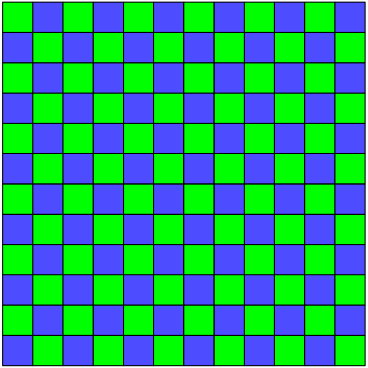
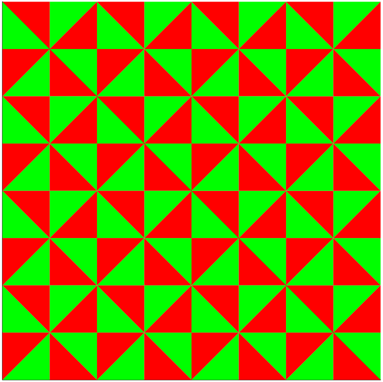
Непериодические замощения плоскости многоугольниками

Н.К. Верещагин (МГУ, ВШЭ, Яндекс)

26 июня 2025

Замощения плоскости многоугольниками





Наборы протоплиток и замощения

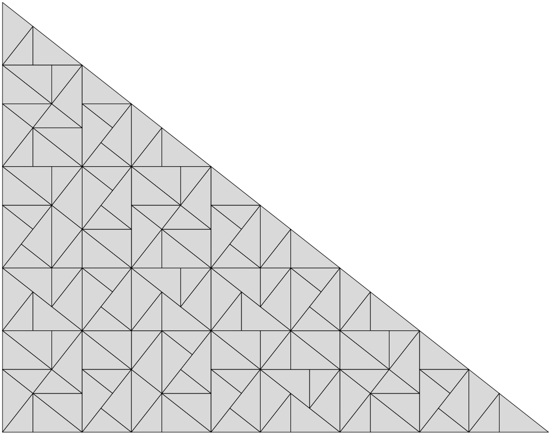
- Дано конечное множество многоугольников, называемых *протоплитками*
- *Плитки* — сдвиги протоплиток
- *Замощение* — множество плиток без перекрытий
- Замощение называется *замощением всей плоскости*, если каждая точка плоскости принадлежит хотя бы одной его плитке
- Замощение всей плоскости называется *периодическим*, если оно имеет два непараллельных периода

Примеры известных непериодических замощений: замощения Робинсона, Пенроуза, Амманна.

Замощения сторона-к стороне

Замощение называется *сторона-к-стороне*, если любые стороны его плиток, имеющие общий интервал, совпадают. То есть, никакая вершина его плитки не лежит строго внутри стороны другой его плитки.

Пример замощения не сторона-к-стороне:



Мы будем рассматривать только замощения сторона-к-стороне.

Локальные правила

- Локальное правило — конечное множество конечных замощений. Эти замощения называются *запрещенными*
- Замощение *выполняет локальное правило*, если оно не имеет запрещенного фрагмента, то есть, никакое его подмножество не является сдвигом запрещенного замощения
- Набор плиток — конечное множество протоплиток и локальное правило
- Набор плиток *совместен*, если существует замощение всей плоскости сторона-к-стороне, выполняющее его локальное правило

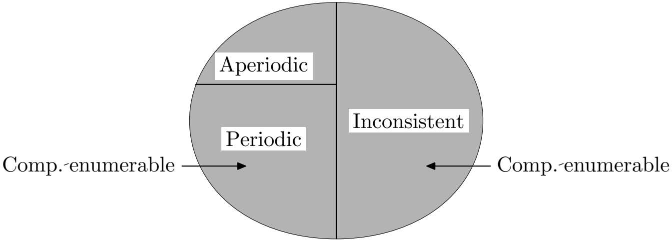
Примеры совместных наборов плиток

- Протоплитки: синяя и зеленая квадратные плитки. Локальное правило — никакие плитки одного цвета не имеют общей стороны.
- Протоплитки: четыре красных и четыре зеленых треугольника с первого слайда. Локальное правило — никакие плитки одного цвета не имеют общей стороны

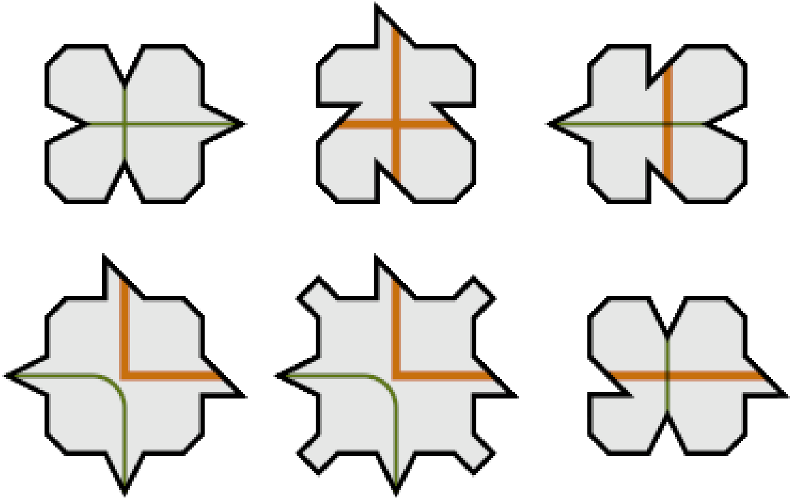
Периодические и апериодические наборы

Определение

Совместный набор плиток называется *периодическим*, если существует периодическое замощение его плитками всей плоскости. Иначе совместный набор плиток называется *апериодическим*.



Апериодический набор Робинсона



Проблема Домино

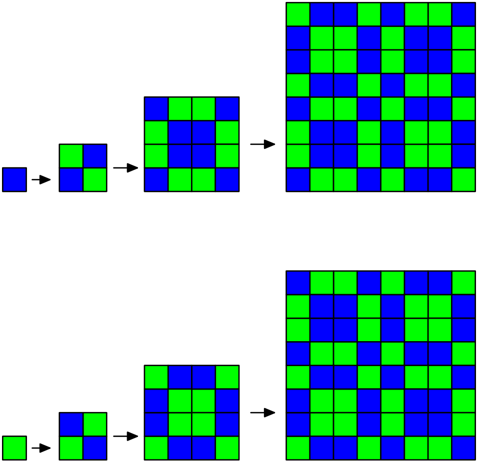
Проблема Домино (Ван 1961). Построить алгоритм, которые по набору квадратных плиток одного размера выясняет, совместен ли он.

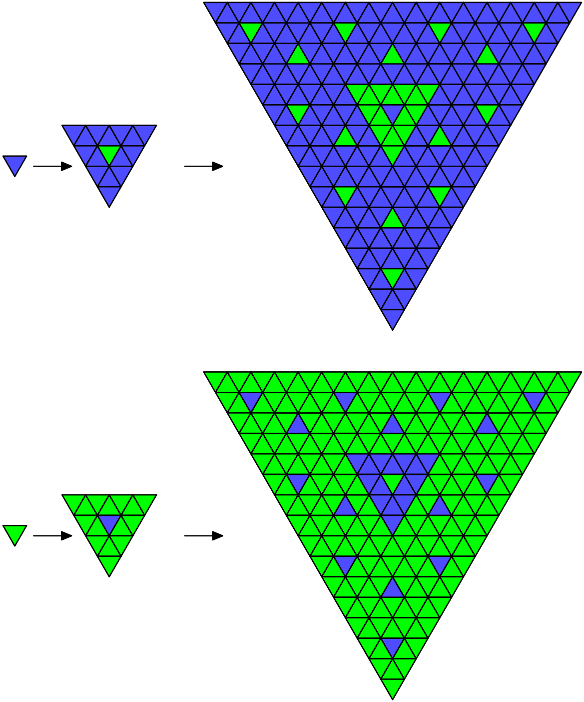
Теорема (Бергер 1964)

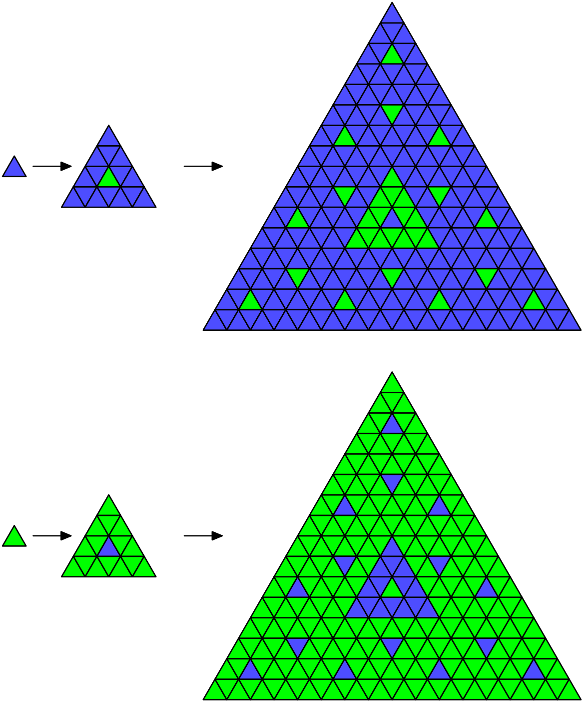
Такого алгоритма нет, то есть, проблема Домино неразрешима.

Главная сложность в доказательстве Бергера — построение апериодического набора плиток. Главный способ доказательства непериодичности — так называемые подстановки.

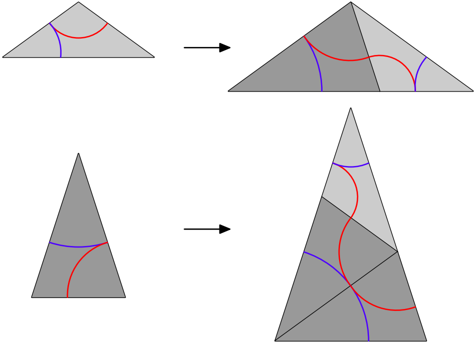
Подстановки и суперплитки



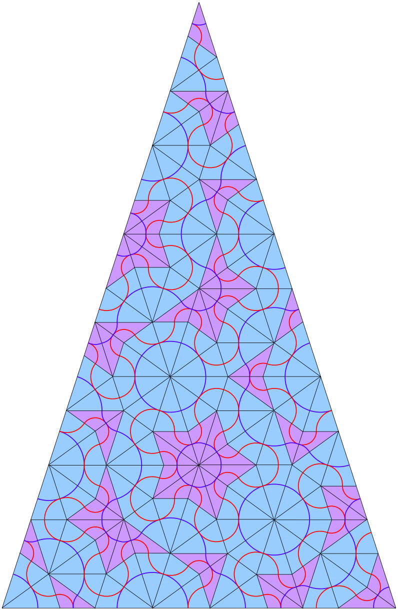




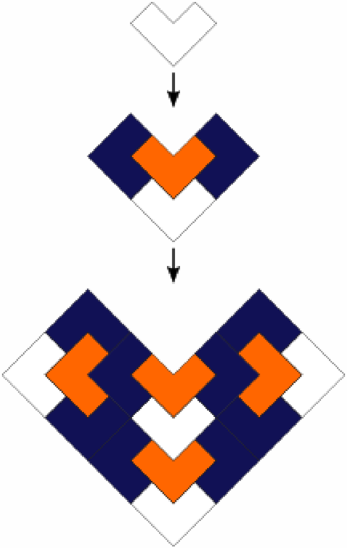
Robinson's Stone Inflation



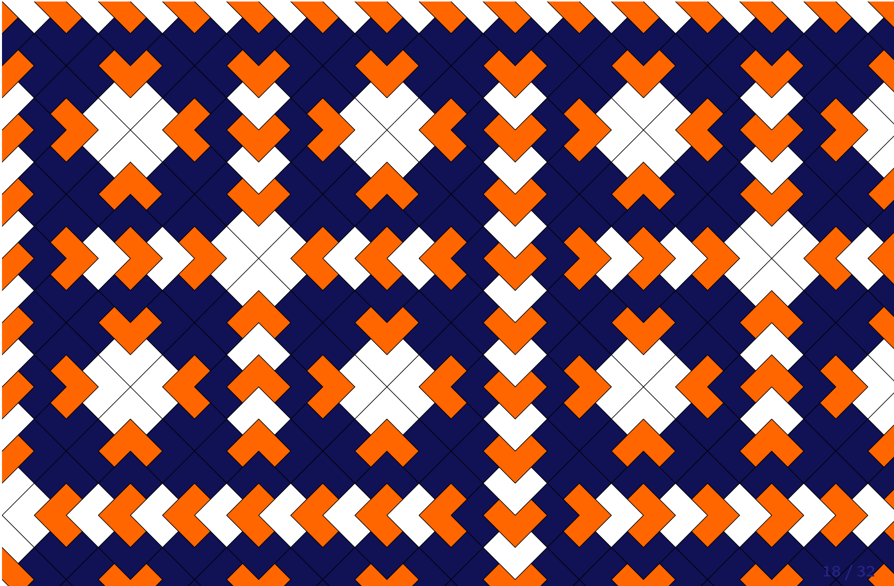
Robinson's Stone Inflation: суперплитка



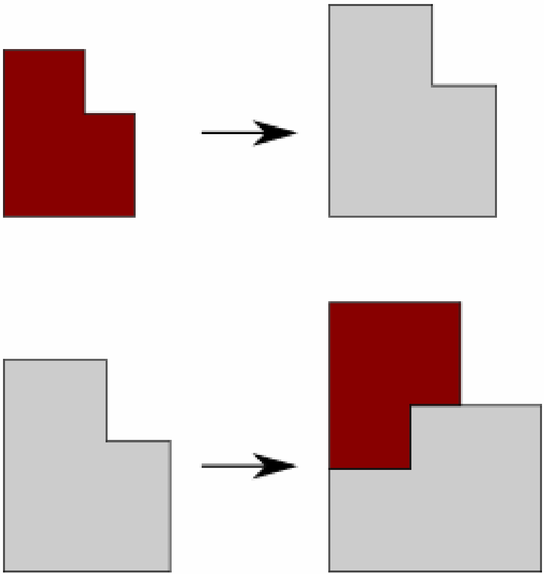
Chair substitution



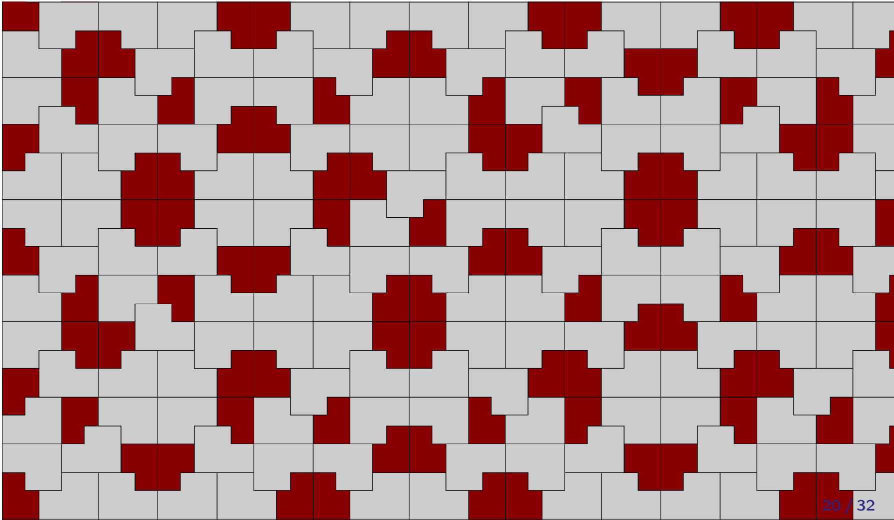
Chair substitution: фрагмент суперплитки



Подстановка Амманна



Подстановка Амманна: фрагмент суперплитки



Укрупнения и измельчения

- Если замощение T' получается из замощения T применением подстановки σ, то T' называется *σ-измельчением* T, а T — *σ-укрупнением* T'.

Иерархические замощения

- Замощение T называется *σ-иерархическим*, если существует бесконечная последовательность замощений сторона-к-стороне

$$T_0 = T, T_1, T_2, \dots,$$

в которой каждое замощение является σ-укрупнением предыдущего.

Иерархические замощения

- Если любое иерархическое замощение плоскости имеет единственное σ-укрупнение, то говорят, что σ имеет *свойство однозначности укрупнения*.
- Все подстановки, рассмотренные выше, обладают этим свойством.

Теорема

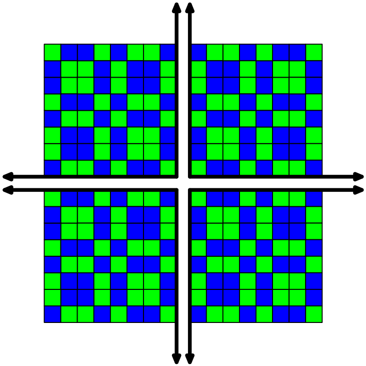
Если подстановка обладает свойством однозначности укрупнения, то для нее любое иерархическое замощение плоскости непериодично.

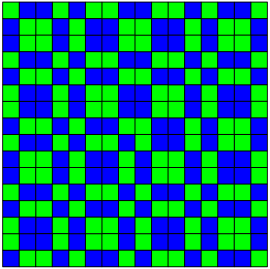
Подстановочные и самоподобные замощения

- Замощение называется σ-*самоподобным*, если его σ-измельчение совпадает с ним самим с точностью до сдвига.
- Любое самоподобное замощение является иерархическим.
- Замощение называется σ-*подстановочным*, если любое его конечное подмножество встречается в некоторой σ-суперплитке.
- Если все суперплитки являются замощениями сторона-к-стороне, то любое подстановочное замощение плоскости является иерархическим.

- Для всех подстановок существуют подстановочные замощения плоскости.

Пример самоподобного неподстановочного замощения для квадрата первой подстановки:





Итак, если подстановка обладает свойством однозначности укрупнения и при этом все суперплитки являются замощениями сторона-к-стороне, то имеются следующие включения между семействами замощений плоскости:

самопод. $\subset$ иерархич. $\subset$ непериодич.

подстанов. $\subset$ иерархич. $\subset$ непериодич.

SFT

Определение

Семейство замощений $\mathfrak{T}$ называется SFT (subshift of finite type), если оно может быть задано локальным правилом.

SFT: примеры

Теорема

Для Robinson's Stone Inflation семейства иерархических и подстановочных замощений совпадают и являются SFT. Локальное правило: красные и синие окружности должны продолжать друг друга (замощения Пенроуза).

Теорема

Для подстановки Амманна семейства иерархических и подстановочных замощений совпадают и являются SFT. Локальное правило: пустое множество запрещенных замощений.

Софичные семейства замощений

Определение

Семейство замощений $\mathfrak{T}$ называется *софичным (sofic)*, если существует раскраска его плиток и SFT $\mathfrak{T}'$, для которых $T \in \mathfrak{T}$ тогда и только тогда, когда найдется $T' \in \mathfrak{T}'$ с $T = \pi(T')$. Здесь π обозначает отображение, стирающее цвет плитки.

Общие теоремы о софичности

Теорема (Mozes 1989)

Пусть все протоплитки являются квадратами одного размера и еще выполнено некоторое условие. Тогда семейство подстановочных замощений софично.

Теорема (Goodman-Strauss 1998)

При некоторых более мягких (но неясных) условиях на подстановку семейство подстановочных замощений софично (плитки могут быть не квадратными).

Теорема (Fernique — Ollinger 2010)

При некоторых (вполне ясных) условиях на подстановку семейство иерархических замощений софично. (Имеется только эскиз доказательства, которое к тому же работает только при более сильных предположениях.)

Моя гипотеза. Оба семейства подстановочных и иерархических замощений софичны для любой подстановки, для которой все суперплитки является замощениями сторона-к-стороне.

Теорема (В. 2025)

При некоторых мягких и ясных условиях на подстановку оба семейства подстановочных и иерархических замощений софичны. В частности, это верно для всех примеров подстановок из этого доклада.