КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Вечтомов Е. М. Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14335. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14335.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

ART 14335 УДК 372.851

Вечтомов Евгений Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и компьютерной математики ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров
vecht@mail.ru

Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы

Аннотация. *Статья написана на основе пленарного доклада, сделанного автором на Всероссийской научно-практической конференции «Математика и компьютерное моделирование в исследованиях студентов и школьников» (Киров, ВятГГУ, 14–15 мая 2013 г.). Выстраиваются акценты, и рассматривается порядок изучения элементов теории полугрупп студентами-математиками младших курсов и продвинутыми старшеклассниками.*
Ключевые слова: *ассоциативная алгебра, полугруппа, полугруппа слов, полугруппа преобразований, изучение теории полугрупп.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Я приветствую полугруппу,
где бы я ее ни встретил,
а встречается она повсюду.
Впрочем, от друзей я слышал,
что в математике попадаются объекты,
отличные от полугрупп.

Эйнар Хилле

Введение

Работа продолжает серию наших публикаций по развитию высшего алгебраического образования [4–11].

Каждому начинающему математику и информатику необходимо ознакомиться с началами теории полугрупп – с ее терминологией, исходными понятиями и фактами, методами и конструкциями, подходами и применениями.

Понятие полугруппы служит основой ***ассоциативной алгебры***, проникающей во многие разделы современной математики и ее приложения [1, 3, 10, 15–21, 23–25, 30]. Теории полугрупп посвящены монографии [16–18, 24, 29, 30], обзоры [12–14, 25], научно-популярные статьи [26–28], специализированный научный журнал [31]. Монография советского украинского математика Антона Каземировича Сушкевича (1889–1961) «Теория обобщенных групп» (так сначала назывались полугруппы) 1937 г. [22] была первой книгой в мировой литературе по полугруппам.

В СССР центрами теоретико-полугрупповых исследований были города Баку, Ленинград (Санкт-Петербург), Москва, Новосибирск, Саратов, Свердловск (Екатеринбург), Харьков. Международное признание получили алгебраические школы профессора Евгения Сергеевича Ляпина (1914–2005) из Российского государственного педагогического университета (Санкт-Петербург) и профессора Льва Наумовича Шеврина (1935 г. р.) из Уральского федерального университета (Екатеринбург). Отметим, что в редколлегию журнала “Semigroup Forum” входят Л. Н. Шеврин и его ученик профессор М. В. Волков (1955 г. р.), а также американский профессор Б. М. Шайн (1938 г. р.) – выпускник Саратовского госуниверситета.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14335 УДК 372.851
Вечтомов Е. М. Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14335. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14335.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Одним из создателей теории полугрупп является американский алгебраист Альфред Клиффорд (1908–1992) – соавтор известного двухтомника [16]. Назовем также такие имена зарубежных математиков, внесших заметный вклад в современную теорию полугрупп и ее приложения, как Дж. Грин, Ж. Лаллеман, Г. Престон, Д. Рис, Э. Хилле, М. Шютценберже.

Определения. Примеры. Свойства

Бинарной алгебраической операцией на непустом множестве A называется произвольное отображение ω: $A\times A\to A$; оно каждой упорядоченной паре элементов $a, b\in A$ ставит в соответствие вполне определенный элемент $a\omega b\in A$. Непустое множество A с некоторой заданной на нем бинарной алгебраической операцией ω называется ***группоидом*** (при этом говорят также о паре $\langle A, \omega\rangle$).

Операция ω на A называется ***ассоциативной***, если $(a\omega b)\omega c=a\omega(b\omega c)$ для любых элементов $a, b, c\in A$. Группоид с ассоциативной операцией называется ***полугруппой*** (semigroup).

Отображение α: $\langle A, \omega\rangle\to\langle B, \varpi\rangle$ группоидов называется ***гомоморфизмом***, если оно сохраняет операцию, то есть $\alpha(x\omega y)=\alpha(x)\varpi\alpha(y)$ для любых $x, y\in A$. Взаимно однозначный гомоморфизм α одного группоида на другой называется их ***изоморфизмом*** (нетрудно показать, что обратное отображение α^{-1} также будет изоморфизмом). Группоиды называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм. Отношение изоморфности на классе всех группоидов является отношением эквивалентности. Изоморфные группоиды имеют одни и те же абстрактные свойства. Например, группоид, изоморфный полугруппе, сам будет полугруппой.

Дадим еще несколько исходных определений.

Полугруппа A называется:

моноидом, если в A существует ***нейтральный элемент***, то есть такой элемент $e\in A$, что на A тождественно $x\omega e=x=e\omega x$ (легко видеть, что нейтральный элемент единственен);

коммутативной, если ее операция ω коммутативна, то есть в A выполняется тождество $x\omega y=y\omega x$;

идемпотентной (или ***связкой***), если A удовлетворяет тождеству $x\omega x=x$ (такие элементы x называются ***идемпотентами***);

полурешеткой, когда она коммутативна и идемпотентна;

сократимой слева (***справа***), когда удовлетворяет квазитождеству

$$xy=xz \Rightarrow y=z \text{ (соответственно, } xz=yz \Rightarrow x=y).$$

Для изображения группоидов применяются ***таблицы Кэли***, названные так по имени английского математика Артура Кэли (1821–1895).

Выясним, сколько всего существует двухэлементных полугрупп. Для этого сначала найдем все двухэлементные группоиды.

Любопытно, что всего существуют 24 попарно неизоморфные трехэлементные полугруппы, 188 четырехэлементных полугрупп, 1915 пятиэлементных полугрупп, 28634 шестиэлементные полугруппы [25, с. 66].

Таблицей Кэли для группоида $\langle\{a, b\}, \omega\rangle$ служит таблица:

ω	a	b
a	$a\omega a$	$a\omega b$
b	$b\omega a$	$b\omega b$

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14335 УДК 372.851
Вечтомов Е. М. Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14335. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14335.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Всего таких таблиц будет $2^4=16$. Изобразим их:

1	*a*	*b*
a	*a*	*a*
b	*a*	*a*

2	*a*	*b*
a	*a*	*a*
b	*a*	*b*

3	*a*	*b*
a	*a*	*a*
b	*b*	*a*

4	*a*	*b*
a	*a*	*a*
b	*b*	*b*

5	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*a*	*a*

6	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*a*	*b*

7	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*b*	*a*

8	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*b*	*b*

9	*a*	*b*
a	*b*	*a*
b	*a*	*a*

10	*a*	*b*
a	*b*	*a*
b	*a*	*b*

11	*a*	*b*
a	*b*	*a*
b	*b*	*a*

12	*a*	*b*
a	*b*	*a*
b	*b*	*b*

13	*a*	*b*
a	*b*	*b*
b	*a*	*a*

14	*a*	*b*
a	*b*	*b*
b	*a*	*b*

15	*a*	*b*
a	*b*	*b*
b	*b*	*a*

16	*a*	*b*
a	*b*	*b*
b	*b*	*b*

Среди 16 представленных группоидов некоторые группоиды изоморфны друг другу при отображении α: $a\to b$, $b\to a$. Например, изоморфны группоиды, заданные таблицами 1 и 16. Это будем записывать как $1\cong16$ и говорить просто о группоидах 1 и 16. Некоторые группоиды могут быть изоморфны только самим себе.

Найдем группоид (его таблицу), изоморфный группоиду 2. Используем мультипликативную запись операций. Для любых элементов x, $y\in\{a, b\}$ должны получить в новом группоиде

$$xy=\alpha(\alpha^{-1}(x)\cdot\alpha^{-1}(y))=(x\alpha^{-1}\cdot y\alpha^{-1})\alpha,$$

где умножение в скобках производится в группоиде 2. Итак, имеем: $aa=(a\alpha^{-1}\cdot a\alpha^{-1})\alpha=(bb)\alpha=b\alpha=a$, $ab=(ba)\alpha=a\alpha=b$, $ba=(ab)\alpha=a\alpha=b$ и $bb=(aa)\alpha=a\alpha=b$. В результате мы получаем группоид 8. Значит, $2\cong8$. Аналогично находим, что $3\cong12$, $4\cong4$, $5\cong14$, $6\cong6$, $7\cong10$, $9\cong15$, $11\cong11$ и $13\cong13$.

Всего получаем 10 попарно неизоморфных двухэлементных группоидов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13. См. [3, с. 53–55].

Далее мы будем использовать ***мультипликативную терминологию***: полугрупповая операция – умножение «$\cdot$», результат $a\cdot b=ab$ – произведение, нейтральный элемент – единица 1. Наряду с мультипликативной символикой применяются и аддитивные обозначения: операция сложения «+», результат $a+b$ – сумма, нейтральный элемент – нуль 0. Часто полугруппы задаются ***образующими элементами*** и ***определяющими соотношениями***. Например, полугруппа, определяемая двумя образующими a, b и тремя равенствами $ab=ba$, $a^2=a$ и $b^3=b$, имеет 5 элементов: a, ab, ab^2, b, b^2 – в *лексикографической* записи.

Важнейший класс полугрупп образуют группы. ***Группой*** называется такой моноид, что каждый его элемент a имеет обратный элемент a^{-1}: $aa^{-1}=a^{-1}a=1$ (такой элемент a^{-1} единственен). Отметим, что кольца, полукольца, решетки являются полугруппами по обеим операциям.

Полугруппа с тождеством $xy=x$ ($xy=y$) называется ***полугруппой левых*** (***правых***) ***нулей***. Такие полугруппы идемпотентны. ***Многообразием полугрупп*** называется класс всех полугрупп, удовлетворяющих заданному набору тождеств. Так, идемпотентные полугруппы образуют многообразие. Многообразие полугрупп назы-

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14335 УДК 372.851
Вечтомов Е. М. Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14335. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14335.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

вается ***тривиальным***, если оно задается тождеством $x=y$; это класс всех одноэлементных полугрупп (изоморфных друг другу).

Укажем два интересных факта об идемпотентных полугруппах. Во-первых, существует ровно три минимальных нетривиальных многообразия идемпотентных полугрупп: класс полугрупп левых нулей, класс полугрупп правых нулей, класс полурешеток [25, с. 163]. Во-вторых, всякая конечно порожденная идемпотентная полугруппа конечна [17, с. 352].

Множество всех действительных (рациональных, целых, натуральных, комплексных) чисел является сократимой коммутативной полугруппой, как по умножению, так и по сложению. Операция вычитания на множестве целых чисел не ассоциативна и не коммутативна, так же как и операция возведения в степень (x^y) на множестве натуральных чисел. В теории представлений полугрупп заметное место занимают мультипликативные полугруппы квадратных матриц с комплексными коэффициентами.

Основными модельными примерами полугрупп выступают ***полугруппы слов*** и ***полугруппы преобразований***.

Возьмем непустое множество X, называемое ***алфавитом***. Его элементы называют ***буквами***, а конечные последовательности букв называются ***словами*** (можно ввести пустое слово, а также бесконечные слова). Пусть $A(X)$ – множество всех слов в алфавите X, рассматриваемое с операцией ***конкатенации*** (приписывания) слов: к слову $(a_1a_2…a_m)$ длины m справа добавляется слово $(b_1b_2…b_n)$ длины n с результатом словом $(a_1a_2…a_mb_1b_2…b_n)$ длины $m+n$. Получаем так называемую ***свободную полугруппу*** $A(X)$ над X: она бесконечна и сократима с обеих сторон; ее коммутативность равносильна тому, что X одноэлементно. Любая полугруппа изоморфна фактор-полугруппе некоторой свободной полугруппы $A(X)$. Полугруппы слов играют большую роль как в общей теории полугрупп, так и в комбинаторных приложениях. Слова в однобуквенном алфавите {|} моделируют натуральные числа: |, ||, |||, ||||, … . Азбука Морзе (телеграфная азбука) имеет двухбуквенный алфавит {·, –}, в котором кодируются обычные буквы и знаки препинания, слова, предложения, сообщения.

Другой фундаментальный тип полугрупп составляют полугруппы преобразований. Обозначим через $T(X)$ множество всевозможных отображений $X\to X$ фиксированного множества X, называемых *преобразованиями* X. Относительно операции ***композиции*** (суперпозиции, последовательного выполнения преобразований) $T(X)$ становится моноидом. Действительно, для любых $f, g\in T(X)$ их композиция $fg=g\circ f$, определяемая соотношением

$$x(fg)=(xf)g \text{ при всех } x\in X,$$

задает ассоциативную операцию на $T(X)$, так как для всех f, g, $h\in T(X)$ и $x\in X$:

$$x((fg)h)=((xf)g)h=(xf)(gh)=x(f(gh)).$$

Роль единицы играет тождественное отображение 1_X.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "fg"] & X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "gh"'] & X \arrow[r, "h"] & X
\end{tikzcd}$$

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14335 УДК 372.851
Вечтомов Е. М. Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14335. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14335.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

В любой полугруппе выполняется

Обобщенный закон ассоциативности. *Произведение $a_1a_2…a_n$ любого конечного числа элементов полугруппы не зависит от расстановки скобок.*

Индукцией по числу n сомножителей доказывается, что $a_1a_2…a_n=(…((a_1a_2)a_3)…a_{n-1})a_n$. Заметим, что число расстановок скобок в произведении $a_1a_2…a_n$ есть соответствующее ***число Каталана***: при $n=3$ имеем значение 2, при $n=4$ получаем 5, при $n=5$ имеем 14. В общем случае для $n\geq 3$ имеем число сочетаний из $2(n-1)$ по $n-1$, деленное на n.

Представление полугрупп преобразованиями

Пусть дана произвольная полугруппа A. Для каждого ее элемента a положим

$$T_a: A\to A,\ xT_a=xa \text{ для всех } x\in A,$$

это правый сдвиг полугруппы A на элемент a. Рассмотрим отображение $\alpha: A\to T(A)$, $\alpha(a)=T_a$ для любого $a\in A$.

Поскольку для любых $a, b\in A$ и $x\in A$ имеем

$$x\alpha(ab)=xT_{ab}=x(ab)=(xa)b=(xT_a)T_b=(x\alpha(a))\alpha(b)=x(\alpha(a)\alpha(b)),$$

то α есть гомоморфизм данной полугруппы A в полугруппу преобразований $T(A)$. Посмотрим, является ли α (изоморфным) вложением, то есть инъективным гомоморфизмом? Инъективность α означает, что $T_a\neq T_b$ при неравных $a, b\in A$. Но в случае полугруппы левых нулей $xa=x=xb$ при любых $a, b\in A$. Поэтому α не обязано быть вложением. Конечно, во многих других случаях (например, когда полугруппа A имеет левую единицу или сократима слева) α будет вложением.

Принципиальное значение полугрупп преобразований обосновывает

Обобщенная теорема Кэли. *Всякая полугруппа A изоморфно вкладывается в соответствующую полугруппу преобразований $T(X)$.*

Для доказательства обобщенной теоремы Кэли достаточно к полугруппе A присоединить (новую) единицу е и взять моноид $A_e=A\cup\{e\}$. Тогда полугруппа A изоморфно вкладывается в моноид A_e, который, в свою очередь, при помощи α, изоморфно вкладывается в полугруппу преобразований $T(A_e)$.

Циклические полугруппы

Среди абстрактных полугрупп выделяется класс простейших полугрупп – циклические (или моногенные) полугруппы, порожденные одним элементом. Именно, полугруппа A называется ***циклической***, если $A=\{a^m: m\in \mathbf{N}\}$ для некоторого элемента $a\in A$ – ее ***образующего***. Любая полугруппа есть теоретико-множественное объединение подполугрупп, являющихся циклическими полугруппами.

Если степени образующего элемента a с различными показателями различны, то получаем бесконечную циклическую полугруппу $A=\{a, a^2, a^3, …, a^m, …\}$, изоморфную аддитивной полугруппе $\langle \mathbf{N}, +\rangle$ натуральных чисел. В противном случае найдутся такие натуральные числа k и n, что $a^k=a^{k+n}$. Считаем k наименьшим натуральным числом с таким условием, а n – наименьшим натуральным числом со свойством $a^k=a^{k+n}$ для указанного значения k. Получаем ***циклическую полугруппу типа*** (k, n)

$$A=\{a, …, a^{k-1}, a^k, …, a^{k+n-1}\},$$

содержащую ровно $k+n-1$ элементов.

Строение конечных циклических полугрупп. *Конечные циклические полугруппы совпадают, с точностью до изоморфизма, с циклическими полугруппами типа (k, n), где k и n – произвольные натуральные числа.*

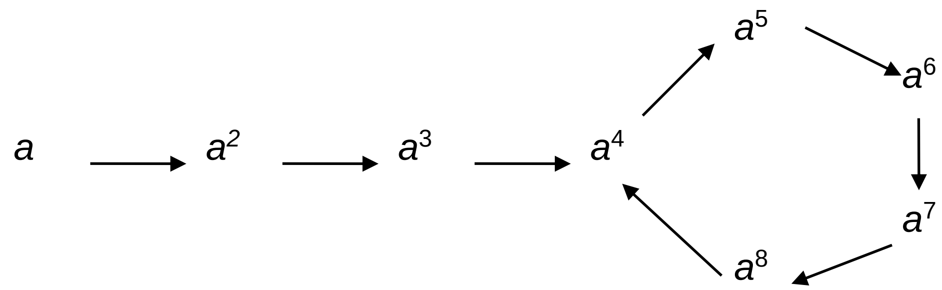
Множество $\{a, …, a^{k-1}\}$ называют ***хвостом*** A, а множество $\{a^k, …, a^{k+n-1}\}$ – ее ***циклом***. При $k=1$ получаем циклическую группу порядка n, а при $n=1$ получаем хвост

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14335 УДК 372.851

Вечтомов Е. М. Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14335. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14335.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

с добавленным ***поглощающим*** элементом a^k. Любую циклическую полугруппу можно изобразить в виде простого ориентированного графа, соединяя стрелкой элемент a^m с элементом a^{m+1} при $m \in \mathbf{N}$.

Вот как выглядит граф циклической полугруппы типа (4, 5):



Связь с другими математическими структурами

Пусть теперь X – некоторый математический объект, скажем, алгебраическая структура, упорядоченное множество или топологическое пространство. Через $S(X)$ обозначим полугруппу всех его эндоморфизмов, рассматриваемую как подполугруппа в $T(X)$. ***Эндоморфизмом*** математического объекта X называется преобразование множества X, сохраняющее все его структурные операции и отношения. Эндоморфизмы в случае алгебраической структуры суть гомоморфизмы в себя, в случае порядковой структуры – изотонные преобразования, в случае топологической структуры – непрерывные преобразования. Полугруппа эндоморфизмов $S(X)$ математического объекта X несет существенную (иногда исчерпывающую) информацию о самом объекте X. В частности, достаточно активно изучались полугруппы непрерывных преобразований топологических пространств [2, § 4].

Сформулируем один результат автора на эту тему. На полугруппе $S(X)$ непрерывных преобразований топологического пространства X введем ***топологию поточечной сходимости***, то есть топологию подпространства, индуцированную топологией произведения на множестве X^X всех преобразований пространства X. В результате получим полутопологическую полугруппу $S_p(X)$: в ней операция композиции непрерывна по каждому из сомножителей, но не обязана быть непрерывной. Имеет место следующий результат:

Теорема определяемости [2, предложение 4.14]. *Произвольные топологические пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда между полутопологическими полугруппами $S_p(X)$ и $S_p(Y)$ существует полугрупповой изоморфизм, являющийся одновременно их гомеоморфизмом.*

Применения

Абстрактная теория полугрупп успешно применяется в дискретной и компьютерной математике, в теории формальных языков, в теории конечных автоматов, в теории кодирования и криптографии. Большую роль играют алгоритмические и комбинаторные аспекты и приложения теории полугрупп. Затронем только следующие сюжеты.

Пионером в теории формальных языков по праву считается норвежский математик Аксель Туэ (1963–1922). В 1912 г он решил задачи существования и строения бесквадратных слов и сильно бескубных слов. Слово или бесконечное слово в алфавите X называется ***бесквадратным*** (***сильно бескубным***), если оно не содержит подслов вида ww (wwa), где a – первая буква слова w. Туэ показал, что в двухбуквенном алфавите существует сильно бескубное бесконечное слово и нет бесквадрадратных слов длины ≥ 4, а также построил бесквадратное бесконечное слово в трехбуквенном алфавите [21, с. 18]. См. также упражнения к главе 1 книги [21].

Английский алгебраист Уильям Бернсайд (1852–1927), являющийся одним из создателей абстрактной теории групп, поставил в 1902 г. следующий вопрос: обязана ли конечно порожденная периодическая группа быть конечной? Российский алгебраист Евгений Соломонович Голод (1935 г. р.) дал в 1964 г. отрицательный ответ на этот вопрос. Более сильная ***ограниченная проблема Бернсайда*** формулируется так: каждая ли конечно порожденная группа, удовлетворяющая тождеству $x^n=1$ для фиксированного натурального числа n, конечна? Советские математики Петр Сергеевич Новиков (1901–1975) и Сергей Иванович Адян (1931 г. р.) построили в 1968 г. бесконечные такие группы для всех достаточно больших нечетных n. Аналогичные вопросы были поставлены и для полугрупп так называемого бернсайдовского типа. Именно, через $B(k, m, n)$, $m< n$, обозначается полугруппа с k свободными образующими в многообразии полугрупп с одним тождеством $x^m=x^n$. Как уже отмечалось, полугруппа $B(k, 1, 2)$ конечна. Полугруппа $B(2, 1, 3)$ имеет 132 элемента. А полугруппы $B(k, m, n)$ при $k\geq 2$ и $m\geq 2$ бесконечны [17, с. 352–353].

Исследования по полугруппам и их приложениям продолжаются. В частности, остается актуальной ***проблема равенства слов*** в некоторых полугруппах, задаваемых образующими и определяющими соотношениями. Так, построена полугруппа с двумя образующими a, b и тремя определяющими соотношениями, для которой не существует алгоритма распознавания равенства двух произвольных слов в алфавите $\{a, b\}$. Любая же конечно порожденная коммутативная полугруппа имеет алгоритмически разрешимую проблему равенства слов. См. [25, с. 167–169].

Упражнения

Студентам полезно самостоятельно прорешать следующие задачи:

1. Докажите, что всякая конечная полугруппа имеет хотя бы один идемпотент.
2. Найдите с точностью до изоморфизма все двухэлементные полугруппы. Что значит «описать с точностью до изоморфизма»?
3. Что такое левая (правая) единица в полугруппе? Левый (правый) нуль?
4. Покажите, что если полугруппа обладает левой единицей и правой единицей, то она является моноидом.
5. Докажите, что конечные сократимые слева и справа полугруппы будут группами.
6. Проверьте, что в любом конечном моноиде справедливо соотношение $xy=1 \Rightarrow yx=1$.
7. Если допустить пустое слово, то $A(X)$ будет моноидом. Почему?
8. Докажите, что множество всех обратимых элементов произвольного моноида A образует группу A^* – подполугруппу в A.
9. Что представляет собой группа $T(X)^*$? Если X – n-элементное множество ($n\in \mathbf{N}$), то группа $T(X)^*$ изоморфна симметрической группе S_n – группе всех подстановок n-й степени. Убедитесь в этом.
10. Докажите, что любая конечная циклическая полугруппа изоморфна гомоморфному образу полугруппы $\langle \mathbf{N}, +\rangle$.
11. Постарайтесь доказать, что любая полугруппа с тождеством $xyx=x$ изоморфна прямому произведению полугруппы левых нулей и полугруппы правых нулей.
12. Покажите, что на любой полурешетке A можно определить отношение порядка по формуле: $a\leq b \Leftrightarrow ab=a$, причем $ab=\inf(a, b)$ для всех $a, b\in A$.
13. Постройте свободную коммутативную полугруппу с тремя свободными образующими (над трехэлементным множеством X).
14. Найдите свободную идемпотентную полугруппу с двумя свободными образующими.
15. Что представляет собой свободная полурешетка с n свободными образующими?

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14335 УДК 372.851
Вечтомов Е. М. Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14335. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14335.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Ссылки на источники

1. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра / пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 400 с.
2. Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 28. – М.: ВИНИТИ, 1990. – С. 3–46.
3. Вечтомов Е. М. Основные математические структуры. – Киров: ВятГГУ, 2013. – 292 с.
4. Вечтомов Е. М. Изучение начал теории групп // Труды Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство». – Плоцк (Польша), 2010. – С. 91–100.
5. Вечтомов Е. М. Алгебраические аспекты логики высказываний // Материалы III Всероссийской научно-практической конференции «Настоящее и будущее физико-математического образования: Формирование методологической культуры». – Киров: ФМЛ г. Кирова, 2012. – С. 90–96.
6. Вечтомов Е. М. Тестовые задачи по абстрактной алгебре // Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции «Преподавание математики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики». – Глазов: ГГПИ, 2012. – С. 8–15.
7. Вечтомов Е. М. О преподавании абстрактной алгебры магистрантам-математикам // Всероссийская научно-методическая конференция с международным участием «Проблемы совершенствование математической подготовки в школе и вузе». – М.: МПГУ, 2012. – С. 243–245.
8. Вечтомов Е. М. Курс «Современная алгебра» для магистрантов математических профилей // Сб. статей по материалам Всерос. науч.-практ. конф. преподавателей, аспирантов, магистрантов и учителей. – Н. Новгород: НГПУ им. К. Минина, 2013. – С. 47–52.
9. Вечтомов Е. М. Алгебраическое образование и алгебраические исследования в ВятГГУ // Проблемы математического образования в вузах и школах России в условиях его модернизации: сб. материалов IV Всерос. науч.-методич. конф. – Сыктывкар: СыктГУ, 2014. – С. 148–155.
10. Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. Абстрактная алгебра. Базовый курс: учеб. пособие. – Киров: Изд-во ВятГГУ, ООО «Радуга-ПРЕСС», 2014. – 260 с.
11. Вечтомов Е. М., Чермных В. В. Изучение алгебраической структуры // Вестник ВятГГУ. – 2012. – № 1(3). – С. 41–48.
12. Глускин Л. М. Полугруппы // Итоги науки. Алгебра. Топология. – М.: ВИНИТИ, 1962 (1963). – С. 33–58.
13. Глускин Л. М. Полугруппы // Сер. Математика. Итоги науки. Алгебра. – М.: ВИНИТИ, 1964 (1966). – С. 161–202.
14. Глускин Л. М., Шайн Б. М., Шеврин Л. Н. Полугруппы // Сер. Математика. Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. – М.: ВИНИТИ, 1966 (1968). – С. 9–56.
15. Замятин А. П., Шур А. М. Языки, грамматики, распознаватели. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2007. – 248 с.
16. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. / пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 286 с.; Т. 2. – 422 с.
17. Лаллеман Ж. Полугруппы и их комбинаторные приложения / пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 440 с.
18. Ляпин Е. С. Полугруппы. – М.: Физматгиз, 1960. – 592 с.
19. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Частичные алгебраические действия. – СПб.: Образование, 1991. – 164 с.
20. Марков Ал. А. Теория кодирования. – М.: Наука, 1982. – 192 с.
21. Саломаа А. Жемчужины теории формальных языков / пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
22. Сушкевич А. К. Теория обобщенных групп. – Харьков; Киев: Гос. науч.-техн. изд-во Укр., 1937. – 176 с.
23. Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру / пер. с венг. – М.: Мир, 1979. – 260 с.
24. Хилле Е., Филипс Р. Функциональный анализ и полугруппы / пер. с англ. – М.: ИЛ, 1962. – 830 с.
25. Шеврин Л. Н. Полугруппы // Общая алгебра. Т. 2 / под общ. ред. Л. А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – С. 11–191.
26. Шеврин Л. Н. Тождества полугрупп // Соросовский образовательный журнал. – 1996. – № 7. – С. 111–118.
27. Шеврин Л. Н. Что такое полугруппа // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 4. – С. 99–104.
28. Шеврин Л. Н. Как возникают группы при изучении полугрупп // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 11. – С. 114–119.
29. Шеврин Л. Н., Овсянников А. Я. Полугруппы и их подполугрупповые решетки: в 2 ч. – Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1990. – Ч. 1. – 238 с.; 1991. – Ч. 2. – 246 с.
30. Howie J. M. Fundamentals of semigroup theory. – Oxford: London mathematical society, Clarendon press, 1995. – 361 p.
31. Semigroup Forum: американский журнал издательства Springer, выходит с 1970 г.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Вечтомов Е. М. Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14335. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14335.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.
ART 14335 УДК 372.851
ISSN 2304-120X
Evgeny Vechtomov,
Doctor of Physic-Mathematical Sciences, Professor, head of the chair of Fundamental and Computer Mathematics, Vyatka State University of Humanities, Kirov
vecht@mail.ru
Acquaintance with the abstract algebra: semigroups
Abstract. The paper is written on the basis of the plenary report, made by the author at the All-Russian Scientific-Practical Conference "Mathematics and Computer Modeling in studies of students and pupils" (Kirov, 14-15 May 2013). The paper places accents on the process of explaining elements of Semigroup Theory to students of junior courses, studying Mathematics, and to advanced high school pupils.
Key words: associative algebra, semigroup, semigroup of words, semigroup of transformations, study of Semigroup Theory.
References
1. Birkgof, G. & Barti, T. (1976) *Sovremennaja prikladnaja algebra / per. s anglю*, Mir, Moscow, 400 p. (in Russian).
2. Vechtomov, E. M. (1990) "Voprosy opredeljaemosti topologicheskih prostranstv algebraicheskimi sistemami nepreryvnyh funkcij", *Itogi nauki i tehniki. Algebra. Topologija. Geometrija. T. 28*, VINITI, Moscow, pp. 3–46 (in Russian).
3. Vechtomov, E. M. (2013) *Osnovnye matematicheskie struktury*, VjatGGU, Kirov, 292 p. (in Russian).
4. Vechtomov, E. M. (2010) "Izuchenie nachal teorii grupp", in *Trudy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Obrazovanie, nauka i jekonomika v vuzah. Integracija v mezhdunarodnoe obrazovatel'noe prostranstvo", Plock (Pol'sha),* pp. 91–100 (in Russian).
5. Vechtomov, E. M. (2012) "Algebraicheskie aspekty logiki vyskazyvanij", in *Materialy III Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii "Nastojashhee i budushhee fiziko-matematicheskogo obrazovanija: Formirovanie metodologicheskoj kul'tury"*, FML g. Kirova, Kirov, pp. 90–96 (in Russian).
6. Vechtomov, E. M. (2012) "Testovye zadachi po abstraktnoj algebre", in *Materialy IV Vserossijskoj nauch-no-prakticheskoj konferencii "Prepodavanie matematiki v shkolah i vuzah: problemy soderzhanija, tehnologii i metodiki"*, GGPI, Glazov, pp. 8–15 (in Russian).
7. Vechtomov, E. M. (2012) "O prepodavanii abstraktnoj algebry magistrantam-matematikam", *Vserossijskaja nauchno-metodicheskaja konferencija s mezhdunarodnym uchastiem "Problemy sovershenstvovanie matematicheskoj podgotovki v shkole i vuze"*, MPGU, Moscow, pp. 243–245 (in Russian).
8. Vechtomov, E. M. (2013) "Kurs 'Sovremennaja algebra' dlja magistrantov matematicheskih profilej", in *Sb. statej po materialam Vseros. nauch.-prakt. konf. prepodavatelej, aspirantov, magistrantov i uchitelej*, NGPU im. K. Minina, N. Novgorod, pp. 47–52 (in Russian).
9. Vechtomov, E. M. (2014) "Algebraicheskoe obrazovanie i algebraicheskie issledovanija v VjatGGU", in *Problemy matematicheskogo obrazovanija v vuzah i shkolah Rossii v uslovijah ego modernizacii: sb. materialov IV Vseros. nauch.-metodich. konf.*, SyktGU, Syktyvkar, pp. 148–155 (in Russian).
10. Vechtomov, E. M. & Sidorov, V. V. (2014) *Abstraktnaja algebra. Bazovyj kurs: ucheb. posobie*, Kirov, Izd-vo VjatGGU, OOO "Raduga-PRESS", 260 p. (in Russian).
11. Vechtomov, E. M. & Chermnyh, V. V. (2012) "Izuchenie algebraicheskoj struktury", *Vestnik VjatGGU*, № 1(3), pp. 41–48 (in Russian).
12. Gluskin, L. M. (1962 (1963)) "Polugruppy", *Itogi nauki. Algebra. Topologija,* VINITI, Moscow, pp. 33–58 (in Russian).
13. Gluskin, L. M. (1964 (1966)) "Polugruppy", *Ser. Matematika. Itogi nauki. Algebra,* VINITI, Moscow, pp. 161–202 (in Russian).
14. Gluskin, L. M., Shajn, B. M. & Shevrin L. N. (1966 (1968)) "Polugruppy", *Ser. Matematika. Itogi nauki. Algebra. Topologija. Geometrija,* VINITI, Moscow, pp. 9–56 (in Russian).
15. Zamjatin, A. P. & Shur, A. M. (2007) *Jazyki, grammatiki, raspoznavateli*, Izd-vo Ural. un-ta, Ekaterinburg, 248 p. (in Russian).
16. Klifford, A. & Preston, G. *Algebraicheskaja teorija polugrupp: v 2 t. / per. s angl.,* Mir, Moscow, 1972, t. 1, 286 p.; t. 2, 422 p. (in Russian).
17. Lalleman, Zh. (1985) *Polugruppy i ih kombinatornye prilozhenija / per. s angl.*, Mir, Moscow, 440 p. (in Russian).
18. Ljapin, E. S. (1960) *Polugruppy*, Fizmatgiz, Moscow, 592 p. (in Russian).
19. Ljapin, E. S. & Evseev, A. E. (1991) *Chastichnye algebraicheskie dejstvija*, Obrazovanie, St. Peterburg, 164 p. (in Russian).
20. Markov, Al. A. (1982) *Teorija kodirovanija*, Nauka, Moscow, 192 p. (in Russian).
21. Salomaa, A. (1986) *Zhemchuzhiny teorii formal'nyh jazykov / per. s angl.*, Mir, Moscow, 160 p. (in Russian).
22. Sushkevich, A. K. (1937) *Teorija obobshhennyh grupp*, Gop. nauch.-tehn. izd-vo Ukr., Har'kov; Kiev, 176 p. (in Russian).

Вечтомов Е. М. Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы // Концепт. – 2014. – № 12 (декабрь). – ART 14335. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14335.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

23. Frid, Je. (1979) *Jelementarnoe vvedenie v abstraktnuju algebru / per. s veng.*, Mir, Moscow, 260 p. (in Russian).
24. Hille, E. & Filips, R. (1962) *Funkcional'nyj analiz i polugruppy / per. s angl.,* IL, Moscow, 830 p. (in Russian).
25. Shevrin, L. N. (1991) "Polugruppy", in Skornjakov, L. A. (ed.) *Obshhaja algebra. T. 2*, Nauka, Moscow, pp. 11–191 (in Russian).
26. Shevrin, L. N. (1996) "Tozhdestva polugrupp", *Sorosovskij obrazovatel'nyj zhurnal*, № 7, pp. 111–118 (in Russian).
27. Shevrin, L. N. (1997) "Chto takoe polugruppa", *Sorosovskij obrazovatel'nyj zhurnal*, № 4, pp. 99–104 (in Russian).
28. Shevrin, L. N. (1997) "Kak voznikajut gruppy pri izuchenii polugrupp", *Sorosovskij obrazovatel'nyj zhurnal*, № 11, pp. 114–119 (in Russian).
29. Shevrin, L. N. & Ovsjannikov A. Ja. *Polugruppy i ih podpolugruppovye reshetki: v 2 ch.,* Izd-vo Ural. un-ta, 1990, ch. 1, 238 p.; 1991, ch. 2, Sverdlovsk 246 p. (in Russian).
30. Howie, J. M. (1995) *Fundamentals of semigroup theory*, London mathematical society, Clarendon press, Oxford, 361 p. (in English).
31. Semigroup Forum / Amerikanskij zhurnal izdatel'stva Springer, vyhodit s 1970 g. (in English).

Рекомендовано к публикации:
Зиновкиной М. М., доктором педагогических наук, профессором, членом редакционной коллегии журнала «Концепт»