КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Арзамасцев А. Л., Гомонов С. А. Вечные «невидимки» школьного курса математики, или Функциональные уравнения в школе вчера, сегодня, завтра // Концепт. – 2015. – № 01 (январь). – ART 15002. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15002.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.
ART 15002 УДК 372.851

Арзамасцев Алексей Леонидович,
студент V курса физико-математического факультета направления подготовки «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВПО «Смоленский государственный университет», г. Смоленск
alexd8089@gmail.com

Гомонов Сергей Анатольевич,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВПО «Смоленский государственный университет», г. Смоленск
rectorat@smolgu.ru

Вечные «невидимки» школьного курса математики, или Функциональные уравнения в школе вчера, сегодня, завтра

Аннотация. *Статья носит методический и научно-популярный характер и посвящена некоторым проблемам преподавания тех разделов школьного курса математики, где фактически применяется такое понятие, как функциональное уравнение, но без использования соответствующих аккуратных определений.*
Ключевые слова: *функция, основные операции над функциями, функциональное уравнение, четность, нечетность, периодичность.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

1. Вузовская подготовка школьного учителя математики всегда предполагала приобретение им навыков сознательного владения теми математическими понятиями, которые ему придется использовать, как говорится, по долгу службы. Однако некоторые фундаментальные математические понятия (например, понятие действительного числа) слишком сложны, чтобы аккуратное их определение стало предметом изучения в рамках школьного курса математики. При этом сам учитель в принципе должен весьма хорошо владеть этими понятиями, более того, он должен уметь думать соответствующими категориями, причем настолько мастерски, чтобы демонстрация примеров применения сложного понятия была бы образцово-показательной и достойной подражания (особенно если обучение вынужденно идет в соответствии с принципом «делай как я»).

2. Стоит отметить, что кроме естественной сложности рассмотрения ряда математических понятий из-за их высокого уровня абстрактности есть и другие причины, мешающие аккуратному изложению соответствующего материала. Остановимся на некоторых из них.

Во-первых, это может быть традиционное отсутствие соответствующего определения в школьном курсе математики при одновременном весьма широком использовании самого понятия. Именно в этом весьма странном положении оказалось такое важное математическое понятие, как «функциональное уравнение», так как использование функциональных уравнений в школьном курсе математики имеет место, а вот соответствующего определения и самого термина (имени) «функциональное уравнение» нет. Парадоксально, но это «безымянное» понятие (некий математический аноним) присутствует на страницах школьных учебников по алгебре и началам анализа как какой-нибудь герой-невидимка, законспирированный до такой степени, что даже сам факт использования этого понятия обычно ускользает от всевидящего учительского ока. Причем виноватым оказывается не столько сам учитель, сколько некоторые проблемы в его подготовке, ведь только в последние годы появление курса дискретной математики среди прочих вузовских курсов изменило ситуацию: студентов стали знакомить с неко-

торыми классами функциональных уравнений (например, с рекуррентными соотношениями) и даже учить применять некоторые методы их решения.

Стоит отметить, что функциональные уравнения оказались забыты до такой степени, что были сделаны попытки сам термин «функциональное уравнение» использовать в качестве имени для «обычного» уравнения вида $f(x)=\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – обозначения для некоторых функций.

Во-вторых, весьма плохую услугу процессу качественного изучения ряда фундаментальных понятий (в рамках школьного курса математики) оказывает устоявшаяся упрощенная символика, которая может стать источником недоразумений и даже ошибок. Так, например, в школьном курсе математики после рассмотрения понятия функции и определения равных функций начинают заниматься основными («арифметическими») операциями над функциями, причем процесс изучения «оперативных» свойств функций в рамках школьного курса математики включает в себя как бы две линии, две тенденции:

главенствующую тенденцию – рассмотрение и использование тех свойств основных операций над функциями, которые аналогичны соответствующим свойствам операции – «тёзок» над действительными числами;

второстепенную («теневую») тенденцию – исследование тех свойств основных операций над функциями, которые существенно отличаются от свойств одноименных операций над действительными числами.

Первая линия представлена в школьных учебниках по алгебре и началам анализа разбором таких свойств, как ассоциативность и коммутативность сложения и умножения функций, дистрибутивность умножения относительно сложения, а также изучением еще и таких примечательных свойств:

а) $f+\{(x;0)\,|\,x\in D(f)\}=f$;

б) $f\cdot\{(x;0)\,|\,x\in D(f)\}=\{(x;0)\,|\,x\in D(f)\}$;

в) $f\cdot\{(x;1)\,|\,x\in D(f)\}=f$.

Эти последние три свойства показывают, что такие функции, как $\{(x;0)\,|\,x\in D\subset R\}$ и $\{(x;1)\,|\,x\in D\subset R\}$, очень похожи своими свойствами на действительные числа нуль и единицу, правда, таких «нулей» и «единиц» столько же, сколько непустых подмножеств у множества действительных чисел R. И тем не менее в элементарной математике всем этим функциям присвоили в качестве имен-обозначений соответственно символы 0 и 1, хотя точнее было бы их обозначить 0_D и 1_D, ведь их бесконечно много, причем каждая «обслуживает» «свой» набор функций с областью определения $D\subset R$.

Аналогично поступили и с именами для операций сложения, вычитания, умножения и деления функций: для обозначения результатов их применения (т. е. для обозначения суммы, разности, произведения и частного функций) взяли «напрокат» знаки-имена их арифметических тёзок.

А вот теперь попробуйте однозначно «расшифровать» такие записи, как $0+0=0$, $1\times0=0$, $1\times1=1$.

Подобная двусмысленность чревата неприятными последствиями, а значит, будет весьма естественно проявить особую осторожность и внимательность при решении задач на поиск функций с заданными свойствами. Именно вторая (неглавная) линия в изучении «оперативных» свойств функций могла бы помочь уяснить наличие принципиальных различий в свойствах арифметических операций над действительными числами и одноименных операций над функциями.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 15002 УДК 372.851
Арзамасцев А. Л., Гомонов С. А. Вечные «невидимки» школьного курса математики, или Функциональные уравнения в школе вчера, сегодня, завтра // Концепт. – 2015. – № 01 (январь). – ART 15002. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15002.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Увы, но изучению принципиальных различий между этими математическими «тёзками» в школьном курсе математики уделяют весьма мало времени. Речь, прежде всего, может идти о так называемых *делителях нуля*, которых заведомо нет в поле действительных чисел $\langle R,+,\cdot\rangle$, но которые имеются в кольце функций (далее операции этого кольца будем обозначать теми же символами $+$ и $\cdot$, т. е. без «кружков») $\langle\{f \mid D(f)=D\subset R, E(f)\subset R\},\oplus,\otimes\rangle$.

3. Именно в рамках этой неглавной линии в изучении свойств функций значительным подспорьем могут оказаться и простейшие функциональные уравнения, пусть даже без упоминания самого этого термина. Чтобы подтвердить это, приведем несколько простых задач, поиск решения которых поможет и ученику, и учителю более основательно разобраться со свойствами основных операций над функциями.

Задача 1. Укажите все функции *f(x)* с $D(f)=R$ и $E(f)\subset R$, удовлетворяющие следующему условию: а) $(f(x))^2=f(x)$; б) $(f(x))^2=\frac{1}{4}$; в) $(f(x))^2=x^2$; г) $(f(x))^3=x^2\cdot f(x)$; д) $(f(x))^4=x^4\cdot f(x)^2$; е) $f(x)\cdot(f(x)-\sin(x))=f(x)$; ж) $(f(x))^2=-9$; з) $(f(x))^4=0$.

Задача 2. Укажите все функции *f(x)*, удовлетворяющие следующему условию: $(f(x))^2+x^2=r^2$, где r – произвольное фиксированное положительное число, а $D(f)=[-r,r]$, $E(f)\subset R$.

Естественно, что решения задач 1 и 2 можно искать среди функций, обладающих некоторыми дополнительными свойствами (непрерывности, дифференцируемости, четности, нечетности и т. д.), и тогда задачи 1 и 2 могут быть видоизменены следующим образом.

Задача 3. Укажите все функции-решения задач 1 и 2, обладающие следующими дополнительными свойствами:

а) непрерывностью в каждой точке своей области определения;

б) дифференцируемостью в каждой точке своей области определения;

в) четностью, или нечетностью, или периодичностью.

Первые же попытки найти и описать все решения задач 1 (а, б, в) помогают обнаружить существенные отличия свойств операции умножения функцией от свойств соответствующего арифметического «тёзки»: если из функционального равенства $f+\varphi=0$ немедленно следует, что $f=-\varphi$, что аналогично выводу из арифметического равенства $a+b=0$ равенства $a=-b$, то уже делать из функционального равенства $f\cdot\varphi=0$ такой же вывод, что и из аналогичного арифметического равенства $a\cdot b=0$ (ведь тогда $a=0$ или $b=0$), совершенно неправомерно.

Вот достаточно хорошо известный пример двух функций $f(x)=x+|x|$, $x\in R$ и $\varphi(x)=x-|x|$, $x\in R$, каждая из которых не является нуль-функцией, но произведение которых $f(x)\cdot\varphi(x)=(x+|x|)\cdot(x-|x|)=x^2-|x|^2=0$, $x\in R$, является нуль-функцией.

Вот и получается, что у алгебраического уравнения $y^2=y$ ровно два решения – это числа 0 и 1, а вот у задачи 1(а) решений бесконечно много.

Приведем пример рассуждений, позволяющих найти и описать все решения задач 1 и 2.

Решение задачи 1(а). Не станем пытаться найти сразу «всю» функцию-решение $f(x)$ (т. е. уйдем от «глобального» подхода), но постараемся выяснить, чему может быть равно значение функции $f(x)$ в произвольной точке $x_0\in R$, т. е.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 15002 УДК 372.851
Арзамасцев А. Л., Гомонов С. А. Вечные «невидимки» школьного курса математики, или Функциональные уравнения в школе вчера, сегодня, завтра // Концепт. – 2015. – № 01 (январь). – ART 15002. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15002.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

определим круг значений для числа $f(x_0)$ (иначе говоря, применим «локальный» подход). В соответствии с требованиями условия искомое число $f(x_0)$ должно удовлетворять равенству $(f(x_0))^2 = f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)\cdot(f(x_0)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x_0)=0 \\ f(x_0)=1 \end{array}\right.$, то есть графику искомой функции (если таковая существует) принадлежит либо точка $(x_0;0)$, либо точка $(x_0;1)$. Однако было бы грубой ошибкой вывести отсюда, что при «конструировании» искомой функции надо назначить для всех значений аргумента одно и то же значение функции – число нуль, или одно и то же значение – единицу. Можно ведь и «чередовать» эти возможности при построении того или иного конкретного решения данной задачи. Легко убедиться, что ее условию удовлетворяет и такая знаменитая функция, как функция Дирихле: $D(x)=\begin{cases} 1, \text{если x - рациональное}, \\ 0, \text{если x - иррациональное}. \end{cases}$

Проведенные выше рассуждения позволяют утверждать, что всякая функция $f(x)$ с $D(f)=R$ и $E(f)\subset R$, удовлетворяющая условию: для любого $x_0 \in R$ $f(x_0)=0$ или $f(x_0)=1$, будет решением задачи 1(а). Вот теперь можно и ответ к задаче сформулировать, пусть весьма и «неконструктивно», но достаточно внятно, а главное, понятно для школьника.

Ответ: условию задачи 1(а) удовлетворяет всякая определенная на R функция, чей график принадлежит объединению двух прямых декартовой координатной плоскости с уравнениями $y=0$ и $y=1$, и других решений нет.

Аналогичное рассуждение позволит получить сходный по форме ответ и для, например, задачи 1(в): все решения этой задачи – это функции, определенные на *R*, график каждой из которых лежит на своеобразном «кресте», т. е. принадлежит объединению двух прямых декартовой координатной плоскости, заданных уравнениями $y=x$ и $y=-x$. И вот что любопытно: и в студенческой, и в учительской аудитории бывает весьма не просто убедить слушателей в том, что, например, задача 2 имеет бесконечно много решений и что наряду с такими очевидными решениями, как $f_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ и $f_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$, где $x\in[-r,r]$, будут, например, и такие: $f_3(x)=\begin{cases} \sqrt{r^2-x^2}, \text{если } x\in[-r,0), \\ -\sqrt{r^2-x^2}, \text{если } x\in[0,r]; \end{cases}$ и $f_4(x)=\begin{cases} \sqrt{r^2-x^2}, \text{если } x \text{ - рациональное из } [-r,r], \\ -\sqrt{r^2-x^2}, \text{если } x \text{ - иррациональное из } (-r,r]. \end{cases}$

Обратимся теперь к задачам 3(а) и 3(б). Для их решения удобно использовать интуитивное представление о графике функции, заданной и непрерывной на некотором промежутке, как о некоторой «непрерывной» линии, которую можно вычертить, не отрывая карандаша от бумаги. Приведем рассуждения, позволяющие получить решение задачи 3(а) при дополнительном условии непрерывности, добавляемом к условиям задачи 1(в) (ради краткости примем для обозначения этой задачи символ $3(a)\wedge 1(в)$).

Решение задачи $3(a)\wedge 1(в)$.

I. Так как любая функция – решение этой задачи – обязана принимать в точке $x_0=-3$ значение –3 или 3, поскольку других точек с абсциссой –3, кроме (–3; –3) и (–3; 3), на объединении графиков функций $y=x$ и $y=-x$ просто нет, то рассмотрим две возможные ситуации, построив пунктиром графики этих функций.

II. Рассмотрим первый случай, когда точка (–3; –3) лежит на графике искомой

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 15002 УДК 372.851
Арзамасцев А. Л., Гомонов С. А. Вечные «невидимки» школьного курса математики, или Функциональные уравнения в школе вчера, сегодня, завтра // Концепт. – 2015. – № 01 (январь). – ART 15002. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15002.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

непрерывной функции (если таковая есть). Заставляя аргумент монотонно возрастать от –3 до $+\infty$, доберемся вначале до его (аргумента) нулевого значения – абсциссы общей точки (0; 0) графиков функций $y = x$ и $y = -x$. При этом переменная точка (x; y), вычерчивая соответствующую часть (от точки (–3; –3) до точки (0; 0)) графика искомой непрерывной функции-решения, не сможет (именно потому, что нас интересует *непрерывное* решение) покинуть график функции $y = x$ и «перескочить» на график функции $y = -x$, т. е. эта переменная точка будет непрерывно скользить по прямой $y = x$. Однако, добравшись до точки (0; 0), мы окажемся как бы в роли витязя на распутье: либо далее двинемся по той же линии-графику функции $y = x$, что дает нам первое решение задачи – функцию $f_1(x) = x$ (заметим, что для значений аргумента, меньших –3, подобных «развилок» нет!), либо, попав в точку (0; 0), далее «свернем» на линию $y = -x$, что даст еще одно решение задачи: $f_2(x) = \begin{cases} x, x \in (-\infty;0] \\ -x, x \in (0;+\infty) \end{cases} = -|x|, x \in R$; (рис. 1).

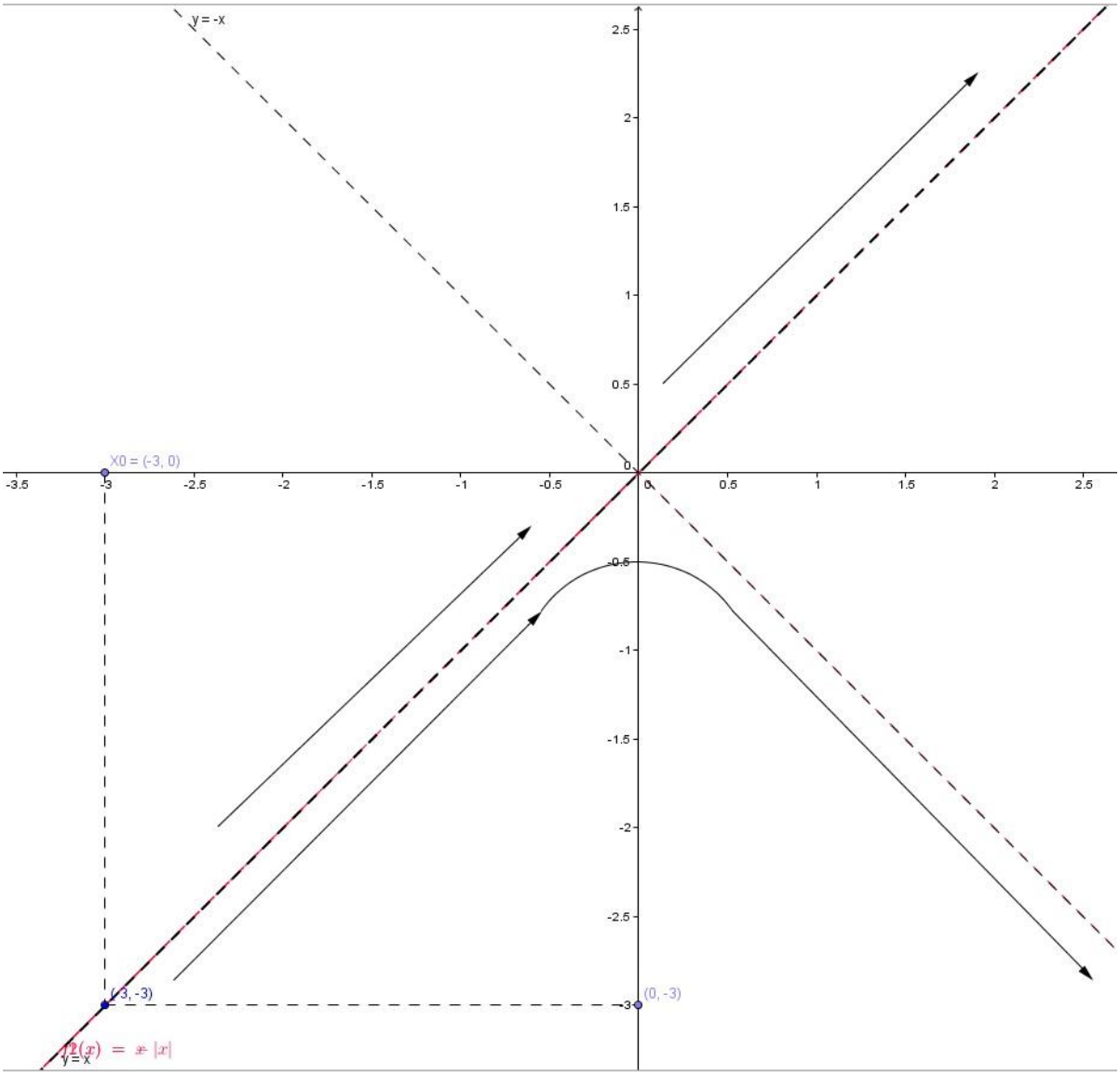

Рис. 1

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 15002 УДК 372.851
Арзамасцев А. Л., Гомонов С. А. Вечные «невидимки» школьного курса математики, или Функциональные уравнения в школе вчера, сегодня, завтра // Концепт. – 2015. – № 01 (январь). – ART 15002. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15002.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

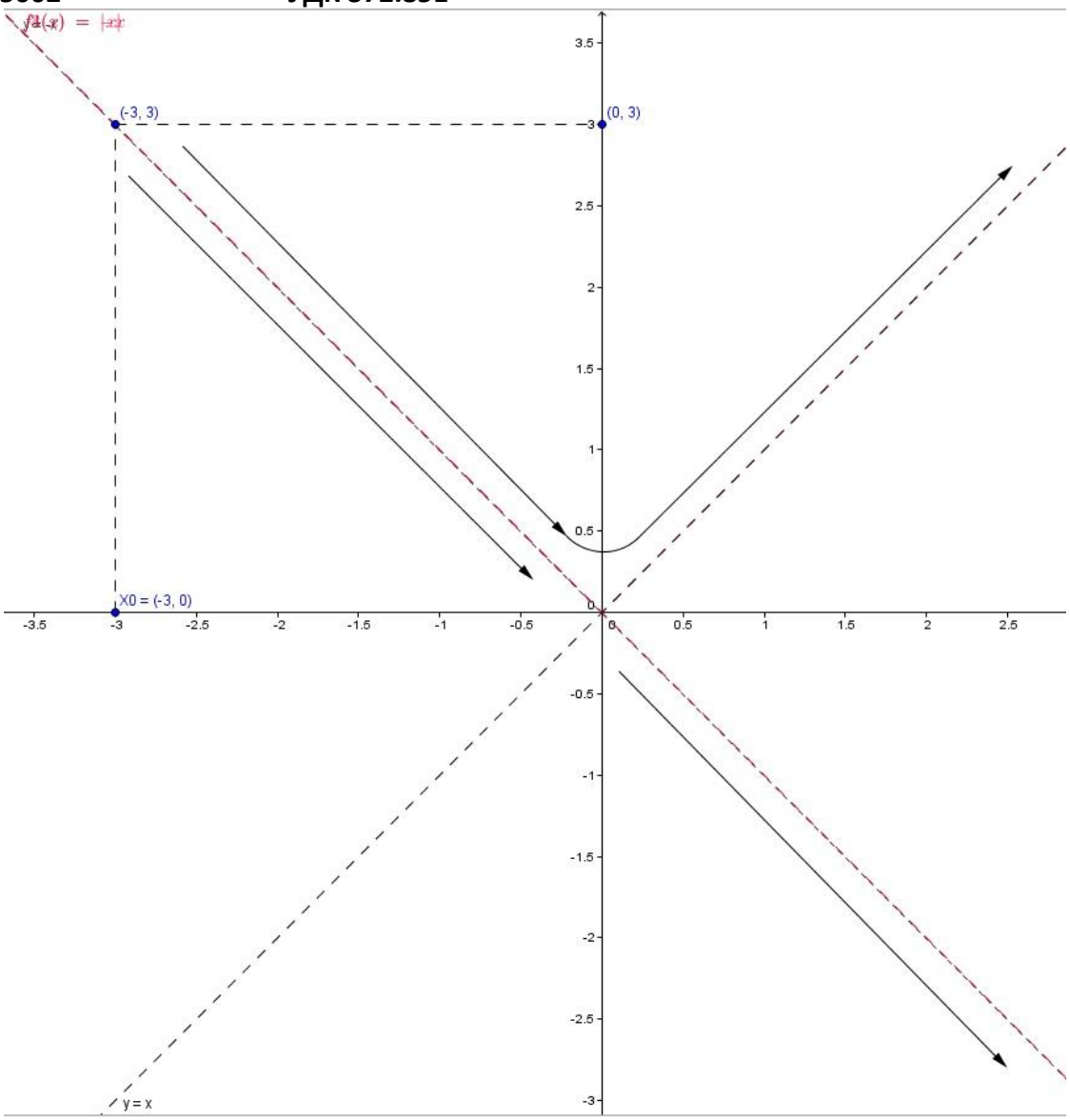

Рис. 2

III. Во втором случае (рис. 2) аналогичные рассуждения позволяют найти еще два решения: $f_3(x) = -x$ и $f_4(x) = |x|, x \in R$.

IV. И наконец, о причинах выбора точки $x_0 = -3$: разумеется, вместо нее можно было взять любое отрицательное число и даже любое ненулевое, лишь бы не нуль-абсциссу общей точки графиков функций $y = x$ и $y = -x, x \in R$.

Ответ: условию задачи $3(a) \wedge 1(в)$ удовлетворяют четыре функции, это $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -|x|$, $f_3(x) = -x$, $f_4(x) = |x|, x \in R$.

Решение задачи $3(б) \wedge 1(в)$.

Помня о соотношении между непрерывностью и дифференцируемостью функции в точке, мы должны будем осуществить выбор из четырех функций-решений задачи $3(a) \wedge 1(в)$ тех функций, которые дифференцируемы на R. Таковых две: это $f_1(x) = x$ и $f_3(x) = -x, x \in R$.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 15002 УДК 372.851
Арзамасцев А. Л., Гомонов С. А. Вечные «невидимки» школьного курса математики, или Функциональные уравнения в школе вчера, сегодня, завтра // Концепт. – 2015. – № 01 (январь). – ART 15002. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15002.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Ответ: искомые функции $f_1(x) = x$ и $f_3(x) = -x, x \in R$.

4. Постараемся теперь рассказать о тех случаях, когда в школьном курсе математики реально, хотя и малозаметно присутствуют функциональные уравнения. Но, прежде чем указать разделы и понятия школьного курса, под сенью которых скрываются функциональные уравнения, напомним, как в математике определяют (а скорее, разъясняют) это понятие, и приведем некоторые примеры «исторических» функциональных уравнений.

Определение. Функциональным уравнением называют уравнение, в котором неизвестным является функция, связанная при помощи образования сложной функции с известными функциями (т. е. неизвестная функция связана с известными с помощью операции композиции).

Определение. Решением функционального уравнения называется всякая функция, при подстановке которой в функциональное уравнение вместо неизвестной функции получаем истинное равенство двух функций.

Естественным образом вводится понятие системы функциональных уравнений с несколькими неизвестными функциями и понятие его решения – вектор-функции от нескольких переменных.

Если постараться обратиться к истокам появления функциональных уравнений, то искать таковые в трудах античных математиков, пожалуй, не стоит – во времена Евклида и Архимеда просто не сформировалось еще само понятие «функция». Так что в качестве одного из ранних примеров, пожалуй, можно упомянуть работы средневекового ученого Орема (Oresme, 1347 и 1352 гг.) [1], затем труды Галилея (Galilei, 1638 г.), в которых исследовалась задача падения тел (это было, наверное, первое применение функциональных уравнений в физике) [1]. Посвятили функциональным уравнениям несколько работ великий Л. Эйлер, затем Д. Бернулли, Даламбер, Монж, Лагранж, Лаплас и ряд других менее известных математиков и физиков [1]. В своем сочинении по дифференциальному и интегральному исчислению Огюстен Луи Коши в 1821 г. [2] систематически рассмотрел ныне считающиеся классическими (и носящие его имя) уравнения:

$$f(x+y) = f(x) + f(y); x, y \in R, \quad (1)$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y); \quad (2)$$

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y);$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Однако все решения, например, уравнение (1), сумел описать лишь в 1905 г. немецкий математик Г. Гамель [1; 3], придумавший весьма остроумное и необычное (для своего времени) понятие, именуемое ныне базисом Гамеля, для системы действительных чисел над полем рациональных чисел [3; 4].

Вот вкратце, что сумел и чего не сумел получить Коши, решая уравнение (1):

а) всякое конкретное решение $\tilde{f}(x)$ уравнения (1) при рациональном x можно задать формулой $\tilde{f}(x) = c \cdot x$, где c – некоторое конкретное действительное число; при x иррациональном определить правило нахождения $\tilde{f}(x)$ Коши не сумел, кроме ситуации наличия дополнительного свойства – непрерывности $\tilde{f}(x)$ на всей области определения R (впрочем, достаточно предположить, что решение $\tilde{f}(x)$ непрерывно в какой-либо точке $x_0 \in R$, и тогда из этого условия вытекает непрерывность $\tilde{f}(x)$ и на всем множе-

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 15002 УДК 372.851
Арзамасцев А. Л., Гомонов С. А. Вечные «невидимки» школьного курса математики, или Функциональные уравнения в школе вчера, сегодня, завтра // Концепт. – 2015. – № 01 (январь). – ART 15002. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15002.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

стве R); оказалось, что тогда $\tilde{f}(x) = cx, x \in R$; причем очевидно, что с можно брать любым из R; а значит, все непрерывные решения уравнения (1) Коши нашел;

б) Г. Гамель сумел определить *все* решения уравнения (1); оказалось, что на некоторой части множества иррациональных чисел $\tilde{f}(x) = c_1 x$, где, вообще говоря, $c_1 \neq c$; на некоторой другой части иррациональных чисел $\tilde{f}(x) = c_2 x$ и т. д., но будут и более «сложные» части множества иррациональных чисел [3; 4].

Стоит отметить, что интерес к уравнениям Коши проявляли многие математики; так, например, функциональное уравнение Коши (2) в своих исследованиях по неевклидовой геометрии применяли такие замечательные математики, как Н. И. Лобачевский и Янош Больяи ([1], «Исторический очерк»).

В настоящее время почетное место функциональные уравнения занимают и в комбинаторном анализе [5], и в исчислении конечных разностей [6].

Также давно известна большая методическая ценность ряда функциональных уравнений, так, например, интересным и математически аккуратным оказался подход к введению основных элементарных функций как решений специальных функциональных уравнений [7; 7]. К сожалению, в настоящее время соответствующая методика изучения элементарных функций вышла из моды и несколько забыта.

Встречаются функциональные уравнения и среди задач школьных и студенческих олимпиад разных уровней, так что существующие пособия и публикации [9–13], безусловно, полезны и востребованы как в научном, так и в методическом отношении.

5. Перечислим и прокомментируем теперь случаи использования в школьном курсе математики функциональных уравнений.

Начнем с того, что внимательно присмотримся к определениям бесконечных арифметических и геометрических прогрессий, учитывая, что бесконечная числовая последовательность – это произвольная вещественнозначная функция с областью определения – множеством натуральных чисел N. Как известно, бесконечная арифметическая прогрессия определяется в школьном курсе математике как последовательность (a_n), удовлетворяющая условию $a_{n+1} = a_n + d$, где n – любое натуральное, а d – фиксированное действительное число.

Иначе говоря, бесконечная арифметическая прогрессия в школьном курсе математики определяется как решение функционального уравнения вида

$$f(x+1) = f(x) + d, D(f) = N \qquad (3).$$

Аналогичная ситуация и с бесконечной геометрической прогрессией. Она определяется в школьном курсе математике как решение функционального уравнения вида:

$$g(x+1) = g(x) \cdot q, D(g) = N, \qquad (4)$$

q – произвольное фиксированное ненулевое действительное число.

Далее, чтобы найти в явном виде выражение для a_n как аналитически заданную функцию от $n \in N$, обычно решают функциональное уравнение $f(x+1) = f(x) + d$ по следующей традиционной схеме.

1. В начале осуществляют накопление «экспериментальных» данных – находят выражения для $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ и т. д., обозначив $f(1)$ символом a_0:

$$f(2) = f(1) + d = a_0 + d,$$

$$f(3) = f(2) + d = (a_0 + d) + d = a_0 + 2d,$$

$$f(4) = f(3) + d = (a_0 + 2d) + d = a_0 + 3d,$$

$$f(5) = f(4) + d = (a_0 + 3d) + d = a_0 + 4d.$$

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 15002 УДК 372.851
Арзамасцев А. Л., Гомонов С. А. Вечные «невидимки» школьного курса математики, или Функциональные уравнения в школе вчера, сегодня, завтра // Концепт. – 2015. – № 01 (январь). – ART 15002. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15002.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

2. Затем на основе этого «эксперимента» строят гипотезу, что $f(x) = a_0 + d \cdot (x-1)$, где $x \in N$, а a_0 – произвольное, но фиксированное число.

3. В качестве последнего этапа проверяют справедливость того факта, что все функции вида $f(x) = a_0 + d \cdot (x-1)$ удовлетворяют условию (3).

И при этом ни слова о функциональных уравнениях, а также и о том, все ли решения рассматриваемого уравнения найдены.

Аналогичные рассуждения, примененные к уравнению (4), приводят, как известно, к нахождению функций-решений вида $g(x) = b_0 \cdot q^{x-1}$, $x \in N$, где символом b_0 обозначают любое конкретное действительное число.

Следующая традиционно решаемая задача – это поиск формулы для суммы $S(n)$ первых n членов этих последовательностей (как говорят в математике, суммы «в конечном виде»). Для этого в школьных учебниках применяют специальные искусственные приемы, хотя их цель опять-таки поиск решения хорошо изученного функционального уравнения так называемого разностного типа [3, с. 12. 247, 290]:

$$F(x+1) - F(x) = \varphi(x), \ x \in N, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция, и которому, очевидно, должна удовлетворять искомая функция $S(x)$, если $\varphi(x)$ – это (x + 1)-й член суммируемой последовательности.

Стоит напомнить, что уже давно найдены приемы вычисления сумм вида:

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n), \tag{6}$$

где $\varphi(x)$ – известная функция, $D(\varphi) = N$, т. е. способы получения решений уравнения (5), иначе говоря, способы решения так называемой основной задачи теории исчисления конечных разностей [6, с. 10–12].

В частности, давно существует общая формула для нахождения сумм вида (6), аналогичная формуле Ньютона – Лейбница:

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) = \Delta^{-1}(\varphi(x))\Big|_1^{n+1}, \tag{7}$$

где символом $\Delta^{-1}(\varphi(x))$ обозначено любое конкретное решение уравнения (5).

Действительно, если $\tilde{F}(x)$ – любое конкретное решение уравнения (5), $D(\tilde{F}) = N$, то $\varphi(k) = \tilde{F}(k+1) - \tilde{F}(k)$, где $k \in N$, а значит, $\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) = \left(\tilde{F}(2) - \tilde{F}(1)\right) + \left(\tilde{F}(3) - \tilde{F}(2)\right) + \ldots + \left(\tilde{F}(n+1) - \tilde{F}(n)\right) = \tilde{F}(n+1) - \tilde{F}(1) = \tilde{F}(x)\Big|_1^{n+1}$.

Например, так как (что легко проверяется) $\Delta^{-1}(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$, то $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{x(x-1)}{2}\Big|_1^{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Правда, особых чудес от формулы (7) ожидать не приходится, так как поиск конкретного решения уравнения (5) при конкретной и даже элементарной функции $\varphi(x)$ может привести к функции отнюдь не элементарной.

Следующим примером использования функциональных уравнений в школьном курсе математики следует назвать определения четной и нечетной функции. Действительно, исследование функции $f(x)$ на четность есть не что иное, как проверка того факта, удовлетворяет ли $f(x)$ функциональному уравнению вида

$$F(x) = F(-x) \ \text{(уравнение четности)}, \tag{8}$$

а на нечетность – удовлетворяет ли $f(x)$ уравнению вида

$$F(x) = -F(-x) \ \text{(уравнение нечетности)}. \tag{9}$$

При этом если равенство $f(x)=f(-x)$ истинное $(x\in D(f))$, то, согласно определению равных функций, во-первых, множество $D(f)$ симметрично относительно точки $O(0,0)$ – начала координат, так как $D(f(-x))=\{-x\,|\,x\in D(f(x))\}$; во-вторых, для любого $x_0\in D(f)$ выполняется числовое равенство $f(x_0)=f(-x_0)$, а значит, график четной функции симметричен относительно оси O_Y.

Аналогичная ситуация и для нечетной функции, однако ее график хоть и симметричен, но уже относительно точки $O(0,0)$.

Стоит также напомнить, что на вопрос, может ли функция быть одновременно четной и нечетной, ответ, безусловно, утвердительный, так как система функциональных уравнений вида $\begin{cases} F(x)=F(-x), \\ F(x)=-F(-x), \end{cases}$ имеет бесконечно много решений, причем каждое из них – это нуль-функция O_D, где D – произвольное непустое подмножество числовой оси O_X, симметричное относительно точки $O(0,0)$.

Приятно отметить, что нередко встречавшееся ранее в ряде пособий для поступающих в вузы ошибочное утверждение, что <u>любую</u> функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы четной и нечетной функций, практически больше нигде не появляется, так как элементарной внимательности к определениям четности, нечетности и суммы двух функций достаточно, чтобы заметить, что область определения функции $f(x)$ должна быть симметричной относительно точки $O(0,0)$; в этом и только в этом случае система функциональных уравнений $\begin{cases} A(x)+B(x)=f(x), \\ A(x)-B(x)=f(-x), \end{cases}$ будет иметь (и только одно!) решение $\begin{cases} A(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, \\ B(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$, и для $f(x)$ будет получено соответствующее представление $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Еще одна встреча с функциональными уравнениями (как и предыдущие – анонимная!) в школьном курсе математики происходит при исследовании функций на периодичность. Причем это исследование гораздо сложнее, чем исследование на четность или нечетность, ведь, согласно определению, требуется для данной функции $f(x)$ выяснить, присутствует или нет такое функциональное уравнение в классе так называемых <u>уравнений периодичности</u> $F(x+T)=F(x)$, где T – любая ненулевая константа, для которого решением является исследуемая функция $f(x)$. По данной функции подобрать функциональное уравнение, чьим решением она является, весьма непросто.

Завершая разговор о функциональных уравнениях, напомним, что и знаменитые последовательности Фибоначчи [10] – это решения функционального уравнения вида $F(x+2)=F(x+1)+F(x)$, $x\in N$, и что вообще-то сами функциональные уравнения и некоторые методы их решения (метод подстановки, метод Коши, метод «сведения на себе» и др. [1; 9; 11; 12]) – прекрасная тема для цикла занятий школьного математического кружка или даже целого элективного курса [11], тем более что задачи на исследование функциональных уравнений – обычные гости математических олимпиад самого высокого уровня [9; 12].

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 15002 УДК 372.851
Арзамасцев А. Л., Гомонов С. А. Вечные «невидимки» школьного курса математики, или Функциональные уравнения в школе вчера, сегодня, завтра // Концепт. – 2015. – № 01 (январь). – ART 15002. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15002.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Ссылки на источники

1. Ацел Я., Домбр Ж. Функциональные уравнения с несколькими переменными / пер. с англ. – М.: Физматлит, 2003. – 432 с.
2. Caunchy A. L. Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique. C. 1. Analyse algebrique, Debure, Paris, 1821 (рус. перевод: Коши О. Л. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, преподаваемых в Королевской Политехнической школе. – СПб., Имп. Акад. наук, 1831. – 243 с.).
3. Hamel G. Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Losungen der Funktionalgleichung f(x + y) = f(x) + f(y) // Math. Ann., 60, 459-462. Fortschr.: 36, 446 (1905). – 461 p.
4. Математическая энциклопедия. Т. 1. – М.: Сов. энцикл., 1977. (375 стб.). – 576 с.
5. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1967. – 331 с.
6. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 400 с.
7. Энциклопедия элементарной математики. Кн. третья. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. – 559 с.
8. Одинец В. П., Поволоцкий А. И. Построение элементарных функций. – СПб.: Образование, 1995. – 72 с.
9. Лихтарников Л. М. Элементарное введение в функциональные уравнения. – СПб.: Лань, 1967. – 160 с.
10. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1969. – 144 с.
11. Просветов Г. И. Функциональные уравнения: задачи и решения: учеб.-практ. пособие. – М.: «Альфа-пресс», 2010. – 48 с.
12. Садовничий В. А., Подколзин А. С. Задачи студенческих олимпиад по математике. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1987. – 309 с.
13. Гомонов С. А. Функциональные уравнения в школьном курсе математики // Математика в школе. – 2000. – № 10. – С. 58–62.
14. Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: словарь-справочник. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 248 с.

Alexey Arzamastsev,
Student, Department of physics and mathematics, Smolensk State University, Smolensk
alexd8089@gmail.com
Sergey Gomonov,
Candidate of Physic-mathematical Sciences, Associate Professor at chair of Applied Mathematics, Smolensk State University, Smolensk
rectorat@smolgu.ru

ISSN 2304-120X
01
9 772304 120159

Eternal "invisibles" of mathematics school course, or functional equations at school: yesterday, today and tomorrow

Abstract. The paper has methodical and popular scientific character and is devoted to some problems of teaching those courses of school mathematics, which such thing as functional equation definitions is actually applied, but without the use of exact.

Key words: function, basic operations on functions, functional equation, evenness, oddness, periodicity.

References

1. Acel, Ja. & Dombr, Zh. (2003) *Funkcional'nye uravnenija s neskol'kimi peremennymi / per. s angl*., Fizmatlit, Moscow, 432 p. (in Russian).
2. Caunchy, A. L. (1821) *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique. C. 1. Analyse algebrique*, Debure, Paris (in Franch) (Rus. perevod: Koshi, O. L. (1831) *Kratkoe izlozhenie urokov o differencial'nom i integral'nom ischislenii, prepodavaemyh v Korolevskoj Politehnicheskoj shkole*, Imp. Akad. nauk, St. Peterburg, 243 p.).
3. Hamel, G. "Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Losungen der Funktionalgleichung f(x + y) = f(x) + f(y)", *Math. Ann.*, 60, 459-462. Fortschr.: 36, 446 (1905), 461 p. (in English).
4. *(*1977*) Matematicheskaja jenciklopedija*. T. 1 (375 stb.), Sov. jencikl., Moscow, 576 p. (in Russian).
5. Vilenkin, N. Ja. (1967) *Kombinatorika*, Nauka, Moscow, 331 p. (in Russian).
6. Gel'fond, A. O. (1967) *Ischislenie konechnyh raznostej,* Nauka, Moscow, 400 p. (in Russian).
7. *(*1952*) Jenciklopedija jelementarnoj matematiki. Kn. tret'ja*, GITTL, Leningrad, Moscow, 559 p.
8. Odinec, V. P. & Povolockij, A. I. (1995) *Postroenie jelementarnyh funkcij*, Obrazovanie, St. Peterburg, 72 p. (in Russian).
9. Lihtarnikov, L. M. (1967) *Jelementarnoe vvedenie v funkcional'nye uravnenija*, Lan', St. Peterburg, 160 p. (in Russian).
10. Vorob'ev, N. N. (1969) *Chisla Fibonachchi*, Nauka, Moscow, 144 p. (in Russian).
11. Prosvetov, G. I. (2010) *Funkcional'nye uravnenija: zadachi i reshenija: ucheb.-prakt. posobie*, "Al'fa-press", Moscow, 48 p. (in Russian).
12. Sadovnichij, V. A. & Podkolzin, A. S. (1987) *Zadachi studencheskih olimpiad po matematike*, Izd-vo Mosk. un-ta, Moscow, 309 p. (in Russian).
13. Gomonov, S. A. (2000) "Funkcional'nye uravnenija v shkol'nom kurse matematiki", *Matematika v shkole*, № 10, pp. 58–62 (in Russian).
14. Aleksandrova, N. V. (2007) *Istorija matematicheskih terminov, ponjatij, oboznachenij: slovar'-spravochnik*, Moscow Izd-vo LKI, 248 p. (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»