КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12143 УДК 378.147:539.3/6 (076)
Дербасов А. Н., Ильичев Н. А., Сергеева С. А. Роль конечно-элементарных представлений в преподавании курса «Сопротивление материалов» // Концепт. – 2012. – № 10 (октябрь). – ART 12143. – 0,3 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12143.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

Дербасов Александр Николаевич,
кандидат технических наук, доцент кафедры динамики, прочности машин и сопротивления материалов ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева», г. Нижний Новгород
a.n.derbasov@mail.ru

Ильичев Николай Алексеевич,
кандидат технических наук, доцент кафедры динамики, прочности машин и сопротивления материалов ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева», г. Нижний Новгород

Сергеева Светлана Анатольевна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры динамики, прочности машин и сопротивления материалов ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева», г. Нижний Новгород
nnsveta@rambler.ru

Роль конечно-элементных представлений в преподавании курса «Сопротивление материалов»

Аннотация. *В настоящее время переход на цифровые технологии, постоянное развитие интерфейса и появление на рынке мощных конечно-элементных систем ANSYS, NASTRAN, Solid/Works/COSMOSWorks и др. позволяют не только расширить круг решаемых задач, но и по-новому взглянуть на преподавание курса сопротивления материалов, не нарушая традиционное изложение курса, а только обогащая его как быстротой и простотой получения результата, физической наглядностью процесса, так и точностью результата, которые в традиционном изложении сопротивления материалов просто невозможно получить.*
Ключевые слова: *компьютерные технологии, традиционный и конечно-элементный подходы в сопротивлении материалов.*

В сопротивлении материалов имеет место парадоксальная ситуация, которая состоит в том, что «сопротивление материалов в современном понимании в основном сложилось к концу XIX – началу XX века как результат совместных усилий ученых и инженеров ведущих мировых держав. Здесь нельзя не отметить заслуг российской школы механики» [1, с. 6].

В сопротивлении материалов как инженерной и общетеоретической науке можно выделить две основные части.

1. Непосредственно сопротивление материала разрушению, которое определяется физико-механическими свойствами материала и напряженно-деформированным состоянием в рассматриваемой точке конструкции.

2. Методы определения напряженно-деформированного состояния конструкции, которые вследствие развития вычислительных средств претерпевают изменения.

Традиционный курс сопротивления материалов строится в основном на балочной теории, которая в силу применимости гипотезы плоских сечений дает простые расчетные формулы и обладает достаточной наглядностью на ранней стадии изучения курса. Однако данная теория применима лишь для тех конструкций или конструктивных элементов, для которых продольный размер в 5–10 и более раз превышает поперечные размеры. Появление на них вырезов, отверстий и других конструктивных оформлений

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12143 УДК 378.147:539.3/6 (076)
Дербасов А. Н., Ильичев Н. А., Сергеева С. А. Роль конечно-элементарных представлений в преподавании курса «Сопротивление материалов» // Концепт. – 2012. – № 10 (октябрь). – ART 12143. – 0,3 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12143.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

мгновенно усложняет задачу и требует повышения квалификации проектировщика (его опыта, интуиции, времени), чтобы определить напряженно-деформированное состояние объекта. Даже, например, определение упругой линии для балки, имеющей несколько участков, становится математически затруднительным. Естественно, что еще более громоздкими будут выкладки для балки переменной жесткости.

«В свое время на преодоление этих трудностей было затрачено много усилий. Но, как всегда, с годами поиска вырабатывается что-то наиболее простое и целесообразное. История сопротивления материалов в этом смысле достаточно поучительна. Существуют графические и графоаналитические методы построения упругой линии, изучение которых еще до недавнего времени в курсах строительной механики считалось совершенно обязательным. Существует универсальное уравнение упругой линии для балки постоянного сечения, где при любом числе пролетов можно ограничиться определением всего двух постоянных интегрирования. Могут быть предложены и другие, родственные им, приемы построения упругой линии. Однако в настоящее время в связи с развитием ЭВМ в технике безраздельно господствуют численные методы. И сейчас, когда подобного рода задачи без труда решаются на ЭВМ, родившиеся в начале века графические приемы сохраняют лишь исторический интерес, а некоторые остроумные упрощения порой представляются бьющими мимо цели» [2, с. 168]. Сказано это было В. И. Феодосьевым более 20 лет тому назад.

С конца XX века в вопросах информатизации наблюдается переход от аналоговых устройств на цифровые технологии. Так и в механике сплошных сред в практической инженерной деятельности происходит переход от аналитических методов к цифровым (численным) технологиям. Среди множества численных методов в расчетах на прочность и жесткость наиболее конкурентоспособным, с точки зрения точности, реализации на ЭВМ, многообразия и сложности анализируемых объектов господствующее положение занял метод конечных элементов (МКЭ), положенный в основу компьютерных технологий. Отсюда проистекает необходимость его понимания и умения применять в инженерной деятельности.

Первые попытки изложения МКЭ в сопротивлении материалов, предпринятые более 20 лет тому назад [3], не имели успеха, так как он эффективен только в «компьютерном», а не в «ручном» исполнении, что требовало еще и умения программировать на том или ином алгоритмическом языке.

В настоящее время переход на цифровые технологии, постоянное развитие интерфейса и появление на рынке мощных конечно-элементных систем (ANSYS, NASTRAN, Solid/Works/COSMOSWorks и др.) позволяют не только расширить круг решаемых задач, но и по-новому взглянуть на преподавание курса сопротивления материалов, не нарушая традиционное изложение курса, а только обогащая его как быстротой и простотой получения результата, физической наглядностью процесса, так и точностью результата, которые в традиционном изложении сопротивления материалов просто невозможно получить.

Дополнение традиционного курса сопротивления материалов компьютерными технологиями на базе МКЭ не представляет методических трудностей, так как расчетные формулы сопротивления материалов по определению напряженно-деформированного состояния бруса (растяжение–сжатие, изгиб, кручение) положены в основу плоского (BEAM2D) и пространственного (BEAM3D) балочного конечного элемента. Нужно только по-новому взглянуть на старые вещи (представить свойства бруса в виде расчетных формул, сгруппированных в форме матрицы жесткости конечного элемента).

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12143 УДК 378.147:539.3/6 (076)
Дербасов А. Н., Ильичев Н. А., Сергеева С. А. Роль конечно-элементарных представлений в преподавании курса «Сопротивление материалов» // Концепт. – 2012. – № 10 (октябрь). – ART 12143. – 0,3 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12143.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

С целью адаптации студентов к современным технологиям, основанным на конечно-элементной постановке, базовые положения МКЭ (дискретизация конструкции – вывод матрицы жесткости конечного элемента (КЭ) – формирование глобальной матрицы жесткости – определение напряженного состояния), а также основные принципы работы КЭ-систем (графический препроцессор, формирователь, решатель, постпроцессор) излагаются в теоретической части традиционного курса сопротивления материалов и на его основе [4].

Для вывода матрицы жесткости плоского балочного КЭ используются дифференциальные уравнения в местной системе координат $EIw^{IV}=q$ при поперечном изгибе; $EFu^{II}=-p$ при центральном растяжении-сжатии.

Интегрируя их последовательно, будем иметь шесть постоянных интегрирования, которые затем определяются через шесть узловых перемещений в начале и в конце КЭ. В результате получаем уравнения упругой линии и продольных перемещений через узловые перемещения КЭ. Дифференцируя *w* и *u*, получим выражения внутренних усилий по длине КЭ, значения которых в начальном и конечном узлах КЭ, с учетом правил знаков в МКЭ и в сопротивлении материалов, дают связь между узловыми усилиями, узловыми перемещениями КЭ и нагрузкой, действующей на него. Результатом этих процедур является матрица жесткости КЭ и его эквивалентная узловая нагрузка в местной системе координат. Далее осуществляется переход от местной системы координат к глобальной с помощью матрицы направляющих косинусов. В итоге выводится стандартная матрица жесткости КЭ и его эквивалентная нагрузка, которые «законсервированы» в пакетах конечно-элементного анализа под словом BEAM2D.

Формирование глобальной матрицы жесткости и эквивалентной узловой нагрузки конструкции рассматривается из условий равновесия узлов, легко автоматизируемых и алгоритмизируемых для всех типов элементов (BEAM2D, PLANE2D, SOLID и др.) с помощью матрицы (или строки) индексов.

На примере плоского треугольного КЭ (PLANE2D) рассматривается простейшая процедура вывода его матрицы жесткости, используя только инструментарий традиционного сопротивления материалов. Для этого берется линейная аппроксимация перемещений по полю КЭ

$$\begin{cases} u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_3 x + \alpha_5 x \\ v(x,y) = \alpha_2 + \alpha_4 y + \alpha_6 y \end{cases},$$

где $u(x,y)$, $v(x,y)$ - соответственно горизонтальные и вертикальные перемещения любой точки КЭ с координатами x, y или в матричной форме

$$\{u\}_e = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [A]\{\alpha\}_e, \text{где } [A] = \begin{bmatrix} 1 0 x 0 y 0 \\ 0 1 0 x 0 y \end{bmatrix}, \{\alpha\}_e = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6\}^T, \quad (1)$$

Подставляя в выражение (1) координаты узлов КЭ, можно выразить вектор $\{\alpha\}_e$ через вектор узловых перемещений $\{q\}_e = \{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6\}^T$

$$\{q\}_e = [B]_e \{\alpha\}_e, \quad (2)$$

где $[B]_e$ – матрица координат узлов выделенного КЭ.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12143 УДК 378.147:539.3/6 (076)
Дербасов А. Н., Ильичев Н. А., Сергеева С. А. Роль конечно-элементарных представлений в преподавании курса «Сопротивление материалов» // Концепт. – 2012. – № 10 (октябрь). – ART 12143. – 0,3 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12143.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

Отсюда

$$\{\alpha\}_e = \lfloor B^{-1} \rfloor_e \{q\}_e , \tag{3}$$

подставляя которое в (1), получим

$$\{u\}_e = [A] \lfloor B^{-1} \rfloor_e \{q\}_e . \tag{4}$$

Ценность выражения (4) состоит в том, что перемещения точек выделенного КЭ полностью определяются его узловыми перемещениями.

Деформированное состояние КЭ определим, воспользовавшись зависимостями Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} , \tag{5}$$

подстановка в которые выражения (1) дает

$$\{\varepsilon\}_e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha\}_e \quad \text{или} \quad \{\varepsilon\}_e = [D]\{\alpha\}_e \tag{6}$$

Подставив выражение (3) в (5), получим деформированное состояние в текущей точке элемента, полностью определяемое его узловыми перемещениями

$$\{\varepsilon\}_e = [D] \lfloor B^{-1} \rfloor_e \{q\}_e . \tag{7}$$

Напряженное состояние КЭ определим, воспользовавшись законом Гука для плоского напряженного состояния [5]

$$\{\sigma\}_e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{E\,\mu}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{E\,\mu}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{8}$$

или в компактной форме $\{\sigma\}_e = [E_\varepsilon]\{\varepsilon\}_e$. (9)

Подставив выражение (7) в зависимость(9), получим напряженное состояние в текущей точке КЭ, полностью определяемое его узловыми перемещениями

$$\{\sigma\}_e = [E_\varepsilon][D] \lfloor B^{-1} \rfloor_e \{q\}_e . \tag{10}$$

Потенциальная энергия деформации выделенного КЭ определяется

$$\Pi_e = \frac{t}{2} \int_{F_e} \{\sigma\}_e^T \{\varepsilon\}_e dF_e , \tag{11}$$

Дербасов А. Н., Ильичев Н. А., Сергеева С. А. Роль конечно-элементарных представлений в преподавании курса «Сопротивление материалов» // Концепт. – 2012. – № 10 (октябрь). – ART 12143. – 0,3 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12143.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

где t – толщина, $F_e = \frac{1}{2}[(x_2 - x_3)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_3)]$ – площадь треугольника КЭ.

После подстановки выражений (10) и (7) в (11) будем иметь

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\{q\}_e^T [K]_e \{q\}_e , \tag{12}$$

где $[K]_e = t\, F_e \left[B^{-1}\right]_e^T [D]^T [E_\varepsilon][D]\left[B^{-1}\right]_e$ – (13)

симметричная матрица жесткости плоского треугольного КЭ.

Закон сохранения энергии, согласно которому работа внешних узловых сил $\{R\}_e = \{R_1\ R_2\ R_3\ R_4\ R_5\ R_6\ \}^T$, приложенных к КЭ, равна потенциальной энергии деформации

$$A_e = \Pi_e \longrightarrow \frac{1}{2}\{q\}_e^T \{R\}_e = \frac{1}{2}\{q\}_e^T [K]_e^T \{q\}_e \tag{14}$$

Отсюда получаем основное соотношение МКЭ, устанавливающее связь между узловыми усилиями КЭ и его узловыми перемещениями

$$\{R\}_e = [K]_e \{q\}_e \tag{15}$$

Определять развернутые выражения коэффициентов матрицы жесткости $[K]_e$, имеющей размер 6×6, нет необходимости, так как числовые значения автоматически получаются после перемножения матриц в выражении (13).

Такой же ход рассуждений демонстрируется студентам и при выводе матрицы жесткости объемного КЭ (SOLID).

Примером изложенного выше подхода при выводе выражения (15) может служить общепринятая в сопротивлении материалов методика определения осадки пружины с небольшим шагом витка [6].

В практической части студенты по направлению «Прикладная механика» специализации 150300.62 Динамика и прочность машин дневной формы обучения в формате курсовой работы по сопротивлению материалов знакомятся с интерфейсом конечно-элементного пакета COSMOS/M и выполняют анализ напряженно-деформированного состояния балок с использованием конечных элементов BEAM2D, PLANE2D, SOLID, а также рам, которые входят в стандартный набор расчетно-графических работ. При этом ведется сравнение результатов конечно-элементного анализа с результатами, полученными традиционными методами расчета. Ценность конечно-элементного подхода в сопротивлении материалов состоит в следующем:

- осуществляется адаптация студентов к профессиональным пакетам, применяемым на предприятиях;
- дорогостоящий натуральный эксперимент заменяется численным (компьютерным) экспериментом;
- на экране студент в реальности видит деформацию объекта, что в традиционном изложении курса показать студенту очень трудно, а иногда и невозможно;
- идет постоянное сравнение результатов ручного счета с КЭ-анализом, что дает студентам уверенность в правильности результатов того или иного подходов;
- все строится на традиционных понятиях сопротивления материалов.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12143 УДК 378.147:539.3/6 (076)
Дербасов А. Н., Ильичев Н. А., Сергеева С. А. Роль конечно-элементарных представлений в преподавании курса «Сопротивление материалов» // Концепт. – 2012. – № 10 (октябрь). – ART 12143. – 0,3 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12143.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

Ссылки на источники

1. Павлов П. А., Паршин Л. К., Мельников Б. Е., Шерстнев В. А. Сопротивление материалов. – СПб.: Лань, 2003. – 528 с.
2. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
3. Биргер И. А., Мавлюков Р. Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
4. Дербасов А. Н., Сергеева С. А. Компьютерные технологии в сопротивлении материалов на примере расчета плоских рам и реализация в пакете COSMOS/M. – Н. Новгород, 2008. – 44 с.
5. Павлов П. А. и др. Указ. соч.
6. Биргер И. А., Мавлюков Р. Р. Указ. соч.

Derbasov Alexander,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Nizhni Novgorod State Technical University, Nizhni Novgorod
a.n.derbasov@mail.ru
Il'ichev Nickolay,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Nizhni Novgorod State Technical University, Nizhni Novgorod
Sergeyeva Svetlana,
Candidate of Sciences in Physics & Mathematics, Associate Professor of Nizhni Novgorod State Technical University, Nizhni Novgorod
nnsveta@rambler.ru

The role of finite element representations in teaching the course "Strength of Materials"

Abstract. At the present time the transition to digital technologies, the continued development of the interface and appearance on the market of powerful finite element codes ANSYS, NASTRAN, Solid/Works/COSMOSWorks and etc. allow us not only to expand the range of tasks but also to take a new look at teaching the strength of materials without violating the traditional presentation of the course, but enriching it with speed and ease of obtaining result, physical clearness of the process of teaching and the precision of the result which can not be obtained in the traditional statement of strength of materials.

Keywords: computer technologies, traditional and finite element approaches in the strength of materials.

ISSN 2304-120X