CS Space
Клуб технологий и науки

Math Cup 2026

Отборочный тур. Решения

Задача 1 (Муравей в большом квадрате)**.** Муравей вышел из центра квадрата, прошёл замкнутый, несамопересекающийся путь длины 1 и вернулся в исходную точку. При этом внутри пути оказалось не менее 99% площади квадрата.
Найдите максимально возможную длину стороны этого квадрата.

Ответ: $\dfrac{1}{5 - \frac{1}{10}\sqrt{6(4-\pi)}} \approx 0.209509462643093.$

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1 (масштаб)**.** Пусть L — инфимум длин замкнутых несамопересекающихся траекторий в единичном квадрате, проходящих через центр и содержащих внутри не менее 99% площади квадрата. Тогда точная верхняя грань возможных длин стороны исходного квадрата равна $\frac{1}{L}$.

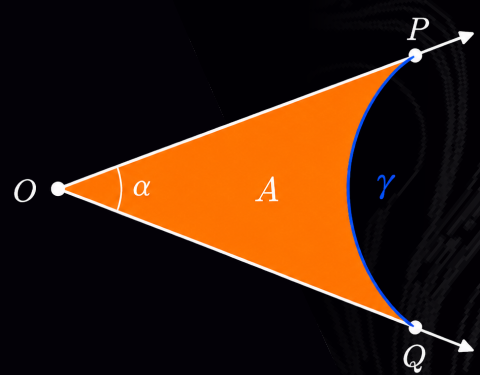
Обозначим $f(\alpha) = \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi-\alpha}{2}, \qquad 0 < \alpha < \pi.$.

Лемма 2 (угол)**.**

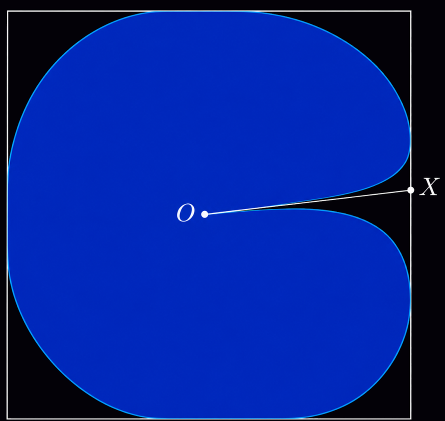
Рассмотрим угол POQ величины $0 < \alpha < \pi$. Пусть кривая γ соединяет стороны угла в точках P и Q и вместе с отрезками OP и OQ отсекает площадь A. Тогда

$$|OP| + |OQ| - \ell(\gamma) \leqslant 2\sqrt{A\cdot f(\alpha)}.$$

Равенство достигается для дуги окружности, касающейся обеих сторон угла.



Лемма 3 (разрез)**.**



При поиске инфимума L достаточно рассматривать предельные картины, в которых внешняя область содержит прямолинейный разрез OX из центра квадрата до его стороны. После разреза по OX траектория рассматривается как кривая внутри получившейся разрезанной области.

Лемма 4 (многоугольник)**.** Пусть M — многоугольная область, граница которой состоит из сторон суммарной длины P. Пусть все ее существенные углы равны $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, где $0 < \alpha_i < \pi$.

Пусть $D \subset M$ — область-воротник границы M: одна компонента ее границы совпадает с границей M, а другая компонента равна Γ. Предположим, что

$$S(D) \leqslant \varepsilon.$$

Тогда

$$\ell(\Gamma) \geqslant P - 2\sqrt{\varepsilon \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)}.$$

Более того, оценка точна в предельном смысле: равенство достигается, когда вся внешняя площадь сосредоточена в независимых круговых срезах углов.

Решение. Найдем L. Положим $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Пусть разрез идет из центра O в точку X на стороне квадрата. Обозначим через φ угол между OX и перпендикуляром к этой стороне. Можно считать, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$. Положим $t = \frac{1}{\cos\varphi}$.

Тогда $OX = \frac{t}{2}$, поэтому периметр разрезанного квадрата равен $4+t$. Его углы равны

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \varphi, \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Строго говоря, около конца разреза O усечем область маленьким отрезком длины ρ, перпендикулярным OX, а затем устремим ρ к нулю. При таком усечении периметр меняется на $o(1)$, а два добавленных угла стремятся к π. Так как $f(\pi) = 0$, их вклад в оценку стремится к нулю. Поэтому в пределе учитываются только шесть существенных углов, перечисленных выше.

По лемме о многоугольнике длина траектории не меньше

$$\begin{aligned}
&4 + t - 2\sqrt{\frac{1}{100}\left(4f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)} \\
&= 4 + t - \frac{1}{5}\sqrt{4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}} \\
&= 4 + t - \frac{1}{5}\sqrt{4 - \frac{3\pi}{2} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \\
&= 4 + t - \frac{1}{5}\sqrt{4 - \frac{3\pi}{2} + 2t}.
\end{aligned}$$

При $t \geqslant 1$ эта функция возрастает, значит, минимум достигается при $t = 1$. То есть оптимальный разрез идет из центра в середину стороны.

При $t = 1$ все шесть углов разрезанного квадрата равны $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$L = 5 - 2\sqrt{\frac{1}{100} \cdot 6\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)} = 5 - \frac{1}{10}\sqrt{6(4-\pi)}.$$

Эта величина достигается в предельной картине; обычными несамопересекающимися траекториями к ней можно подойти сколь угодно близко.

Доказательство леммы 1 (масштаб). При гомотетии с коэффициентом a все длины умножаются на a, а отношение площади внутри траектории к площади квадрата не меняется. Поэтому в квадрате со стороной a соответствующий инфимум длин равен aL.

Если существует траектория длины 1, то необходимо $aL \leqslant 1$, откуда $a \leqslant \frac{1}{L}$. Обратно, при любом $a < \frac{1}{L}$ по определению инфимума в единичном квадрате найдется допустимая траектория длины меньше $\frac{1}{a}$. После гомотетии с коэффициентом a ее длина станет меньше 1; добавив сколь угодно малую петлю около уже имеющейся траектории, получаем длину ровно 1, не уменьшая заключенную площадь.

Следовательно, точная верхняя грань возможных значений a равна $\frac{1}{L}$.

Доказательство леммы 2 (угол). Обозначим

$$d = |OP| + |OQ| - \ell(\gamma).$$

Если $d \leqslant 0$, то доказывать нечего. Далее считаем, что $d > 0$.

Вместо исходной задачи рассмотрим двойственную: при фиксированном d минимизируем отсеченную площадь A. Если мы докажем, что всегда

$$A \geqslant \frac{d^2}{4f(\alpha)},$$

то сразу получим

$$d \leqslant 2\sqrt{Af(\alpha)}.$$

Докажем, что минимум в двойственной задаче достигается на дуге окружности, касающейся обеих сторон угла. Зафиксируем сначала точки P, Q и длину $\ell(\gamma)$. Тогда минимизировать площадь, отсеченную вместе с отрезками OP и OQ, значит максимизировать площадь между γ и хордой PQ. По задаче Дидоны такая кривая является дугой окружности.

Осталось понять, как эта дуга окружности должна стоять относительно сторон угла. Рассмотрим минимум функционала

$$A + \lambda(\ell(\gamma) - |OP| - |OQ|),$$

где множитель λ отвечает за фиксированность d.

Подвинем точку P вдоль стороны угла на малую величину τ. В первом порядке площадь не меняется, так как точка движется по той же стороне угла. Если $\mathbf{e}_P$ — единичный вектор от O к P, а $\mathbf{T}_P$ — касательный вектор к дуге в точке P, направленный от P к Q, то

$$\delta\ell = -\tau\langle \mathbf{T}_P, \mathbf{e}_P\rangle, \qquad \delta|OP| = \tau.$$

Поэтому в минимуме

$$-\langle \mathbf{T}_P, \mathbf{e}_P\rangle - 1 = 0,$$

то есть

$$\langle \mathbf{T}_P, \mathbf{e}_P \rangle = -1.$$

Значит, дуга касается первой стороны угла. Аналогично в точке Q получаем касание второй стороны.

Итак, минимум площади при фиксированном d достигается для дуги окружности, касающейся обеих сторон угла. Если ее радиус равен r, то по определению функции f для нее выполнено

$$A = r^2 f(\alpha), \qquad d = 2rf(\alpha), \qquad \text{то есть} \qquad A = \frac{d^2}{4f(\alpha)}.$$

Следовательно, для любой допустимой кривой с тем же d имеем $A \geqslant \frac{d^2}{4f(\alpha)}$, откуда, так как $d > 0$,

$$d \leqslant 2\sqrt{Af(\alpha)}.$$

Возвращаясь к определению d, получаем требуемое неравенство. Равенство достигается для описанной дуги окружности.

Доказательство леммы 3 (разрез). Пусть γ — допустимая траектория, а D — часть квадрата, лежащая снаружи γ. Тогда

$$S(D) \leqslant \varepsilon = \frac{1}{100}.$$

Так как $O \in \gamma$, замыкание внешней области соединяет O с границей квадрата.

Будем работать с предельной минимизирующей картиной. Иными словами, разрешаем самокасания, возникающие как пределы несамопересекающихся траекторий. Среди всех предельных картин минимальной длины выберем такую, для которой кратчайшее соединение

$$\sigma \subset \overline{D}$$

точки O с границей квадрата имеет минимальную возможную длину.

Сначала напомним стандартное вариационное описание такой картины. Всякий свободный участок траектории является дугой окружности: иначе при фиксированной отсеченной площади его можно было бы заменить экстремалью меньшей длины. Если конец свободного участка может скользить по прямой стороне или по участку самокасания, то первая вариация дает условие касания. Всякий участок самокасания является отрезком: если бы он не был отрезком, две совпадающие ветви можно было бы заменить двумя хордами с теми же концами, не увеличив внешнюю площадь и строго уменьшив длину. Наконец, свободная дуга отрывается от участка самокасания касательно; иначе малый угол в точке отрыва можно было бы срезать, снова не увеличив внешнюю площадь и уменьшив длину.

Покажем, что σ является отрезком. В открытой части внешней области кратчайшее соединение локально прямолинейно. Поэтому отклонения от прямой могут возникать только в точках контакта σ с границей внешней области, то есть с траекторией.

Сначала исключим ненулевой контакт со свободной дугой траектории. Пусть σ содержит ненулевой участок такой дуги. Возьмем на этом участке достаточно малую поддугу с концами A и B. Так как свободная дуга является дугой окружности, то ее можно сдвинуть на сколь угодно малую величину во внешнюю сторону. После такого сдвига хорда AB вместе со сколь угодно малыми соединительными отрезками лежит в замыкании новой внешней области. При этом соответствующий участок траектории заменяется более короткой кривой, а внешняя площадь не увеличивается: если при сдвиге возникает лишняя внешняя площадь порядка $o(1)$, ее можно убрать обратным сдвигом на соседнем участке той же дуги, не меняя длину в первом порядке. В итоге получаем допустимую предельную картину меньшей длины, что противоречит минимальности. Следовательно, σ не может идти вдоль свободной дуги.

Теперь рассмотрим изолированное касание σ со свободной дугой. Если при таком касании направление σ меняется, то около точки касания, по гладкости свободной дуги, возникает малый внешний клин. Две малые части σ, входящие в точку касания и выходящие из нее, можно заменить одной хордой, лежащей внутри этого клина. Это дает более короткое соединение в $\overline{D}$, что противоречит кратчайшести σ. Значит, изолированное касание свободной дуги не меняет направления σ.

Итак, единственные участки траектории, по которым σ может идти ненулевое время, являются участками самокасания. Каждый такой участок, как было показано выше, является отрезком.

Остается исключить изломы при переходе между свободным прохождением по внешней области и участком самокасания. Пусть такой излом есть. Тогда одна часть σ является прямым отрезком во внешней области, а другая лежит на прямолинейном участке самокасания. Если их направления различны, то около точки перехода возникает внешний клин. Поскольку свободные дуги примыкают к участку самокасания касательно, этот клин действительно лежит во внешней области в достаточно малой окрестности точки перехода. Поэтому соответствующий кусок σ можно заменить более коротким отрезком внутри этого клина. Это противоречит кратчайшести σ.

Значит, при каждом переходе направление σ сохраняется. Следовательно, σ состоит из прямолинейных участков, лежащих на одной прямой. Поэтому σ является одним отрезком. Обозначим его через OX, где X лежит на границе квадрата.

Так как квадрат выпуклый, отрезок OX лежит в квадрате. Разрежем квадрат по OX. Длина траектории при этом не меняется. Внешняя область после разреза становится воротником границы получившейся разрезанной области: одна компонента ее границы совпадает с внешней границей разрезанной области, а другая является траекторией. Площадь этого воротника не превосходит ε.

Следовательно, при поиске инфимума достаточно рассматривать предельные картины с прямолинейным разрезом OX.

Доказательство леммы 4 (многоугольник). Поскольку D является воротником границы M, внутренняя граница Γ идет вокруг M в том же циклическом порядке, что и ∂M. После сколь угодно малого сглаживания в окрестностях вершин можно разбить воротник на попарно непересекающиеся части двух типов: полосы вдоль сторон и угловые части около вершин.

Рассмотрим сначала полосу вдоль прямой стороны s. Пусть соответствующий ей участок внутренней границы равен Γ_s. Ортогональная проекция на прямую, содержащую сторону s, не увеличивает длину, а проекция Γ_s покрывает соответствующую часть стороны. Поэтому

$$\ell(\Gamma_s) \geqslant |s|.$$

Значит, вдоль прямых сторон выигрыша длины по сравнению с периметром быть не может.

Теперь рассмотрим i-ю вершину угла α_i. Пусть соответствующая угловая часть воротника ограничена двумя отрезками соседних сторон длины x_i и y_i и участком внутренней границы длины ℓ_i. Обозначим ее площадь через A_i. Угловые части выбраны попарно непересекающимися, поэтому

$$A_1 + \ldots + A_n \leqslant S(D) \leqslant \varepsilon.$$

По лемме 2, примененной к этому углу,

$$x_i + y_i - \ell_i \leqslant 2\sqrt{A_i f(\alpha_i)}.$$

Сложим теперь оценки по всем полосам и всем угловым частям. Полосы вдоль сторон не дают выигрыша длины, а около i-й вершины выигрыш не превосходит

$$2\sqrt{A_i f(\alpha_i)}.$$

Следовательно,

$$P - \ell(\Gamma) \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i f(\alpha_i)}.$$

Отсюда

$$\ell(\Gamma) \geqslant P - 2\sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i f(\alpha_i)}.$$

По неравенству Коши

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i f(\alpha_i)} \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\right)} \leqslant \sqrt{\varepsilon \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)}.$$

Поэтому

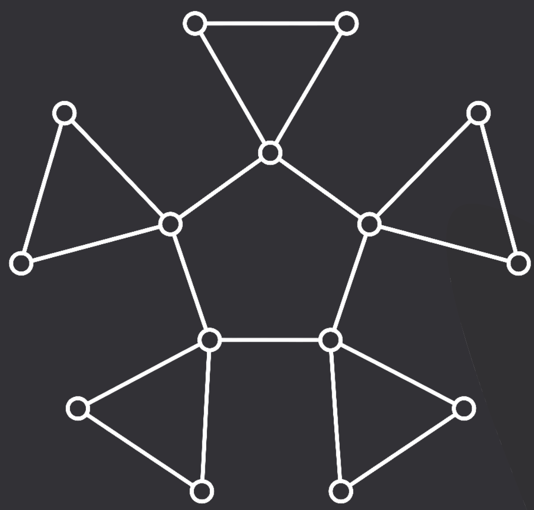
$$\ell(\Gamma) \geqslant P - 2\sqrt{\varepsilon \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)}.$$

Точность оценки следует из случая равенства в лемме 2 и в неравенстве Коши. Именно, около каждого угла надо провести дугу окружности, касающуюся соседних сторон, а площади выбрать равными

$$A_i = \varepsilon \frac{f(\alpha_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} f(\alpha_j)}.$$

Если эти дуги можно провести независимо и они не пересекаются, то вся внешняя площадь сосредоточена в угловых срезах, и все использованные неравенства становятся равенствами. Лемма доказана.

Задача 2 (Ожерелье, плоскость, два гвоздя)**.** Назовём *ожерельем* граф, построенный следующим образом: к каждой вершине цикла длины 5 присоединим треугольник, совпадающий ровно одной вершиной с вершиной исходного цикла. Будем считать, что вершины и рёбра ожерелья не пронумерованы.



Укладкой ожерелья назовём размещение графа на плоскости, при котором вершинам соответствуют точки, а рёбрам — простые дуги между ними, причём никакие два ребра не пересекаются и не касаются друг друга вне вершин.
Предположим, что в плоскость вбиты 2 гвоздя — две различные точки, которые не совпадают ни с одной вершиной укладки и не лежат на её рёбрах.
Для плоскости с двумя гвоздями найдите число укладок ожерелья, которые нельзя перевести друг в друга, не поднимая с плоскости, не создавая самопересечений и не проводя ни одно ребро через гвоздь.

Ответ: 1104.

Решение. В задаче есть два конструктивно различных случая.

Случай I (цикл длины 5 лежит в одном из треугольников)**.** Вершина внешнего треугольника, являющаяся вершиной пятиугольника, однозначно определяется из конструкции (вне зависимости от того, где находятся гвозди), а значит, все оставшиеся 4 вершины пятиугольника тоже.

Тогда всего способов расположить треугольники вовнутрь/вовне — 2^4 способов, после этого остаётся 7 областей, в которые нужно поставить 2 гвоздя 7^2 способами, то есть всего $16 \cdot 49 = 784$ различные укладки.

Случай II (цикл длины 5 не лежит ни в одном из треугольников)**.** Разобьём случаи на пары следующей инволюцией — поменять внутренность и внешность пятиугольной грани (сделать инверсию в точке внутри пятиугольной грани и во вне всех треугольников). Поэтому достаточно посчитать случаи, когда вовне пятиугольной грани не более двух треугольников, и умножить ответ на 2.

Если вовне пятиугольной грани торчит не более двух треугольников, возможны 4 случая:

1. Вовне торчат 2 соседних треугольника.
2. Вовне торчат 2 несоседних треугольника.
3. Вовне торчит 1 треугольник.
4. Все треугольники направлены внутрь.

В случаях 1, 2 и 3 все 5 вершин цикла определяются однозначно (вне зависимости от того, где находятся гвозди), значит, в каждом из них остаётся 7 областей и 7^2 способов вбить гвозди.

В случае 4 возможны три подслучая, как именно расположены гвозди:

- *Ни один гвоздь не вбит во внутренность треугольников.* У нас есть 2 места (внутренность и внешность пятиугольной грани) для расположения каждого из 2 гвоздей, то есть $2 \cdot 2 = 4$ укладки.
- *Ровно 1 гвоздь вбит во внутренность треугольников.* Можно двумя способами выбрать гвоздь, вбитый в одну из треугольных граней, а затем 2 варианта для второго гвоздя (внутренность/внешность пятиугольника), то есть $2 \cdot 2 = 4$ укладки.
- *Оба гвоздя вбиты во внутренности треугольников.* Есть 5 укладок в зависимости от того, сколько вершин (от 0 до 4) по часовой стрелке от первого гвоздя до второго.

Итого в случае II:

$$2 \cdot (49 \cdot 3 + 4 + 4 + 5) = 2 \cdot 160 = 320 \text{ укладок.}$$

Всего укладок $784 + 320 = 1104$.

Задача 3 (Гена, возьми определитель)**.** Найдите сумму всех положительных значений a, при которых матрица

$$A = \left(\min(i,j) \cdot a^{|i-j|}\right)_{i,j=1}^{2026}$$

вырождена.

Ответ: $\sum\limits_{i=2}^{2026} \sqrt{\dfrac{i}{i-1}} \approx 2028.939215760406073.$

Решение. Обозначим $n = 2026$.

Для $i = n, n-1, \dots, 2$ заменим строку R_i на $R_i - aR_{i-1}$.

$$\begin{pmatrix} 1\cdot a^0 & 1\cdot a^1 & 1\cdot a^2 & \cdots & 1\cdot a^{n-1} \\ 1\cdot a^1 & 2\cdot a^0 & 2\cdot a^1 & \cdots & 2\cdot a^{n-2} \\ 1\cdot a^2 & 2\cdot a^1 & 3\cdot a^0 & \cdots & 3\cdot a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1\cdot a^{n-1} & 2\cdot a^{n-2} & 3\cdot a^{n-3} & \cdots & n\cdot a^0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot a^0 & 1\cdot a^1 & 1\cdot a^2 & \cdots & 1\cdot a^{n-1} \\ 0 & (2-a^2)\cdot a^0 & (2-a^2)\cdot a^1 & \cdots & (2-a^2)\cdot a^{n-2} \\ 0 & 0 & (3-2a^2)\cdot a^0 & \cdots & (3-2a^2)\cdot a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-(n-1)a^2)\cdot a^0 \end{pmatrix}$$

После этих преобразований определитель не поменялся, а матрица стала верхнетреугольной, поэтому

$$\det A = \prod_{i=2}^{n} (i-(i-1)a^2).$$

Отсюда $a^2 = \frac{i}{i-1}$ для некоторого $i \in \{2, \dots, n\}$. Следовательно, сумма всех положительных значений a равна

$$\sum_{i=2}^{2026} \sqrt{\frac{i}{i-1}} \approx 2028.939215760406073.$$

Задача 4 (Честные выборы)**.** Для каждого $i = 1, \ldots, n-2$ Федя выбрал один из четырёх вариантов:

$$\emptyset, \{i\}, \{i+1\}, \{i+2\}.$$

После всех выборов Федя считает результат *хорошим*, если каждое число $1, 2, \ldots, n$ было выбрано чётное число раз. Пусть A_n — число хороших результатов. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n}$.

Ответ: ≈ 2.2055694304.

Решение. Будем идти слева направо. Перед выбором с номером i будем помнить только две величины: чётность того, сколько раз мы выбрали числа i и $i+1$. Тогда возможны четыре состояния:

$$00, 01, 10, 11.$$

Если первая чётность равна 1, то, чтобы число i было выбрано чётное число раз, Федя обязан выбрать именно $\{i\}$ на текущем шаге. Если первая чётность равна 0, то Федя обязан не выбирать $\{i\}$, то есть может выбрать

$$\emptyset, \quad \{i+1\}, \quad \{i+2\}.$$

В порядке состояний $00, 01, 10, 11$ получаем матрицу переходов

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Начальное состояние равно 00, и после всех $n-2$ выборов конечное состояние тоже должно быть 00. Поэтому A_n есть элемент матрицы M^{n-2}, стоящий на месте $(00, 00)$.

Характеристический многочлен этой матрицы равен

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 1).$$

Матрица M примитивна (то есть в некоторой степени все ее элементы строго положительны), поэтому по теореме Перрона–Фробениуса рост любого ненулевого элемента матрицы M^m определяется её наибольшим положительным собственным значением.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} = \lambda,$$

где λ есть единственный положительный корень уравнения

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 1 = 0.$$

Численно

$$\lambda \approx 2.2055694304.$$

Задача 5 (Прямоугольный бильярд)**.** Дана разбитая на единичные клетки прямоугольная доска $a \times b$, где a и b взаимно просты. В n клетках стоят метки; множество клеток с метками выбирается случайно и равновероятно среди всех n-элементных подмножеств клеток доски.
Из левой нижней клетки начинает двигаться фишка. За один ход она переходит в соседнюю по диагонали клетку. Изначально она идёт вверх-вправо. Если фишка должна выйти за границу доски, она отражается от стороны, как бильярдный шар, и продолжает движение по диагонали. Например, у правой границы при попытке выйти направо она просто окажется на одну клетку выше.
Фишка останавливается, когда впервые попадает в клетку с меткой.
Найдите математическое ожидание числа посещённых клеток, включая последнюю.

Ответ: $\dfrac{ab+1}{n+1}$.

Решение. Вместо того чтобы отражать фишку от краёв, будем каждый раз отражать саму доску. Тогда путь фишки превращается в движение по диагонали на бесконечной клетчатой плоскости.

У полученной клетчатой плоскости есть периоды $2a$ по горизонтали и $2b$ по вертикали, поэтому достаточно следить за координатой фишки по модулю $2a$ и $2b$.

Покажем, что до первого повторения фишка проходит все ab клеток исходной доски. Пусть две посещённые клетки совпали раньше, обозначим эти моменты за $k < \ell$. Совпадение означает, что по каждой координате мы попали либо в ту же копию, либо в отражённую. Поэтому для горизонтали имеем одно из двух: $k \equiv \ell \pmod{2a}$ или $k + \ell \equiv -1 \pmod{2a}$, и для вертикали — то же самое по модулю $2b$.

Если в обеих координатах выбран один и тот же тип совпадения, то либо $\ell - k$, либо $\ell + k + 1$ кратно $2ab$. Но $0 < \ell - k < \ell + k + 1 < 2ab$. Если типы разные, то легко получить противоречие по чётности. Тогда за первые ab шагов мы пройдем все клетки.

Значит, фишка задаёт некоторый порядок всех клеток доски:

$$C_1, C_2, \ldots, C_{ab}.$$

Метки стоят в случайных n клетках, то есть в этом порядке случайно выбраны n позиций из $1, \ldots, ab$. Фишка остановится на первой из этих позиций, осталось найти математическое ожидание минимума.

Добавим специальное число 0 в начало и расположим полученные $ab + 1$ чисел по кругу. Минимум выбранных чисел — это длина промежутка после 0 до первой выбранной точки. По симметрии средняя длина каждого из $n + 1$ промежутков одинакова, а сумма их длин равна $ab + 1$. Поэтому математическое ожидание равно $\frac{ab+1}{n+1}$.

Задача 6 (Занятые интегралы)**.** Дана $f \in C[0,1]$, для которой

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 1, \quad \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 xf(x)dx = 0.$$

Найдите

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx.$$

Ответ: $-\frac{1}{12}$.

Решение. Рассмотрим функцию $g(x) = 2 - 3x$. Тогда

$$\int_0^1 g^2(x)\,dx = \int_0^1 (2-3x)^2\,dx = 1.$$

Кроме того,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx - 3\int_0^1 xf(x)\,dx = 1.$$

По неравенству Коши–Буняковского–Шварца

$$1 = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_0^1 g^2(x)\,dx} = 1.$$

Значит, в неравенстве достигается равенство, поэтому f пропорциональна g. Так как их скалярное произведение и нормы равны 1, получаем $f(x) = g(x) = 2 - 3x$.

Следовательно,

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2(2-3x)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx - 3\int_0^1 x^3\,dx = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12}.$$

Задача 7 (Мумифицированный тетраэдр)**.** Поверхность правильного тетраэдра с длиной ребра 239 требуется полностью покрыть прямоугольными полосками размера 1×23. Полоски можно накладывать друг на друга, сгибать вдоль рёбер тетраэдра и произвольно располагать на поверхности, однако резать или рвать их нельзя.
Найдите минимальное количество полосок, необходимое для покрытия всей поверхности тетраэдра.

Ответ: 4302.

Решение. Обозначим искомое число полосок через N.

Нижняя оценка. Площадь поверхности правильного тетраэдра со стороной 239 равна $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 239^2 = 239^2\sqrt{3}$, а площадь каждой полоски равна 23. Так как полоски должны покрыть поверхность без пропусков, необходимо

$$N \geqslant \left\lceil \frac{239^2\sqrt{3}}{23} \right\rceil = 4302.$$

Верхняя оценка. Разрежем поверхность тетраэдра по двум противоположным рёбрам — она развернётся в цилиндрическое кольцо высотой $\dfrac{239\sqrt{3}}{2}$ и с длиной окружности $2 \cdot 239 = 478$.

Разобьём это кольцо на 478 вертикальных полос шириной 1. Каждую такую полосу можно покрыть полосками 1×23, уложенными вертикально. Их потребуется

$$\left\lceil \frac{239\sqrt{3}}{46} \right\rceil = \lceil 8,9991335437\ldots \rceil = 9.$$

Следовательно, весь тетраэдр можно покрыть $478 \cdot 9 = 4302$ полосками 1×23.

Задача 8 (Найдите общий язык)**.** Даны две контекстно-свободные грамматики над алфавитом $\{a, b\}$.
Грамматика G_1 с начальным символом S:

$$\begin{aligned}
&S \to \varepsilon\\
&S \to aS\\
&S \to aSbSaSaS\\
&S \to aSaSbSaS
\end{aligned}$$

Грамматика G_2 с начальным символом T:

$$\begin{aligned}
&T \to \varepsilon\\
&T \to aTa\\
&T \to bTbTbTbTb
\end{aligned}$$

Найдите количество слов длины 95, принадлежащих пересечению языков:

$$L(G_1) \cap L(G_2)$$

Ответ: $71\,024\,813\,194$.

Решение. Через $|w|_a$ и $|w|_b$ обозначаем числа букв a и b в слове w.

Лемма 1. Непустое слово w лежит в $L(G_1)$ тогда и только тогда, когда оно начинается и заканчивается на a, не содержит подслова bb и удовлетворяет неравенству $|w|_a \geqslant 3|w|_b$.

Доказательство. Необходимость — индукция по выводу: правило $S \to aS$ добавляет одну букву a, а каждое из правил $S \to aSbSaSaS$ и $S \to aSaSbSaS$ добавляет три буквы a и одну букву b; при этом непустое слово всегда начинается и заканчивается на a, а две буквы b подряд не возникают.

Достаточность — обратная индукция по длине. Если $|w|_b = 0$, то $w = a^n$ выводится правилом $S \to aS$. Если $|w|_b > 0$, то условия леммы позволяют выбрать одну букву b и три буквы a вокруг неё так, что слово раскладывается в один из видов $w = au\,bv\,ar\,aq$ или $w = au\,av\,br\,aq$, где u, v, r, q снова удовлетворяют условиям леммы либо пусты. По предположению индукции они выводятся из S, а значит w выводится одним из правил с буквой b. □

Пусть $w \in L(G_1) \cap L(G_2)$ и $|w| = 95$. По лемме $95 = |w|_a + |w|_b \geqslant 4|w|_b$, откуда $|w|_b \leqslant 23$. В G_2 число $|w|_b$ кратно 5, а $|w|_a$ чётно, поэтому $|w|_b = 95 - |w|_a$ нечётно. Следовательно, $|w|_b \in \{5, 15\}$.

Случай $|w|_b = 5$. Здесь $|w|_a = 90$, правило $T \to bTbTbTbTb$ применяется один раз, и по лемме слово имеет вид

$$w = a^k\, b\, a^{2x_1}\, b\, a^{2x_2}\, b\, a^{2x_3}\, b\, a^{2x_4}\, b\, a^k, \qquad k, x_1, \dots, x_4 \geqslant 1.$$

Из $2k+2(x_1+x_2+x_3+x_4)=90$ получаем $k+x_1+x_2+x_3+x_4=45$, поэтому

$$N_5=\binom{44}{4}=135\,751.$$

Случай $|w|_b=15$. Теперь $|w|_a=80$, и правило $T\to bTbTbTbTb$ применяется ровно три раза. Запишем

$$w=a^{x_0}\,b\,a^{x_1}\,b\cdots b\,a^{x_{15}},\qquad \sum_{i=0}^{15}x_i=80,$$

причём по лемме все $x_i\geqslant 1$ (неравенство $|w|_a\geqslant 3|w|_b$ выполнено само собой: $80\geqslant 45$). Осталось понять, какие наборы (x_i) порождаются грамматикой G_2.

Структура G_2. Три применения правила с буквой b образуют упорядоченное дерево с тремя внутренними вершинами (у каждой по четыре слота); таких деревьев

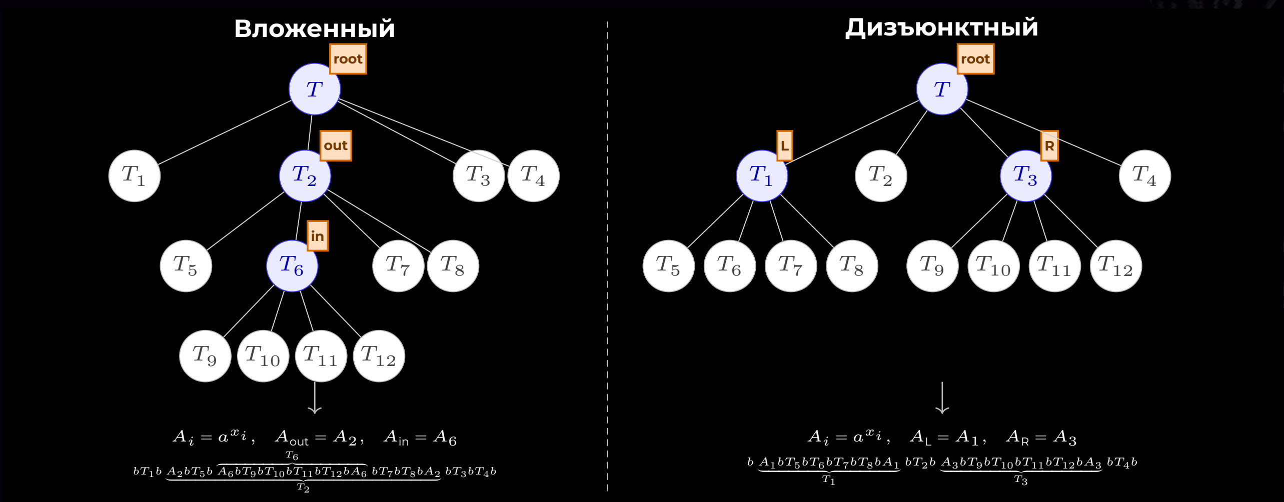
$$\frac{1}{3\cdot 3+1}\binom{12}{3}=22.$$

Обёртки $T\to aTa$ симметричны: вокруг каждой внутренней вершины стоят равные a-блоки слева и справа, а любой максимальный кусок, порождённый без правила с буквой b, состоит из чётного числа букв a. Значит каждая внутренняя вершина задаёт пару равных блоков (произвольной чётности), а все прочие блоки чётны.

Корневая вершина даёт $x_0=x_{15}$. Свернём эту пару в один блок, положив

$$y_0=x_0+x_{15}=2x_0,\qquad y_i=x_i\quad(1\leqslant i\leqslant 14);$$

тогда блоков становится 15, выполнено $\sum_{i=0}^{14}y_i=80$, причём y_0 заведомо чётен, и остаются ровно две пары равенств — от двух некорневых вершин. Эти вершины расположены друг относительно друга *вложенно* либо *дизъюнктно* (см. рисунок): $4\cdot 4=16$ вложенных и $\binom{4}{2}=6$ дизъюнктных — те же 22 дерева.



Итак, каждое дерево $\mathcal{T}$ задаёт на наборе $(y_0, \dots, y_{14})$ две пары равенств $y_{l_1} = y_{r_1}$, $y_{l_2} = y_{r_2}$, а все блоки, кроме четырёх концов l_1, r_1, l_2, r_2, обязаны быть чётными. Набор реализуется грамматикой G_2 тогда и только тогда, когда он подходит хотя бы под одно дерево, поэтому искомое множество есть $\bigcup_{\mathcal{T}} A_{\mathcal{T}}$, где

$$A_{\mathcal{T}} = \Big\{(y_i) : \ y_i \geqslant 1, \ \sum_i y_i = 80, \ y_{l_1} = y_{r_1}, \ y_{l_2} = y_{r_2}, \ \text{прочие } y_i \text{ чётны}\Big\}.$$

Разные деревья могут задавать одно и то же слово, поэтому вычисляем по формуле включения-исключения:

$$N_{15} = \Big|\bigcup_{\mathcal{T}} A_{\mathcal{T}}\Big| = \sum_{\emptyset \neq U} (-1)^{|U|+1} \, |A_U|, \qquad A_U = \bigcap_{\mathcal{T} \in U} A_{\mathcal{T}}.$$

Подсчёт $|A_U|$. Все равенства из U разбивают 15 блоков на классы эквивалентности; внутри класса блоки равны общему значению $v \geqslant 1$. Класс размера s при значении v добавляет к сумме $s \cdot v$. Назовём класс *чётным*, если хотя бы один его блок обязан быть чётным (тогда и v чётно). Каждому классу сопоставим множитель производящей функции

$$\frac{z^s}{1 - z^s} \quad (\text{свободный класс}, v \geqslant 1), \qquad \frac{z^{2s}}{1 - z^{2s}} \quad (\text{чётный класс}, v \geqslant 2),$$

и тогда

$$|A_U| = [z^{80}] \prod_{\text{классы}} (\cdots).$$

Здесь использован стандартный факт: число решений уравнения $\sum_i c_i x_i = M$ в натуральных x_i равно $[z^M] \prod_i \dfrac{z^{c_i}}{1 - z^{c_i}}$ (выбор слагаемого $z^{c_i x_i}$ в i-м множителе равносилен фиксации x_i). Требование чётности класса реализуется заменой $c \mapsto 2c$.

Вычисление. Полный перебор 2^{22} подмножеств излишен: разные U приводят к одному *каноническому состоянию* — разбиению 15 блоков на классы, среди которых выделены чётные. Подсчитав состояния по деревьям со знаковым весом $\sum_{U \mapsto S} (-1)^{|U|}$, получаем 656 непустых состояний. Суммирование коэффициентов при z^{80} по этим состояниям с весом $(-1)^{|U|+1}$ даёт

$$N_{15} = 71\,024\,677\,443.$$

Ноутбук для подсчета

Ответ.

$$N = N_5 + N_{15} = \binom{44}{4} + 71\,024\,677\,443 = 135\,751 + 71\,024\,677\,443 = 71\,024\,813\,194.$$