

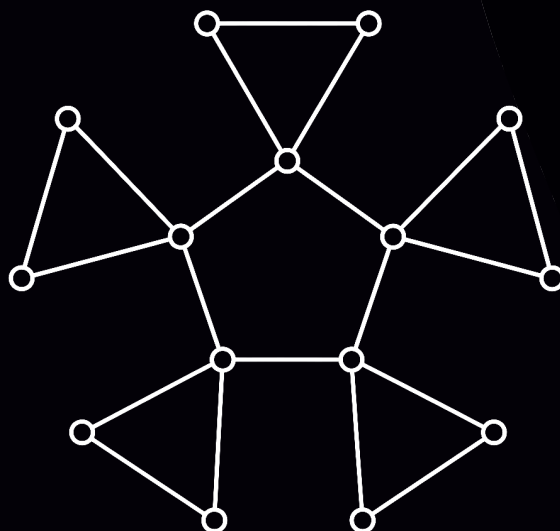
# Math Cup 2026

## Отборочный тур. Условия

**Задача 1** (Муравей в большом квадрате). Муравей вышел из центра квадрата, прошёл замкнутый, несамопересекающийся путь длины 1 и вернулся в исходную точку. При этом внутри пути оказалось не менее 99% площади квадрата.

Найдите максимально возможную длину стороны этого квадрата.

**Задача 2** (Ожерелье, плоскость, два гвоздя). Назовём ожерельем граф, построенный следующим образом: к каждой вершине цикла длины 5 присоединим треугольник, совпадающий ровно одной вершиной с вершиной исходного цикла. Будем считать, что вершины и рёбра ожерелья не пронумерованы.



Укладкой ожерелья назовём размещение графа на плоскости, при котором вершинам соответствуют точки, а рёбрам — простые дуги между ними, причём никакие два ребра не пересекаются и не касаются друг друга вне вершин.

Предположим, что в плоскость вбиты 2 гвоздя — две различные точки, которые не совпадают ни с одной вершиной укладки и не лежат на её рёбрах.

Для плоскости с двумя гвоздями найдите число упаковок ожерелья, которые нельзя перевести друг в друга, не поднимая с плоскости, не создавая самопересечений и не проводя ни одно ребро через гвоздь.

**Задача 3** (Гена, возьми определитель). Найдите сумму всех положительных значений  $a$ , при которых матрица

$$A = \left( \min(i, j) \cdot a^{|i-j|} \right)_{i,j=1}^{2026}$$

вырождена.

**Задача 4** (Честные выборы). Для каждого  $i = 1, \dots, n - 2$  Федя выбрал один из четырёх вариантов:

$$\emptyset, \{i\}, \{i + 1\}, \{i + 2\}.$$

После всех выборов Федя считает результат *хорошим*, если каждое число  $1, 2, \dots, n$  было выбрано чётное число раз. Пусть  $A_n$  — число хороших результатов. Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n}$ .

**Задача 5** (Прямоугольный бильярд). Дана разбитая на единичные клетки прямоугольная доска  $a \times b$ , где  $a$  и  $b$  взаимно просты. В  $n$  клетках стоят метки; множество клеток с метками выбирается случайно и равновероятно среди всех  $n$ -элементных подмножеств клеток доски.

Из левой нижней клетки начинает двигаться фишка. За один ход она переходит в соседнюю по диагонали клетку. Изначально она идёт вверх-вправо. Если фишка должна выйти за границу доски, она отражается от стороны, как бильярдный шар, и продолжает движение по диагонали. Например, у правой границы при попытке выйти направо она просто окажется на одну клетку выше.

Фишка останавливается, когда впервые попадает в клетку с меткой.

Найдите математическое ожидание числа посещённых клеток, включая последнюю.

**Задача 6** (Занятые интегралы). Дана  $f \in C[0, 1]$ , для которой

$$\int_0^1 f^2(x) dx = 1, \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 x f(x) dx = 0.$$

Найдите

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx.$$

**Задача 7** (Мумифицированный тетраэдр). Поверхность правильного тетраэдра с длиной ребра 239 требуется полностью покрыть прямоугольными полосками размера  $1 \times 23$ . Полоски можно накладывать друг на друга, сгибать вдоль рёбер тетраэдра и произвольно располагать на поверхности, однако резать или рвать их нельзя.

Найдите минимальное количество полосок, необходимое для покрытия всей поверхности тетраэдра.

**Задача 8** (Найдите общий язык). Даны две контекстно-свободные грамматики над алфавитом  $\{a, b\}$ .

Грамматика  $G_1$  с начальным символом  $S$ :

$$S \rightarrow \varepsilon$$

$$S \rightarrow aS$$

$$S \rightarrow aSbSaSaS$$

$$S \rightarrow aSaSbSaS$$

Грамматика  $G_2$  с начальным символом  $T$ :

$$T \rightarrow \varepsilon$$

$$T \rightarrow aTa$$

$$T \rightarrow bTbTbTbTb$$

Найдите количество слов длины 95, принадлежащих пересечению языков:

$$L(G_1) \cap L(G_2)$$