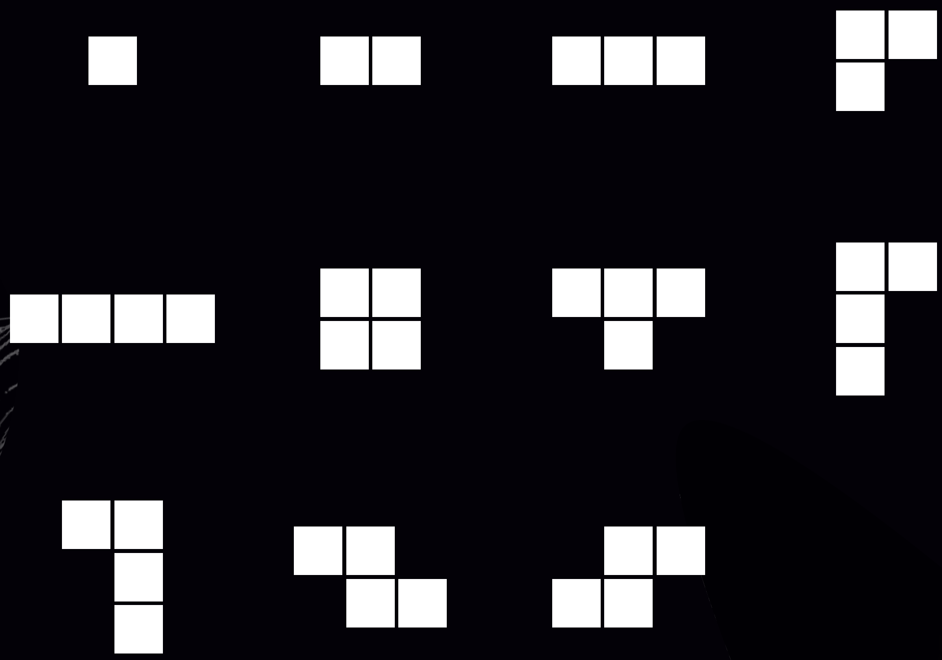
Решение. Оценка:

Пусть M — допустимое множество, а $R = V \setminus M$ — множество оставшихся клеток (здесь V — множество всех клеток квадрата $n \times n$). Условия задачи означают, что:

- M независимо: никакие две клетки из M не смежны по ребру;
- каждая клетка из R имеет хотя бы одного соседа по ребру в R, то есть R не содержит изолированных клеток.

Покажем, что каждая связная компонента R, не касающаяся границы квадрата, содержит не менее 5 клеток. Предположим, что некоторая связная компонента $C \subseteq R$ не касается границы и содержит не более 4 клеток. Рассмотрим все (с точностью до поворота и симметрии) связные фигуры, состоящие из 1, 2, 3 или 4 клеток:

- 1 **клетка.** Единственная клетка компоненты не имеет соседей в R, что противоречит второму условию.
- 2**,** 3 **или** 4 **клетки.** У любой такой фигуры, не касающейся границы, найдётся сторона длины 2 на её границе — то есть два соседних ребра, смежных с двумя различными клетками из M. Но тогда эти две клетки из M смежны друг с другом, что противоречит независимости M.



Таким образом, ни одна из связных фигур из не более чем 4 клеток не может быть компонентой R, не касающейся границы.

Рассмотрим граф соседств в решётке $n \times n$, в нем $2n(n-1) = 2n^2 + o(n^2)$ рёбер, и все дальнейшие рассуждения будут с точностью до $o(n^2)$, что при делении на n^2 в пределе даст нулевой вклад.

Пусть $\alpha = \frac{|M|}{n^2}$. Каждая клетка из M имеет ровно 4 соседей, и все они лежат в R; кроме того, различные клетки из M не имеют общих соседей (так как M независимо). Следовательно, число рёбер между M и R равно в точности $4\alpha n^2$.

С другой стороны, каждая связная компонента R из $k \geqslant 5$ клеток содержит не менее $k-1$ рёбер (как связный граф). Отношение числа рёбер к числу клеток в такой компоненте не менее $\frac{k-1}{k} \geqslant \frac{4}{5}$, откуда суммарное число рёбер внутри R не меньше $\frac{4}{5}(1-\alpha)n^2$.

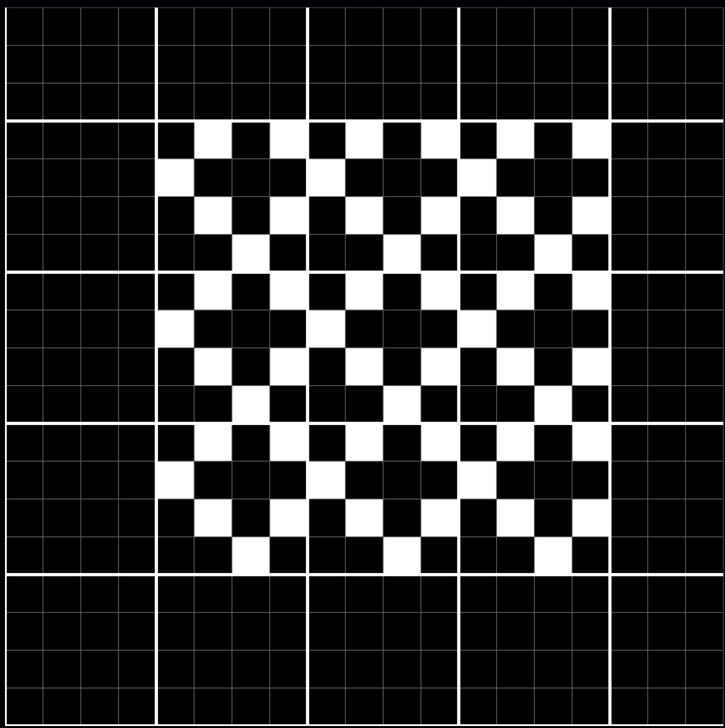
Рёбра между M и R и рёбра внутри R попарно не пересекаются, и все они являются рёбрами решётки, поэтому

$$4\alpha n^2 + \frac{4}{5}(1-\alpha)n^2 \leqslant 2n^2 + o(n^2).$$

Раскрывая скобки и упрощая, получаем $\alpha \leqslant \dfrac{3}{8} + o(1)$. То есть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{n^2} \leqslant \dfrac{3}{8}$.

Пример:

Разобьём квадрат на области вертикальными и горизонтальными линиями с шагом 4. Получатся квадраты 4×4 (у границы могут получиться прямоугольники меньшего размера). Все внутренние области, не касающиеся границы, обязательно являются квадратами 4×4. В каждую из них отметим по 6 клеток, как на картинке. Поскольку объединение внутренних квадратов занимает $n^2 - o(n^2)$ клеток, а в каждом из них отмечена доля $\frac{3}{8}$ клеток, всего отмечена доля $\frac{3}{8} - o(1)$. То есть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{X_n}{n^2} \geqslant \frac{3}{8}$.



Задача 6 (Гамильтонов граф)**.** В простом графе G на n вершинах есть гамильтонов путь. Придумайте алгоритм, который находит в G простой путь длины

a) $\Omega(\log n)$ за полиномиальное от n время;

b) $\omega(\log n)$ за *в среднем* полиномиальное от n время.

Пояснение. Для функций $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \exists c > 0\, \exists N\, \forall n \geqslant N : f(n) \geqslant cg(n);$$
$$f(n) \in \omega(g(n)) \iff \forall C > 0\, \exists N\, \forall n \geqslant N : f(n) > Cg(n).$$

Длиной пути считаем число рёбер. Поскольку в G есть гамильтонов путь, граф связен.

Пункт a).

Решение 1. Запустим обход в глубину и построим DFS-дерево T. У него нет поперечных рёбер: каждое ребро графа соединяет вершину с её предком или потомком; в частности, между поддеревьями разных детей одной вершины рёбер графа нет.

Пронумеруем слои - корень обзовем первым слоем. Детей корня - вторым. Детей детей корня - третьим и так далее. Пусть на k-ом слое оказалось a_k вершин. Обозначим за $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$. Покажем, что $a_{k+1} \leqslant A_k$

Посмотрим только на ребра, по которым проходит гамильтонов путь. Скажем, что $S_1, S_2, \dots, S_m$ - поддеревья вершин на $k+1$-ом слое. Заметим, что из каждого поддрева должно идти ребро вверх. Причем в каждую вершинку на k-ом слое и выше приходит не более 2х ребер снизу. Тогда поддеревьев не больше $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, а поддеревьев в точности A_k

Тогда на очередном слое не больше, чем 2^{k-1} вершин. Откуда глубина дерева хотя бы $\log_2 n$

Решение 2. Отметим, что у задачи "найти путь длины $k = \lceil \log_2 n \rceil$ или сказать, что его не существует" существуют полиномиальные решения, не зависящие от существования гамильтонова пути. Они существуют и детерминированные, но мы расскажем простой вероятностный алгоритм. Этот алгоритм формально не является решением пункта a), потому что дает необходимую асимптотику лишь в матожидании. Тем не менее он нам пригодится в пункте b).

Покрасим вершины графа в k цветов случайно. Рассмотрим произвольный путь длины k. С вероятностью $\frac{k!}{k^k} = e^{k(1+o(1))}$ все вершины этого пути окажутся разноцветными.

Теперь рассмотрим простой алгоритм динамического программирования, находящий все разноцветные пути за асимптотику $O(n^3 2^k)$. Для каждой пары вершин и подмножества уже посещенных цветов мы запоминаем, существует ли разноцветный путь, проходящий по данному подмножеству цветов с заданным началом и концом. Переходы – просто пытаемся продолжить путь по ребру. Отметим, что простота этого пути будет получена автоматически - иначе цвета каких-то двух вершин совпадут.

Повторив это $e^{k(1+o(1))}$ раз, получим алгоритм, который с константной вероятностью находит путь длины k, если таковой существует – а время работы $O(n^2 k^{2e}) = O(n^{2e+2})$.

Пункт b).

Решение. Зафиксируем $k = \log_2 n$.

Для графа G обозначим через $P(G, v)$ длиннейший путь из вершины v в графе G. Если таковых несколько, берем любой.

Лемма 1 (Цикл)**.** Существует полиномиальный алгоритм, который ищет цикл через заданную вершину v длины не менее k.

Доказательство леммы.

Граф можно считать вершинно двусвязным, иначе достаточно решить задачу в каждом блоке графа. Посчитаем расстояния от всех вершин до v.

Если есть вершина на расстоянии более k, нам достаточно взять 2 непересекающихся пути в нее (по теореме Менгера для двусвязного графа есть 2 непересекающихся пути до заданной вершины).

В противном случае найдем цикл через вершину v длины от k до $2k+3$ – описанным в предыдущем пункте методом случайной раскраски (на графе G/v, с началом и концом в паре соседей v). Если такового цикла не существует, то вообще никакого цикла длины не менее k не существует: пусть не так, и есть некий цикл длины хотя бы $2k + 4$. Возьмем кратчайший из таких.

В нем есть вершина u такая, что расстояние от нее до v по циклу более k. Но расстояние uv не более k, и с помощью кратчайшего пути uv мы можем найти более короткий цикл такой, что его длина все еще не менее k.

Алгоритм на вход он принимает граф G, вершину v и натуральное число len. Алгоритм возвращает либо путь длины не менее len с началом в v, либо неудачу. Алгоритм обладает свойством $(*)$:

$(*)$ *Если* $P(G, v) \geqslant k^{10+\frac{4len}{k}}$, *то алгоритм вернет путь.*

При вызове алгоритма для (G, v, len) рассматриваем три случая.

Случай 1: вершина v является точкой сочленения. Пусть при удалении v граф G распадается на компоненты связности $S_1, S_2, \dots, S_m$. Запустим алгоритм для каждой получающейся компоненты $(G[S_j \cup v],\ v,\ len)$ и вернём первый найденный путь. Так как любой путь из v целиком лежит в одном из подграфов $G[S_j \cup v]$, то $\max_j P(G[S_j \cup v], v) = P(G, v)$, и свойство $(*)$ будет выполненно для одного из подграфов.

Случай 2: граф $G \setminus v$ связен, и через v проходит цикл длины не менее k.

Применим лемму о цикле и найдём цикл C содержащий v длины $\geqslant k$. Если $|C| \geqslant len$, то уже есть путь нужной длины.

Иначе $k \leqslant |C| < len$. Пусть $G_u = (G \setminus C) \cup u$ для $u \in C \setminus v$. Запустим алгоритм для всех u $(G_u, u, len - \frac{|C|}{2})$.

Проверим свойство $(*)$. Покажем, что найдётся $u \in C \setminus v$, для которой $P(G_u, u) \geqslant k^{10+\frac{4(len-|C|/2)}{k}}$.

Если $P(G, v)$ проходит через хотя бы одну вершину C, то вершины C разбивают его на не более $|C| + 1$ подпутей, и для один из них имеет длину не менее $\dfrac{P(G,\, v)}{|C|+1}$ и целиком лежит в G_u.

Если же $P(G, v)$ не пересекает C, то, так как $G \setminus v$ связен, существует путь из любой u до $P(G, v)$, не проходящий через v. Возьмем крайнюю вершину на этом пути лежащую в C и продолжим путь из неё до $P(G, v)$ вдоль большей половины $P(G, v)$, получаем путь из u в G_u длины не менее $\dfrac{P(G,\, v)}{2} \geqslant \dfrac{P(G,\, v)}{|C|+1}$.

В обоих случаях осталось проверить

$$\frac{P(G,\, v)}{|C|+1} \geqslant k^{10+\frac{4(len-|C|/2)}{k}},$$

что при $P(G, v) \geqslant k^{10+\frac{4len}{k}}$ равносильно $k^{\frac{2|C|}{k}} \geqslant |C| + 1$. Поскольку $|C| \geqslant k$, левая часть не менее k^2, а правая $|C| + 1 < len \leqslant k^2$.

Случай 3: граф $G \setminus v$ связен, и цикла длины не менее k через v не существует. Возьмём произвольного соседа u вершины v и запустим алгоритм для $(G \setminus v,\ u,\ len - 1)$. Если свойство выполнено - то мы найдем путь и продолжим его v.

Проверим свойство $(*)$.

Возьмём кратчайший путь из u до $P(G, v)$ в графе $G \setminus v$, пусть он заканчивается в вершине $t \in P(G, v)$. Так как цикла длины $\geqslant k$ через v нет, расстояние от v до t вдоль $P(G, v)$ менее k — иначе путь от v до t по $P(G, v)$, затем от t до u и ребро uv давали бы такой цикл. Значит, суффикс $P(G, v)$ начиная с t имеет длину не менее $P(G, v) - k$, и приписав к нему путь от u до t, получаем путь из u в $G \setminus v$ длины не менее $P(G, v) - k$, то есть $P(G \setminus v, u) \geqslant P(G, v) - k$.

$$P(G \setminus v, u) \geqslant P(G, v) - k \geqslant k^{10+\frac{4len}{k}} - k \geqslant k^{10+\frac{4(len-1)}{k}},$$

Для решения задачи вызовем этот алгоритм для данного графа G, произвольной вершины v и $len = \frac{k^2}{100 \log_2 k}$. Существует путь длины хотя бы $\frac{n}{2}$ с началом в v – это большая часть гамильтонова пути. Значит по свойству алгоритма он выдаст путь длины хотя бы len – то есть сублогарифмической.

Каждый вызов рекурсии (поиск цикла и проверки связности) происходит за полиномиальное время. Оценим число вызовов:

Обозначим через $R(s, \ell)$ число рекурсивных вызовов из состояния (G, v, ℓ) при $|V(G)| = s$. Докажем индукцией по $s + \ell$, что

$$R(s,\, \ell) \;\leqslant\; 2s^2(\ell+1)^{\lceil 2\ell/k \rceil}.$$

Случай 1. Пусть компоненты $G \setminus v$ имеют размеры $s_1, \ldots, s_t$, $\sum s_i = s - 1$. Тогда

$$\sum_i R(s_i+1,\, \ell) \;\leqslant\; 2(\ell+1)^{\lceil 2\ell/k \rceil} \sum_i (s_i+1)^2 \;\leqslant\; 2s^2(\ell+1)^{\lceil 2\ell/k \rceil},$$

Случай 2. Цикл C имеет длину $c \geqslant k$; если $c \geqslant len$ — рекурсии нет. Иначе делаем не более c вызовов с параметром $\ell' = \ell - c/2$. Так как $c \geqslant k$, имеем $\lceil 2\ell'/k \rceil \leqslant \lceil 2\ell/k \rceil - 1$, откуда

$$c \cdot 2s^2(\ell'+1)^{\lceil 2\ell'/k \rceil} \;\leqslant\; c \cdot 2s^2(\ell+1)^{\lceil 2\ell/k \rceil - 1} \;\leqslant\; 2s^2(\ell+1)^{\lceil 2\ell/k \rceil}.$$

Случай 3. Один вызов с параметрами $(s-1, \ell-1)$, и $R(s-1,\, \ell-1) \leqslant 2(s-1)^2\, \ell^{\lceil 2(\ell-1)/k \rceil} \leqslant 2s^2(\ell+1)^{\lceil 2\ell/k \rceil}$.

Для начального $\ell = \frac{k^2}{100 \log k}$ получаем

$$\begin{aligned} (\ell+1)^{\lceil 2\ell/k \rceil} \;&\leqslant\; \left(\frac{k^2}{100 \log k}\right)^{O(k/\log k)} \\ &= \exp\!\left(O\!\left(\frac{k}{\log k}\right) \cdot O(\log k)\right) \\ &= e^{O(k)}. \end{aligned}$$

что при $k = \Theta(\log n)$ даёт полином от n.

Задача 7 (Касательные)**.** Существует ли такая непрерывная функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемая на a) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ b) $\mathbb{R}$ любая касательная к графику f в отрицательной точке пересекает график в *конечном* числе точек; любая касательная к графику f в положительной точке пересекает график в *счётном бесконечном* числе точек?

Решение. Построим пример для пункта b). Пусть

$$f(x)=\int\limits_0^x g(t)\,dt.$$

При $x\leqslant 0$ положим $g(x)=2x$.

Для $n\geqslant 2$ положим

$$a_n=1-2^{-n},\qquad b_n=2^{-n},$$
$$A_n=2^{2^{2n}},\qquad B_n=2^{2^{2n+1}}.$$

Положим $x_2=1$. Если x_n уже задано, то зададим следующий блок точек таблицей:

t	x_n	x_n+A_n	$y_n:=x_n+A_n+1$	y_n+B_n	$x_{n+1}:=y_n+B_n+1$
$g(t)$	a_n	a_{n+1}	b_n	b_{n+1}	a_{n+1}

На $[0,\infty)$ зададим g линейной интерполяцией по указанным точкам и значению

$$g(0)=0.$$

Тогда g непрерывна, кусочно линейна, не постоянна ни на одном интервале линейности, $g(0)=0$ и $0<g(x)<1$ при $x>0$. Поэтому $f\in C^1(\mathbb{R})$.

Зафиксируем $c>0$ и положим $\lambda=g(c)$. Тогда $0<\lambda<1$. Точка $x\neq c$ лежит на касательной в точке c тогда и только тогда, когда

$$M_c(x):=\frac{1}{x-c}\int\limits_c^x g(t)\,dt=\lambda.$$

Покажем, что

$$M_c(x_n+A_n)\to 1,\qquad M_c(y_n+B_n)\to 0.$$

Из определения

$$x_n=1+\sum_{k=2}^{n-1}(A_k+B_k+2)\leqslant 2n\cdot B_{n-1}=o(A_n).$$

С какого-то момента $x_n>c$. Тогда

$$M_c(x_n+A_n)\geqslant\frac{A_n}{x_n+A_n-c}\cdot\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\to 1.$$

С другой стороны, так как $0 < g < 1$, имеем $M_c(x_n + A_n) < 1$. Значит,

$$M_c(x_n + A_n) \to 1.$$

Аналогично

$$M_c(y_n + B_n) \to 0.$$

По непрерывности на каждом $(x_n + A_n, y_n + B_n)$ есть решение $M_c(x) = \lambda$. Значит, положительная касательная имеет бесконечно много пересечений с графиком.

Этих пересечений не более счётного числа: на каждом интервале линейности g функция f квадратична с ненулевым квадратичным коэффициентом, поэтому прямая пересекает её не более чем в двух точках. Самих интервалов линейности счётно много, и концов у них тоже счётно много. Следовательно, пересечений ровно счётно много.

Теперь пусть $c < 0$. Слева график есть парабола x^2, поэтому касательная пересекает его только в точке касания $x = c$. Справа эта касательная отрицательна, а функция f положительна, так как $g(t) > 0$ при $t > 0$. Значит, справа пересечений нет.

Итак, при $c < 0$ пересечений конечное число, а при $c > 0$ – счётно бесконечное число. Пункт a) следует из пункта b).

Задача 8 (Строки)**.** Назовем *связанными* два множества A, B строк длины n, если для любой пары строк $a \in A$ и $b \in B$ никакой префикс строки a не является суффиксом строки b. Положим $f(n) = \max\limits_{A,B}\Big[\min(|A|, |B|)\Big]$ среди всех связанных A, B для данного n. Докажите, что

a) $\frac{f(n)}{2^n} \geqslant \frac{1}{1000\sqrt{n}}$

b) $\frac{f(n)}{2^n} \leqslant \frac{1000}{\sqrt{n}}$

Решение 1. Работаем со строками над алфавитом $\{0, 1\}$. Для строки s положим её *вес* $\sigma(s)$ равным числу единиц минус число нулей в s; эквивалентно, заменив каждый символ s_t на шаг $x_t = 2s_t - 1 \in \{+1, -1\}$, имеем $\sigma(s) = \sum_t x_t$, а частичная сумма $\sum_{t=1}^{k} x_t$ есть вес префикса длины k.

Удобна следующая переформулировка. Если префикс строки a длины k равен суффиксу строки b длины k, то это одна и та же строка u длины k. Поэтому A, B связаны тогда и только тогда, когда

> для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ ни одна строка не является одновременно префиксом длины k некоторой строки из A и суффиксом длины k некоторой строки из B.

Пункт a). Построим связанные A, B нужного размера. Положим

$$A = \Big\{a : \sum_{t=1}^{k}(2a_t - 1) \geqslant 1 \text{ для всех } 1 \leqslant k \leqslant n\Big\},$$

$$B = \Big\{b : \sum_{t=j+1}^{n}(2b_t - 1) \leqslant -1 \text{ для всех } 0 \leqslant j \leqslant n-1\Big\}.$$

Иначе говоря, у строки из A каждый непустой префикс имеет положительный вес, а у строки из B каждый непустой суффикс — отрицательный.

Связанность. Пусть для некоторых $a \in A$, $b \in B$ и $1 \leqslant k \leqslant n$ префикс $a[1..k]$ совпал с суффиксом $b[n-k+1..n]$; обозначим эту общую строку u. Как префикс строки a она имеет вес $\sigma(u) = \sum_{t=1}^{k}(2a_t - 1) \geqslant 1 > 0$, а как суффикс строки b — вес $\sigma(u) = \sum_{t=n-k+1}^{n}(2b_t - 1) \leqslant -1 < 0$. Противоречие, значит A, B связаны.

Размер. Подсчитаем $|A|$. Строка из A обязана начинаться с 1 (иначе $S_1 = -1$). Отбросив первый шаг $+1$ и понизив высоту на 1, получаем биекцию между A и путями из ± 1 длины $n-1$, не опускающимися ниже нуля. По классическому тождеству о неотрицательных путях их число равно $\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$. Отображение $b \mapsto c$, где $c_t = 1 - b_{n+1-t}$ (разворот с инверсией), — биекция $\{0,1\}^n$ на себя, переводящая условие на суффиксы b в точно такое же условие на префиксы c; поэтому $|B| = |A| = \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$.

Воспользуемся оценкой $\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor} \geqslant \dfrac{2^m}{2\sqrt{m}}$ для всех $m \geqslant 1$. Для чётного $m = 2k$ это $\binom{2k}{k} \geqslant 4^k/(2\sqrt{k})$: при $k = 1$ равенство, а шаг индукции следует из

$$\frac{\binom{2k+2}{k+1}}{\binom{2k}{k}} = \frac{2(2k+1)}{k+1} \geqslant 4\sqrt{\tfrac{k}{k+1}} \iff (2k+1)^2 \geqslant 4k(k+1),$$

что верно. Для нечётного $m = 2k+1$: $\binom{2k+1}{k} = \frac{1}{2}\binom{2k+2}{k+1} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{4^{k+1}}{2\sqrt{k+1}} = \frac{2^m}{\sqrt{2(m+1)}} \geqslant \frac{2^m}{2\sqrt{m}}$.

Следовательно при $n \geqslant 2$

$$\frac{f(n)}{2^n} \geqslant \frac{|A|}{2^n} \geqslant \frac{2^{n-1}}{2^n \cdot 2\sqrt{n-1}} = \frac{1}{4\sqrt{n-1}} \geqslant \frac{1}{4\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{1000\sqrt{n}}.$$

При $n = 1$ имеем $A = \{1\}$, $B = \{0\}$, $\min(|A|, |B|) = 1$, и неравенство очевидно. Пункт a) доказан (с большим запасом).

Пункт b). Пусть A, B связаны. Каждой паре $(a, b) \in A \times B$ сопоставим строку $w = ba$ длины $2n$; разным парам отвечают разные строки. Обозначим $V = \{ba :\ b \in B,\ a \in A\}$, так что $|V| = |A| \cdot |B|$.

Расположим строку длины $2n$ на окружности (индексы по модулю $2n$). *Допустимым разрезом* в позиции i назовём такой i, что строка $w[i..i+n-1]$ лежит в B, а дополнительная строка $w[i+n..i+2n-1]$ лежит в A.

Лемма. У любой циклической строки длины $2n$ не более одного допустимого разреза.

Доказательство. Пусть есть два разных допустимых разреза в позициях i и j. Из двух дуг окружности между ними одна имеет длину d с $1 \leqslant d \leqslant n$; переобозначив при необходимости $i \leftrightarrow j$, считаем, что от i к j ровно d шагов вперёд, $j = i + d$.

Возьмём строку $a := w[i+n..i+2n-1] \in A$ из разреза в i и строку $b' := w[j..j+n-1] \in B$ из разреза в j. Рассмотрим d позиций $i+n$, $i+n+1$, … , $i+n+d-1$. С одной стороны, они образуют начало блока строки a, то есть префикс $a[1..d]$. С другой стороны, при $1 \leqslant d \leqslant n$ блок $[\,i+d,\ i+d+n-1\,]$ строки b' содержит эти позиции своими последними d символами, то есть это суффикс $b'[n-d+1..n]$. Значит $a[1..d] = b'[n-d+1..n]$: префикс строки из A совпал с суффиксом строки из B (длины $d \in [1, n]$), что противоречит связанности. □

Из леммы следует, что для любой строки $w \in \{0,1\}^{2n}$ найдётся не более одного сдвига $t \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$, для которого циклический сдвиг $\rho^t w$ лежит в V (разные подходящие t давали бы разные допустимые разрезы у w).

Посчитаем двумя способами число пар (w, t), $w \in \{0,1\}^{2n}$, $t \in \{0, \dots, 2n-1\}$, с условием $\rho^t w \in V$. При фиксированном t отображение ρ^t биективно, поэтому таких w ровно $|V|$; сумма по всем $2n$ значениям t даёт $2n\,|V|$. С другой стороны, при фиксированном w подходящих t не больше одного, поэтому всё число не превосходит 2^{2n}. Значит

$$2n\,|A|\,|B| \;=\; 2n\,|V| \;\leqslant\; 2^{2n}, \qquad \text{откуда} \qquad |A|\,|B| \;\leqslant\; \frac{4^n}{2n}.$$

Поэтому

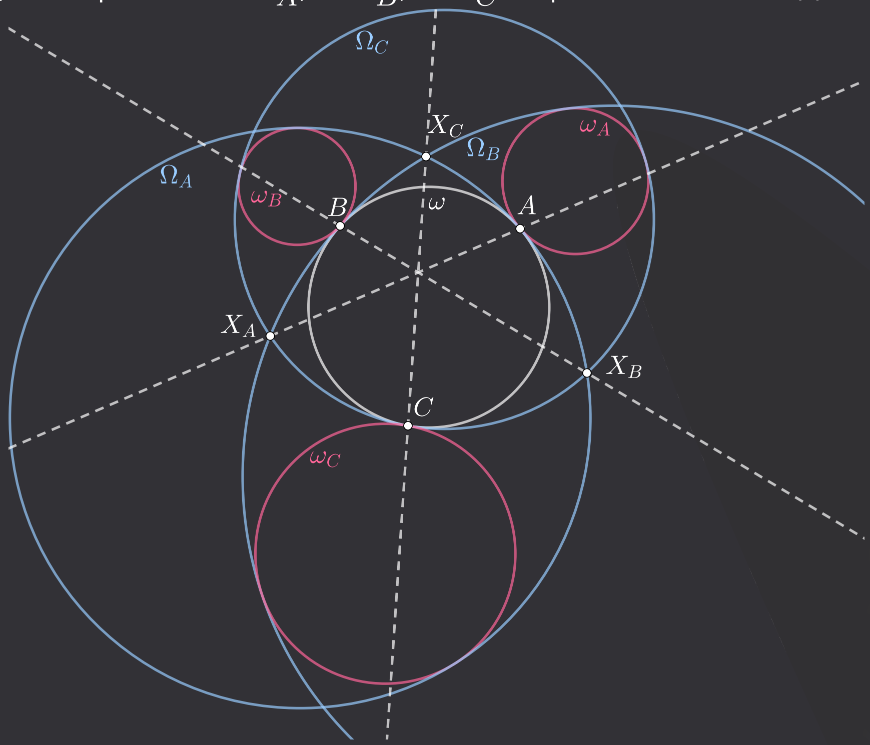
$$\frac{f(n)}{2^n} \;\leqslant\; \frac{\sqrt{|A|\,|B|}}{2^n} \;\leqslant\; \frac{1}{\sqrt{2n}} \;\leqslant\; \frac{1000}{\sqrt{n}}.$$

Пункт b) доказан.

Замечание. Доказанные оценки дают $\dfrac{1}{4\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{f(n)}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, то есть $f(n) = \Theta(2^n/\sqrt{n})$.

Точная оценка $\dfrac{1-o(1)}{\sqrt{en}} \leqslant \dfrac{f(n)}{2^n} \leqslant \dfrac{1+o(1)}{\sqrt{en}}$, доказательство этого сложнее. Заинтересованный читатель отсылается к https://arxiv.org/abs/2602.20143.

Задача 9 (Геометрия). Пусть попарно не пересекающиеся окружности $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ касаются окружности ω внешним образом в точках A, B, C соответственно.
Пусть существует окружность Ω_A, содержащая внутри себя ω, ω_B и ω_C и касающаяся каждой из них, причём касание с ω происходит в точке A. Аналогично существуют Ω_B, Ω_C.
Пусть X_A — точка пересечения Ω_B и Ω_C, лежащая во внутренности Ω_A, аналогично определим X_B, X_C.
Докажите, что прямые AX_A, BX_B, CX_C пересекаются в одной точке.



Решение 1. По теореме Дезарга прямые AX_A, BX_B, CX_C пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки

$$Y_A = BC \cap X_BX_C, \qquad Y_B = CA \cap X_CX_A, \qquad Y_C = AB \cap X_AX_B$$

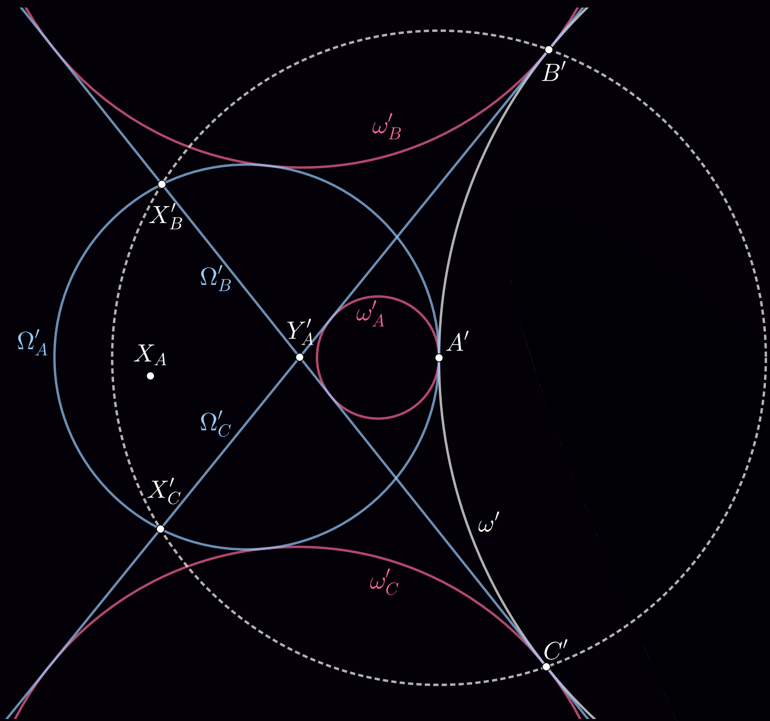
лежат на одной прямой. Докажем, что Y_C — центр гомотетии окружностей ω_A и ω_B (для Y_A, Y_B всё аналогично).

Окружность ω касается ω_A в точке A и ω_B в точке B, поэтому A и B — центры гомотетий пар (ω, ω_A) и (ω, ω_B). По теореме Монжа о трёх центрах гомотетии для тройки $\omega, \omega_A, \omega_B$ центр гомотетии пары (ω_A, ω_B) лежит на прямой AB; обозначим его Y_C.

Рассмотрим инверсию с центром Y_C, переводящую ω_A и ω_B друг в друга. Окружность ω при ней неподвижна (это единственная окружность, касающаяся ω_A и ω_B так же, как ω, а такое касание сохраняется). Окружности ω_C и Ω_C также неподвижны, ведь каждая из них однозначно задаётся тремя своими касаниями (с $\omega, \omega_A, \omega_B$), а этот набор условий инвариантен. Наконец, Ω_A (касается $\omega, \omega_B, \omega_C$) и Ω_B (касается $\omega, \omega_C, \omega_A$) меняются местами. Поскольку X_A, X_B — это пересечения $\Omega_B \cap \Omega_C$ и $\Omega_C \cap \Omega_A$ соответственно, при $\Omega_A \leftrightarrow \Omega_B$

и неподвижной Ω_C точки X_A и X_B переходят друг в друга, значит прямая X_AX_B проходит через центр инверсии Y_C.

Итак, $Y_C \in AB$ и $Y_C \in X_AX_B$, то есть $Y_C = AB \cap X_AX_B$ — центр гомотетии ω_A и ω_B; аналогично для Y_A и Y_B. По теореме Монжа три центра гомотетии окружностей $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ коллинеарны, поэтому по теореме Дезарга прямые AX_A, BX_B, CX_C пересекаются в одной точке.



Решение 2. Инверсия в X_A переводит Ω_B, Ω_C в прямые Ω'_B, Ω'_C, окружность ω — в окружность ω', касающуюся их в точках B' и C', а ω_A — в окружность ω'_A, касающуюся ω' внешним образом в A' и обеих прямых.

Пусть ℓ — ось симметрии угла между Ω'_B и Ω'_C, проходящая через центр ω'. Так как ω' и ω'_A обе вписаны в этот угол, они симметричны относительно ℓ, откуда $A' \in \ell$. Тогда Ω'_A(образ Ω_A после инверсии), касающаяся ω' в точке A', тоже симметрична относительно ℓ, а значит X'_B и X'_C (образы X_B, X_C при инверсии, где $X'_B = \Omega'_A \cap \Omega'_C$, $X'_C = \Omega'_A \cap \Omega'_B$) симметричны относительно ℓ.

Так как пары B', C' и $X_{B'}, X_{C'}$ симметричны относительно ℓ, четырёхугольник $B'C'X_{B'}X_{C'}$ является равнобедренной трапецией и, следовательно, вписанным; обратная инверсия переводит его в вписанный четырёхугольник B, C, X_B, X_C. Аналогично, A, C, X_A, X_C и A, B, X_A, X_B — тоже вписанные четырёхугольники.

Прямые AX_A, BX_B, CX_C — радикальные оси пар описанных окружностей, а значит, пересекаются в одной точке.