КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Ситникова И. В. Некоторые аспекты обучения применению математических понятий в вузе // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14358. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14358.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.
ART 14358 УДК 378.147:372.851
Ситникова Ирина Викторовна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВПО «Вятский государственный университет», г. Киров
i.sitn@mail.ru

Некоторые аспекты обучения применению математических понятий в вузе

Аннотация. *Статья посвящена методике обучения применению понятий на практических занятиях по математике в высших учебных заведениях. С этой целью выделены действия, выполнение которых предполагает овладение понятием. На примере изучения одной из тем курса линейной алгебры и аналитической геометрии показано, как можно научить студентов реализовать указанные действия при решении математических задач.*
Ключевые слова: *определение понятия, существенные свойства, выведение следствий, преобразование задачи.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Одной из главных составляющих системы научных знаний любого предмета, в том числе и математики, являются понятия. Не оперируя понятиями, нельзя сформулировать ни один закон и, следовательно, создать научную теорию. Без усвоения соответствующих понятий не может быть ни усвоения законов, ни усвоения теорий. Это обусловливает ведущую роль понятий при формировании в сознании обучающихся системы знаний в соответствующей научной области.

Оперирование понятиями требует от учащихся активной мыслительной деятельности, поскольку только в этом случае можно обеспечить глубокое понимание сущности изучаемых предметов и явлений теории. Процесс усвоения понятий влияет на развитие логического мышления, так как именно понятия составляют его фундамент.

Таким образом, развивающие функции обучения математике реализуются и в процессе овладения понятиями. Умственное развитие студента при обучении математике можно рассматривать и как развитие его способностей к осмыслению понятий, оперированию ими и конструированию новых понятий. Перечисленные способности и являются, в сущности, показателями математического развития учащегося.

С учётом сказанного можно предположить, что одной из приоритетных проблем теории и методики обучения математике в вузе является проблема формирования понятий. От степени её решения зависят и качество усвоения знаний по предмету, и уровень развития мышления обучающихся.

Несомненно, полноценное усвоение студентами понятия невозможно без овладения умением применять это понятие в процессе своей математической деятельности, а также предполагает способность к актуализации основных фактов, относящихся к понятию.

На этапе применения понятия, прежде всего, осуществляется знакомство со свойствами и признаками понятия, с его определениями, эквивалентными принятому, используются изученные свойства и признаки понятия. Студенты приобретают умения переходить от понятия к его существенным свойствам и обратно. Данными умениями учащиеся овладевают в процессе специально организованной деятельности, поэтому необходимо выделить действия, выполнение которых предполагает обучение применению понятий. К их числу могут быть отнесены следующие действия:

– замена термина его определением. Это правило означает, что при решении многих задач следует заменять встречающиеся в них понятия их определениями;

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14358 УДК 378.147:372.851
Ситникова И. В. Некоторые аспекты обучения применению математических понятий в вузе // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14358. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14358.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

– замена определения понятия другой совокупностью существенных свойств. Обучать данному действию можно, когда изучены признаки понятия и сформулированы определения, эквивалентные принятому;

– преобразование требований задачи в равносильные им. Данное действие предполагает умение заменить то, что требуется найти в задаче, новым требованием, облегчающим решение, а для этого необходимо установить связь между понятием и условием задачи;

– выведение следствий. Обучение этому виду деятельности начинается ещё на этапе усвоения логической структуры определения. На этапе применения понятия необходимо продолжить эту работу, так как нередко данный приём помогает решить предложенную задачу;

– составление вспомогательных задач. В состав этого действия входят умения: выводить следствия из условий задачи; проводить анализ для поиска решения; при необходимости выполнять дополнительные построения на основном чертеже и др. Любая сложная задача может быть решена с помощью сведения её к решению более простых задач, вытекающих из главной.

Покажем на примере изучения темы «Элементы векторной алгебры», как можно реализовать каждое из рассмотренных действий.

Замена термина его определением

Это правило применения понятия при решении задач и доказательстве теорем было сформулировано ещё Паскалем. Покажем на нескольких примерах, как в простейших случаях выполнение правила Паскаля сразу приводит к решению.

Задача 1. Применение понятий *сумма векторов* и *умножение вектора на число*

Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$, где *A*, *B* и *C* – вершины треугольника, через векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BK}$, если *AM* и *BK* – медианы треугольника *ABC* [1].

Решение. Обозначим *O* – точку пересечения медиан треугольника. По определению суммы векторов вектор $\overrightarrow{AB}$ может быть получен как сумма двух векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OB}$. Вектор $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, вектор $\overrightarrow{OB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$ (по определению произведения вектора на число). Тогда $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$. Рассуждая аналогично, можно получить: $\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Задача 2. Применение понятия *векторное произведение векторов*

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$, причем $|\vec{a}|=1, |\vec{в}|=2, (\widehat{\vec{a},\vec{в}})=120^0$. Вычислить $|\vec{a}\times\vec{в}|$ [2].

Решение. Из определения векторного произведения векторов следует, что это вектор, длина которого может быть найдена по формуле $|\vec{a}\times\vec{в}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})$. Пользуясь определением, получаем $|\vec{a}\times\vec{в}|=\sqrt{3}$.

Задача 3. Применение понятий *смешанное, скалярное и векторное произведение векторов*

Векторы $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ образуют левую тройку $|\vec{a}|=1, |\vec{в}|=2, |\vec{c}|=3\ (\widehat{\vec{a},\vec{в}})=30^0, \vec{a}\perp\vec{c}, \vec{c}\perp\vec{в}$. Найти $\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c}$ [1].

Решение. По определению смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение векторов $\vec{a}\times\vec{в}$ на вектор $\vec{c}$. Из определения скалярного произведения векторов следует, что искомое произведение равно произведению длин двух данных векторов на косинус угла между ними. Так как вектор $\vec{a}\times\vec{в}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$ (следует из определения векторного произведения векторов), то он будет коллинеарен вектору $\vec{c}$, а так как векторы $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ образуют левую тройку, то вектор $\vec{a}\times\vec{в}$ и вектор $\vec{c}$ противоположно направлены, значит, косинус угла между векторами $\vec{a}\times\vec{в}$ и $\vec{c}$ равен –1.

Таким образом, получаем: $\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c} = \left|\vec{a}\times\vec{в}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot(-1) = -\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{в}\right|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})\cdot\left|\vec{c}\right| = -3$.

Замена определения понятия другой совокупностью существенных свойств

Решение многих задач значительно упрощается, если заменить используемое в задаче понятие определением, эквивалентным принятому в математике.

Задача 4. Применение понятия *коллинеарные векторы*

На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен вектор $\overrightarrow{AK}$, такой, что $\left|\overrightarrow{AK}\right| = \frac{1}{5}\left|\overrightarrow{AD}\right|$, а на диагонали AC – вектор $\overrightarrow{AL}$ длины $\left|\overrightarrow{AL}\right| = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AC}\right|$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ коллинеарны [1].

Решение. Из определения умножения вектора на число следует, что вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\lambda\vec{a}$. Тогда, чтобы доказать коллинеарность векторов $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$, достаточно показать, что один из векторов может быть представлен как произведение другого вектора на некоторое число. Покажем это.

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AL} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = 5\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}\right) = 5\overrightarrow{KL}.$$

Задача 5. Применение понятия *векторное произведение векторов*

Найти векторное произведение векторов $\vec{a}(2;-3;4)$ и $\vec{b} = (3;-1;-2)$ [2].

Решение. Заменим определение векторного произведения эквивалентным ему. Если известны координаты векторов, то их векторное произведение – это вектор $\vec{c}$ с координатами: $\vec{a}\times\vec{в} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$, где x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 – координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Применим формулу для двух данных векторов $\vec{a}\times\vec{в} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 16\vec{j} + 7\vec{k}$.

Таким образом, $\vec{a}\times\vec{b} = (10, 16, 7)$.

Задача 6. Применение понятия *скалярное произведение векторов*

Даны векторы $\vec{a}(4;-2;-4)$, $\vec{в}(6;-3;2)$. Вычислить $(2\vec{a} - 3\vec{в})(\vec{a} + 2\vec{в})$ [2].

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14358 УДК 378.147:372.851
Ситникова И. В. Некоторые аспекты обучения применению математических понятий в вузе // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14358. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14358.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Решение. Найдем координаты векторов $2\vec{a}-3\vec{в}=(-10,\ 5,\ -14)$ и $\vec{a}+2\vec{в}=(16,\ -8,\ 0)$. Если известны координаты векторов, то их скалярное произведение равно сумме произведений их соответственных координат (определение эквивалентное принятому). Получим: $(2\vec{a}-3\vec{в})(\vec{a}+2\vec{в})=-160-40+0=-200$.

Преобразование требований задачи в равносильные им

Сущность этого действия состоит в замене того, что требуется сделать в задаче, новым требованием, равносильным первому, но облегчающим решение предложенной задачи. Овладение рассматриваемым действием предполагает, что у обучаемого сформированы умения устанавливать связь между понятиями и условием задачи.

Задача 7. Применение понятия *векторное произведение векторов*

Вычислить площадь треугольника с вершинами *A*(1; 1; 1), *B*(2; 3; 4) и *C*(4; 3; 2) [2].

Решение. Площадь треугольника равна половине произведения длин его сторон на синус угла между этими сторонами. Из определения векторного произведения векторов следует, что длина вектора, равного векторному произведению двух векторов, равна произведению длин векторов на синус угла между ними.

Заменим задачу на равносильную ей: найдем длину векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Половина полученного числа равна площади треугольника *ABC*.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, их векторное произведение и его длину:

$$\overrightarrow{AB}(1;\ 2;\ 3),\ \overrightarrow{AC}(3;\ 2;\ 1),\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=-4\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}.\ \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{16+64+16}=4\sqrt{6}.$$

$$\text{Тогда } S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{6}=2\sqrt{6}.$$

Задача 8. Применение понятия *смешанное произведение векторов*

Найти объем треугольной пирамиды *ABCD* с вершинами *A*(2; 2; 2), *B*(4; 3; 3), *C*(4; 5; 4) и *D*(5; 5; 6) [2].

Решение. Из определения понятия *векторное произведение векторов* следует, что объем прямоугольного параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, выходящих из одной точки, равен модулю смешанного произведения этих векторов. Так как объем треугольной пирамиды составляет шестую часть объема параллелепипеда, то решить задачу можно заменив ее равносильной: найти смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Шестая часть модуля полученного числа равна объему пирамиды *ABCD*.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ и их смешанное произведение.

$$\overrightarrow{AB}(2;\ 1;\ 1),\ \overrightarrow{AC}(2;\ 3;\ 2),\ \overrightarrow{AD}(3;\ 3;\ 4).\ \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=7.\ \text{Тогда } V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot 7=\frac{7}{6}.$$

Задача 9. Применение понятия *скалярное произведение векторов*

Даны вершины треугольника *A*(1; 1; 1); *B*(0; 0; 5); *C*(–1; 2; 3). Показать, что он прямоугольный [2].

Решение. Заменим задачу на равносильную ей. Покажем, что векторы, выходящие из одной точки, перпендикулярны. Применим критерий перпендикулярности векторов: если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14358 УДК 378.147:372.851
Ситникова И. В. Некоторые аспекты обучения применению математических понятий в вузе // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14358. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14358.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Найдем $\overrightarrow{AB}(-1;-1;4)$, $\overrightarrow{AC}(-2;1;2)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9\Rightarrow\angle A\neq 90^0$. Далее аналогично проверяем два других угла: $\overrightarrow{BA}(1;1;-4)$, $\overrightarrow{BC}(-1;2;-2)$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=9\Rightarrow\angle B\neq 90^0$, $\overrightarrow{CA}(2;-1;-2)$, $\overrightarrow{CB}(1;-2;2)$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow\angle C=90^0$. Таким образом, в треугольнике *ABC* прямой угол *C*.

Выведение следствий

Суть данного приёма состоит в том, что из условия задачи получают некоторые выводы, а из полученных промежуточных результатов – новые выводы и т. д. Нередко таким путём удаётся решить предложенную задачу. Если мы не достигли ожидаемого результата, то и в этом случае проделанная работа не является бесполезной: полученные выводы позволяют глубже уяснить содержание данной задачи. Также при решении задачи часто требуется воспользоваться следствиями из определения понятия.

Задача 10. Применение понятия *скалярное произведение векторов*

Определить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если известно, что $(\vec{a}-\vec{в})^2+(\vec{a}+2\vec{в})^2=20$ и $|\vec{a}|=1, |\vec{в}|=2$ [1].

Решение. Преобразуем равенство, заданное в условии, пользуясь свойствами скалярного произведения векторов, следующими из определения.

$$(\vec{a}-\vec{в})^2+(\vec{a}+2\vec{в})^2=20\Leftrightarrow \vec{a}^2-2\vec{a}\vec{в}+\vec{в}^2+\vec{a}^2+4\vec{a}\vec{в}+4\vec{в}^2=20\Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{в}|\cos(\vec{a},\vec{b})+5|\vec{b}|^2=20.$$

Заменим длины векторов соответствующими числами и найдем искомый угол:

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{20-2-20}{4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\pi}{3}.$$

Задача 11. Применение понятия *векторное произведение векторов*

Векторы $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ связаны условием $\vec{a}+\vec{в}+\vec{c}=0$. Доказать, что $\vec{a}\times\vec{в}=\vec{в}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$ [1].

Решение. Из условия задачи следует: $\vec{a}=-\vec{в}-\vec{c}$. Умножим обе части равенства векторно на вектор $\vec{в}$. Получим $\vec{a}\times\vec{в}=-\vec{в}\times\vec{в}-\vec{c}\times\vec{в}$. Из определения векторного произведения векторов следует: $\vec{в}\times\vec{в}=0, \vec{c}\times\vec{в}=-\vec{в}\times\vec{c}$. Таким образом, получаем первую часть доказываемого равенства $\vec{a}\times\vec{в}=\vec{в}\times\vec{c}$.

Для получения второй части равенства можно следующее из условия равенство $\vec{в}=-\vec{a}-\vec{c}$ векторно умножить на вектор $\vec{c}$. Получим $\vec{в}\times\vec{c}=-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{c}\times\vec{c}\Rightarrow\vec{в}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$. Окончательно имеем $\vec{a}\times\vec{в}=\vec{в}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

Задача 12. Применение понятия *смешанное произведение векторов*

Показать, что векторы $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ компланарны [1].

Решение. Из условия задачи получим координаты векторов $\vec{a}(2;5;7)$, $\vec{в}(1;1;-1)$, $\vec{c}((1;2;2)$.

Из определения смешанного произведения векторов следует, что если векторы компланарны, то их смешанное произведение равно 0. Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}\vec{в}\vec{c}=\begin{vmatrix}2&5&7\\1&1&-1\\1&2&2\end{vmatrix}=0$. Следовательно, векторы $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ компланарны.

Ситникова И. В. Некоторые аспекты обучения применению математических понятий в вузе // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14358. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14358.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Составление вспомогательных задач

Задача всегда содержит определённое задание. Нередко это основное задание может быть решено, если решить другое – вспомогательное задание. Например, требуется вычислить площадь треугольника. Для решения задачи иногда надо предварительно найти высоту треугольника – это уже вспомогательная задача.

Задача 13. Применение понятий *скалярное и векторное произведение векторов*

Найти вектор $\vec{c}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}(2;-3;1)$ и $\vec{в}(1;-2;3)$, а также удовлетворяет условию $\vec{c}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{к})=10$ [1].

Решение. Так как вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$, то он коллинеарен вектору $\vec{a}\times\vec{в}$, значит, координаты вектора $\vec{c}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{a}\times\vec{в}$. Требуется решить вспомогательную задачу: найти координаты вектора $\vec{a}\times\vec{в}$.

$$\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=-7\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{в}=(-7;-5;-1).$$

Следующая вспомогательная задача: найти координаты вектора $\vec{c}$, если он коллинеарен вектору $\vec{a}\times\vec{в}$. Пусть λ – произвольное действительное число, тогда $\vec{c}=(-7\lambda;-5\lambda;-\lambda)$ ($\lambda\neq 0$). Искомый вектор должен удовлетворять условию $\vec{c}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{к})=10$. Выразим скалярное произведение векторов в координатной форме и решим полученное уравнение: $\vec{c}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{к})=10\Leftrightarrow -7\lambda-10\lambda+7\lambda=10\Leftrightarrow\lambda=-1$. Таким образом, координаты вектора $\vec{c}=(7;5;1)$.

Задача 14. Применение понятия *смешанное произведение векторов*

Найти координаты четвертой вершины тетраэдра *ABCD*, где *A*(–1; 10; 0), *B*(0; 5; 2), *C*(6; 32; 2), если известно, что она лежит на оси *Oy*, а объем тетраэдра равен 29 [1].

Решение. По условию вершина *D* лежит на оси *Oy*, следовательно, ее координаты *D*(0; *y*; 0).

Так как известен объем пирамиды, составим вспомогательную задачу: найти объем пирамиды с помощью смешанного произведения векторов. Воспользуемся формулой $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right|$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ и их смешанное произведение.

$$\overrightarrow{AB}(1;-5;2),\ \overrightarrow{AC}(7;22;2),\overrightarrow{AD}(1;y-10;0),\ \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}1 & -5 & 2\\ 7 & 22 & 2\\ 1 & y-10 & 0\end{vmatrix}=\left|12y-174\right|.$$

Из условия задачи следует: $V_{ABCD}=29$. Составим уравнение $\frac{1}{6}\left|12y-174\right|=29$ (вторая вспомогательная задача). Корни уравнения $y=0$ или $y=29$. Тогда координаты вершины *D*(0; 0; 0) или *D*(0; 29; 0).

Задача 15. Применение понятия *векторное произведение векторов*

В треугольнике *ABC* $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}-4\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{i}+\vec{k}$. Вычислить длину высоты *CH* треугольника [2].

Ситникова И. В. Некоторые аспекты обучения применению математических понятий в вузе // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14358. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14358.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Решение. Длину высоты треугольника можно найти, если известна площадь треугольника и длина стороны, на которую опущена высота. Формулируем две вспомогательные задачи: найти длину стороны *AB* и площадь треугольника *ABC*.

Длина стороны *AB* равна длине вектора $\overrightarrow{AB}$ и равна 5 (применяем формулу длины вектора через его координаты).

Площадь треугольника можно найти как половину длины векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Найдем вектор $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ и его длину (еще одна вспомогательная задача).

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -4 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-4\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k},\ \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{41}.$$

Тогда искомая высота равна $CH=\dfrac{2S_{ABC}}{AB}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{41}}{5}=\dfrac{\sqrt{41}}{5}$.

В заключение следует отметить, что умение применять понятия формируется при решении систем специально подобранных задач, которые должны удовлетворять определенным требованиям. Составление систем задач по каждой изучаемой теме является одной из методических задач, стоящих перед преподавателем математики.

Ссылки на источники

1. Ефимов А. В., Каракулин А. Ф., Кожухов И. Б., Поспелов А. С., Прокофьев А. А. Сборник задач по математике для втузов / под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – 4-е изд., перераб. И доп. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2001. – 288 с.
2. Шипачев В. С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов. – 5-е изд. – М.: Высш. шк., 2005. – 304 с.

ISSN 2304-120X
9 772304 120142 12

Irina Sitnikova,
Candidate of Pedagogic Sciences, Associate Professor at the chair of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University, Kirov
i.sitn@mail.ru

Some aspects of teaching the mathematical concepts application in higher educational institutions

Abstract. The paper is devoted to teaching the application of concepts at practical lessons of mathematics at higher educational institutions. The author points out the actions, implementation of which involves the mastery of the concept. On the example of one of the themes of linear algebra and analytical geometry the author shows how you can teach students to implement specified actions when solving mathematical problems.

Key words: definition of significant properties, elimination of consequences, conversion task.

References

1. Efimov, A. V., Karakulin, A. F., Kozhuhov, I. B., Pospelov, A. S. & Prokof'ev, A. A. (2001) *Sbornik zadach po matematike dlja vtuzov*, 4-e izd., pererab. i dop., Izd-vo fiziko-matematicheskoj literatury, Moscow, 288 p. (in Russian).
2. Shipachev, V. S. (2005) *Zadachnik po vysshej matematike: ucheb. posobie dlja vuzov*. 5-e izd., Vyssh. shk., Moscow, 304 p. (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»