Преобразования на плоскости и в пространстве

Формирование изображения и разнообразные действия с ним требуют от пользователя известной математической грамотности. Геометрические понятия, формулы и факты, относящиеся к плоскому и трехмерному случаям, играют в задачах компьютерной графики особую роль. Принципы аналитической геометрии в соединении с постоянно расширяющимися возможностями вычислительной техники являются неиссякаемым источником существенных продвижений на пути развития компьютерной графики, ее эффективного использования в САПР.

Растровые и векторные изображения

Различают два вида изображений: растровые и векторные. Растровое изображение состоит из множества точек – пикселей (от англ. pixel – PIcture ELement), каждый пиксель имеет определенный цвет. Чем плотнее расположены пиксели, чем меньше их размеры и чем большее количество цветов, тем выше качество картинки. Примеры растровых изображений: офсетная (газетная) печать, изображение на экране компьютера, сканированный рисунок. При хорошей разрешающей способности устройств графического вывода достигается очень высокое качество растровых изображений, но, к сожалению, работа с ними крайне неудобна, а при масштабировании качество теряется.

Векторное изображение в простейшем случае состоит не из точек, а из множества отрезков прямых, заданных координатами их концов. Такое изображение легко масштабируется без потери качества и легко поддается обработке. Практически во всех графических пакетах, используемых в САПР, информация представляется в векторном виде.

Аффинные преобразования на плоскости

Допустим, на плоскости введена прямолинейная координатная система. Тогда каждой точке M ставится в соответствие упорядоченная пара чисел *(x, y)* ее координат (рис. 1). Вводя на плоскости еще одну прямолинейную систему координат, поставим в соответствие той же точке M другую пару чисел – *(x*, y*)*.

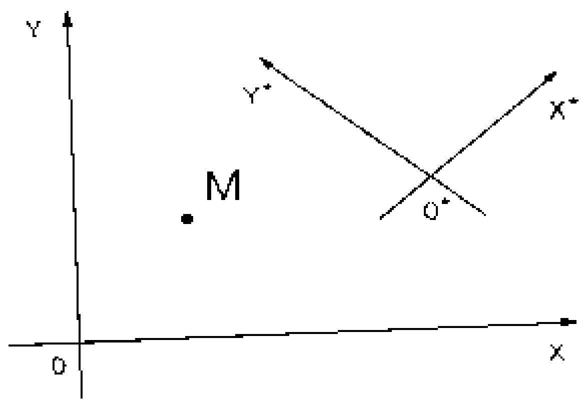

Рис. 1

Переход от одной прямолинейной координатной системы на плоскости к другой описывается следующими соотношениями:

$$x^* = \alpha x + \beta y + \lambda,$$
$$y^* = \gamma x + \delta y + \mu, \quad (*)$$

где α, β, γ, δ, λ, μ – произвольные числа, связанные неравенством:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

В дальнейшем будем рассматривать формулы (*) как правило, согласно которому в заданной системе координат преобразуются точки плоскости.

В аффинных преобразованиях особую роль играют несколько важных частных случаев, имеющих хорошо прослеживаемые геометрические характеристики.

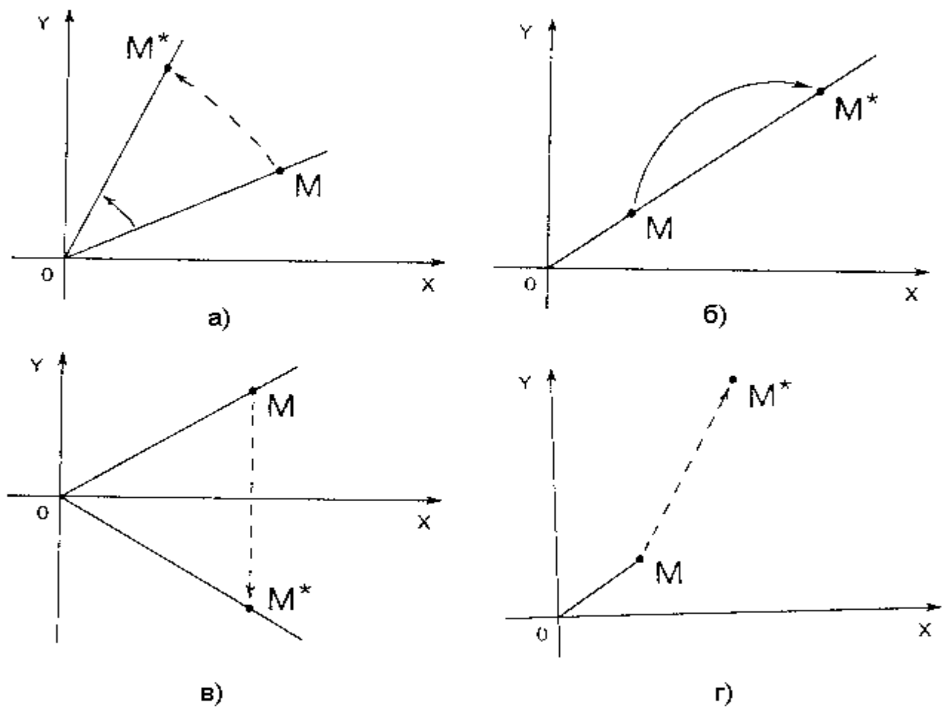

Рис. 2

А. Поворот вокруг начальной точки на угол φ (рис. 2а) описывается формулами

$$x^* = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y^* = x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Б. Растяжение (сжатие) вдоль координатных осей (рис. 2б) можно задать так:

$$x^* = \alpha x,$$
$$y^* = \delta y,$$
$$\alpha > 0, \beta > 0.$$

В. Отражение относительно оси абсцисс (рис. 2в) задается при помощи формул

$$x^* = x,$$
$$y^* = -y.$$

Г. Перенос (рис. 2г) обеспечивают соотношения

$$x^* = x + \lambda,$$
$$y^* = y + \mu.$$

Как доказывается в курсе аналитической геометрии, любое преобразование вида (*) всегда можно представить как последовательное исполнение (суперпозицию) простейших преобразований вида А, Б, В и Г.

Для эффективного использования этих известных формул в задачах компьютерной графики более удобной является их матричная запись. Матрицы, для случаев А, Б и В легко строятся и имеют соответственно следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для решения задач весьма желательно охватить матричным подходом все четыре простейших преобразования (в том числе и перенос), а, значит, и общее аффинное преобразование. Этого можно достичь путем описания произвольной точки плоскости не двумя координатами, как это было сделано выше, а упорядоченной тройкой чисел.

Однородные координаты точки.

Пусть *M* – произвольная точка плоскости с координатами *x* и *y*, вычисленными относительно заданной прямолинейной координатной системы. Однородными координатами этой точки называется любая тройка одновременно неравных нулю чисел *x1, x2, x3,* связанными с заданными числами *x* и *y* следующими соотношениями:

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \frac{x_2}{x_3} = y.$$

При решении задач компьютерной графики однородные координаты обычно вводятся так: произвольной точке *M(x, y)* плоскости ставится в соответствие точка *M*(x, y, 1)* в пространстве (рис. 3). При помощи троек однородных координат и матриц третьего порядка можно описать любое аффинное преобразование на плоскости. Сравнивая уравнение (*) и нижеследующее, матричное:

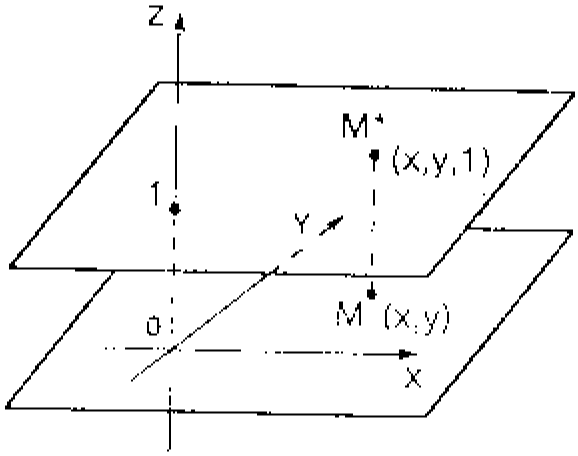

Рис. 3

$$\begin{pmatrix} x^* & y^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{pmatrix},$$

нетрудно заметить, что после перемножения выражений, стоящих в правой части последнего соотношения, получаются обе формулы (*) и тождество 1=1. Таким образом, сравниваемые записи являются равносильными.

Аффинные преобразования в пространстве.

Для выполнения пространственных построений, аналогично двумерной задаче, три координаты точки *(x, y, z)* заменяются четверкой чисел *(x, y, z, 1)*. Это дает возможность воспользоваться матричной записью и в более сложных трехмерных задачах.

Любое аффинное преобразование в трехмерном пространстве может быть представлено в виде суперпозиции вращений, растяжений, отражений и переносов. Математически все преобразования сводятся к перемножению матриц четвертого порядка. Например, матрица вращения вокруг оси абсцисс на угол j имеет вид:

$$
(R_x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Виды проецирования.

Изображение трехмерных объектов на картинной плоскости связано с еще одной геометрической операцией – проецированием при помощи пучка прямых.

В компьютерной графике применяется несколько различных видов проецирования. Наиболее часто используется параллельное и центральное проецирование.

Для получения проекций объекта на картинную плоскость необходимо провести через каждую его точку прямую из заданного проецирующего пучка и затем найти координаты точки пересечения этой прямой с плоскостью изображения. В случае центрального проецирования все прямые исходят из одной точки – центра пучка. При параллельном проецировании считается, что центр пучка расположен в бесконечности (рис. 4). Математически операция проецирования также сводится к перемножению соответствующих матриц.

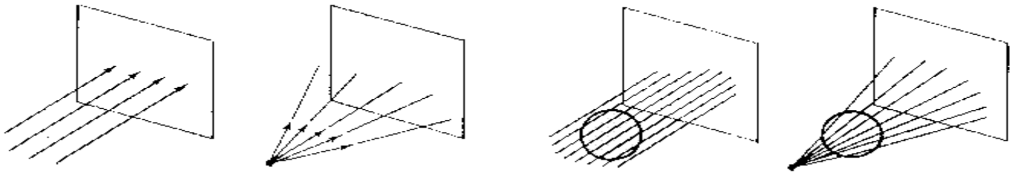

Рис. 4

Общество с ограниченной ответственностью
«Научно-производственная фирма «Топоматик»
196066, Санкт-Петербург, Московский пр., 212
(Бизнес-центр «Московский»), оф. 5042
Тел.: +7 (812)333-32-89
http://www.topomatic.ru
e-mail: info@topomatic.ru