КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 75103 УДК 339.13
Архипов И. К., Абрамова В. И., Румянцева И. И., Степанов В. Г., Степанова Т. В., Юдин С. В., Якушин Д. И. Некоторые обобщенные модели рыночного равновесия // Концепт. – 2015. – Спецвыпуск № 06. – ART 75103. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/75103.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Архипов Игорь Константинович,
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры общих математических и естественнонаучных дисциплин ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова», Тульский филиал, г. Тула
iarh@list.ru

Абрамова Влада Игоревна,
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры экономики и предпринимательской деятельности ФГБОУ ВПО «Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого», г. Тула
iarh@list.ru

Румянцева Инна Ивановна,
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры общих математических и естественнонаучных дисциплин ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова», Тульский филиал, г. Тула
inivna@mail.ru

Степанов Вадим Григорьевич,
кандидат экономических наук, доцент, директор по исследованиям и разработкам, руководитель проектов INFORT Group, заведующий кафедрой общих математических и естественнонаучных дисциплин ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова», Тульский филиал, г. Тула
svg@infort-group.ru

Степанова Татьяна Викторовна,
руководитель консалтинговой фирмы INFORT Group, старший преподаватель кафедры общих математических и естественнонаучных дисциплин ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова», Тульский филиал, г. Тула
stv@infort-group.ru

Юдин Сергей Владимирович,
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры общих математических и естественнонаучных дисциплин ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова», Тульский филиал, г. Тула
svjudin@rambler.ru

Якушин Дмитрий Иванович,
кандидат технических наук, доцент кафедры общих математических и естественнонаучных дисциплин ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова», Тульский филиал, г. Тула
yd220174@yandex.ru

Некоторые обобщенные модели рыночного равновесия

Аннотация*. Произведены некоторые обобщения классической модели рыночного равновесия (модели Вальраса). Учтены нелинейность законов спроса и предложения, зависимость этих законов от скорости изменения цены. Рассмотрены конкретные примеры применения моделей.*

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 75103 УДК 339.13
Архипов И. К., Абрамова В. И., Румянцева И. И., Степанов В. Г., Степанова Т. В., Юдин С. В., Якушин Д. И. Некоторые обобщенные модели рыночного равновесия // Концепт. – 2015. – Спецвыпуск № 06. – ART 75103. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/75103.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

***Ключевые слова**: спрос, предложение, разностное уравнение, частное решение, цена, рыночное равновесие.*
***Раздел:** (04) экономика.*

Известны несколько моделей рыночного равновесия. Наиболее распространенной является модель Вальраса (паутинная модель рынка) [1], [2]. Регулирование рынка происходит под действием механизма изменения цен. Предложение на рынке ориентировано на спрос, и в идеале должно быть обеспечено равенство предложения и спроса. Это равенство достигается через цены. Если спрос превышает предложение, то цены начинают рости до тех пор, пока не будет удовлетворен спрос. Если же предложение превышает спрос, то цены начинают снижаться до тех пор, пока не установится равенство спроса и предложения.

Предлагаются некоторые новые модифицированные модели рыночного равновесия, которые учитывают нелинейность соотношений между объемами спроса, предложения и ценами. При этом предлагаема модификация сравнивается с классической моделью Вальраса, в которой выполняются следующие предположения:

1. Объем товара, поставляемого на рынок и купленного на нем, детерминирован и не имеет случайных составляющих.
2. Объем товара (для спроса и предложения) зависит только от его цены и не зависит от скорости изменения цены.
3. Предложение ориентировано на предыдущий период времени, в то время как спрос ориентирован на текущий момент.
4. Коэффициенты в законах спроса и предложения постоянны.

В данной работе последовательные отказываемся от этих гипотез, при этом рассматриваются особенности изменения равновесной и текущей цены в зависимости от факторов нелинейности, случайности и зависимости цены от скорости ее изменения.

1. Нелинейные законы спроса и предложения

Принимаем следующие законы спроса и предложения:

а) Спрос D:

$$x = \varphi_1[p(k)] \tag{1.1}$$

б) Предложение S:

$$x = \varphi_2\left[p(k-1)\right] \tag{1.2}$$

где k = 1,2…φ_1, и φ_2 – известные функции цены.

Для определения текущей цены p(k) используем закон рыночного равновесия:

$$\varphi_1[p(k)] = \varphi_2[p(k-1)] \tag{1.3}$$

Это нелинейное разностное уравнение первого порядка [1]. Для его решения предлагается обычный итерационный процесс:

При k = 1 имеем $\varphi_1[p(1)] = \varphi_2[p(0)] = \varphi_2(p_0)$ (1.4)

$$P(1) = \varphi_1^{-1}\{\varphi_2(p_0)\},$$

где φ_1^{-1} – обратная функция для φ_1. Для следующей итерации имеем:

$$p(2) = \varphi_1^{-1}[\varphi_2(p_1)] \tag{1.5}$$

И для любой итерации:

$$p(k) = \varphi_1^{-1}[\varphi_2(p(k-1))] \tag{1.6}$$

Процесс вычисления в стационарном случае заканчивается, когда p(k) при неограниченном росте k стремится к пределу (равновесной цене) P_*, которая определяется из равенства:

$$\varphi_1(p_*) = \varphi_2(p_*) \tag{1.7}$$

Таким образом:

Архипов И. К., Абрамова В. И., Румянцева И. И., Степанов В. Г., Степанова Т. В., Юдин С. В., Якушин Д. И. Некоторые обобщенные модели рыночного равновесия // Концепт. – 2015. – Спецвыпуск № 06. – ART 75103. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/75103.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

$$P_* = \lim_{k\to\infty} p(k) \tag{1.8}$$

Нестационарный (инфляционный) рост цены будет наблюдаться при определенных соотношениях между функциями φ_1 и φ_2 и зависит от конкретного вида этих функций.

Рассмотрим в качестве примера квадратичные законы спроса и предложения:

$$D: x = a - A_p(k) - A_1 p^2(k) \tag{1.9}$$

$$S: x = b + B_p(k-1) + B_1 p^2(k-1) \tag{1.10}$$

Приравнивая (1.9) и (1.10), получим квадратное уравнение для цены p(k):

$$A_1 p^2(k) + A_p(k) = a - b - B_p(k-1) - B_1 p^2(k-1) \tag{1.11}$$

Решая (1.11) и учитывая неотрицательность цены p(k), получим единственный корень:

$$p(\kappa) = \frac{-A + \sqrt{A^2 + 4A_1(a - b - Bp(k-1) - B_1 p^2(k-1))}}{2A_1} \tag{1.13}$$

При $A_1 = B_1 = 0$ получим линейную модель (модель Вальраса [2]):

$$A_p(k) = a - b - B_p(k-1) \tag{1.13}$$

Это линейное разностное уравнение имеет точное решение [1]:

$$p(k) = \left(-\frac{B}{A}\right)^k + \frac{a-b}{A+B} \tag{1.14}$$

При $\frac{B}{A} < 1, p(k) \to p_* = \frac{a-b}{A+B}$

Проведем анализ соотношения (1.12).

Это выражение имеет смысл только при соблюдении условия:

$$a - b - B_p(k-1) - B_1 p^2(k-1) > 0,$$

так как в противоположном случае цена p(k) принимает отрицательное значение. Найдем теперь равновесную цену P_* в нелинейной модели. Для этого считаем, что $p(k-1) = p(k)$ при $k \to \infty$ соотношения (1.11) заменится в виде:

$$A_1 p_*^2 + A_{p*} = a - b - B_{p*} - B_1 p_*^2$$

$$(A_1 + B_1)p_*^2 + (A + B)_{p*} = a - b \tag{1.15}$$

Решая это квадратное уравнение, получим:

$$P_* = \frac{-(A+B) + \sqrt{(A+B)^2 + 4(A_1+B_1)(a-b)}}{2(A_1+B_1)} \tag{1.16}$$

Если отношение $4(A_1 + B_1)(a-b) \square (A+B)^2$, то P_* из формулы (1.16) практически совпадает с этим же значением из линейной модели. Это соответствует малой нелинейности кривых спроса и предложения.

В заключение заметим, что кривые спроса и предложения (1.9) и (1.10) можно получить из соответствующей регрессивной модели, полученной из экспериментальной выборки $x = f(p)$, где $f(p)$ – квадратичная функция [2].

***2.* Спрос и предложение зависят от скорости изменения цены.**

Основные уравнения модели:

Спрос:

$$D: x = a - Ap(k) - A_1 \frac{dp(k)}{dt} \tag{2.1}$$

Предложение:

$$S: x = b + Bp(k-1) + B_1 \frac{dp(k-1)}{dt} \tag{2.2}$$

Заменим производные на отношения приращений:

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 75103 УДК 339.13
Архипов И. К., Абрамова В. И., Румянцева И. И., Степанов В. Г., Степанова Т. В., Юдин С. В., Якушин Д. И. Некоторые обобщенные модели рыночного равновесия // Концепт. – 2015. – Спецвыпуск № 06. – ART 75103. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/75103.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

$$\frac{dp(k)}{dt}=\frac{\Delta p(k)}{\Delta t};\frac{dp(k-1)}{dt}=\frac{\Delta p(k-1)}{\Delta t}$$

Поскольку $\Delta t = k-(k-1)=1$, то $\frac{dp(k)}{dt}=\Delta p(k)$; $\frac{dp(k-1)}{dt}=\Delta p(k-1)$ (2.3)

Соотношения для приращений $\Delta p(k)$ $\Delta p(k-1)$ следующие:

$$\Delta p(k)=p(k)-p(k-1) \quad (2.4)$$

$$\Delta p(k-1)=p(k-1)-p(k-2) \quad (2.5)$$

С учетом соотношений (2.1)–(2.5) получим разностное линейное уравнение 2-го порядка для p(k)

$$(A+A_1)p(k)+(B-A_1+B_1)p(k-1)-B_1p(k-2)=a-b \quad (2.6)$$

Решение этого уравнения получим в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

$$p(k)=C_1\lambda_1^k+C_2\lambda_2^k+\bar{p} \quad (2.7)$$

Здесь C_1 и C_2 – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий:

$$p(0)=p_0;\ \Delta p(1)=p_1 \quad (2.8)$$

$\lambda_{1,2}$– корни характеристического уравнения:

$$(A+A_1)\lambda^2+(B+B_1-A_1)\lambda-B_1=0 \quad (2.9)$$

Решая это уравнение, получим:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-(B+B_1-A_1)\pm\sqrt{(B+B_1-A_1)^2+4B_1(A+A_1)}}{2(A+A_1)} \quad (2.10)$$

При $A_1=B_1=0$, т. е. если цена не зависит от скорости ее изменения, имеем из (2.10)

$$\lambda_1=0;\ \lambda_2=-\frac{B}{A}$$

Частное решение неоднородного уравнения получим при условии $p(k)=p(k-1)=p(k-2)=p_*$ при $k\to\infty$. Из (2.6) получим:

$$p_*(A+A_1+B-A_1+B_1-B_1)=a-b$$

$$p_*=\frac{a-b}{A+B} \quad (2.11)$$

Это соответствует равновесной цене в классической линейной модели рыночного равновесия [1]. Найдем теперь произвольные постоянные C_1 и C_2 из начальных условий (2.8)

$$\begin{cases} p_0=C_1+C_2+p_* \\ p_1=p(1)-p_0=C_1\lambda_1+C_2\lambda_2+p_*-p_0 \end{cases}$$

Или иначе:

$$\begin{cases} p_0-p_*=c_1+c_2 \\ p_1=c_1(\lambda_1-1)+c_2(\lambda_2-1) \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$C_1=\frac{p_1+(p_*-p_0)(\lambda_2-1)}{\lambda_1-\lambda_2} \quad (2.12)$$

$$c_2=-\frac{p_1+(p_*-p_0)(\lambda_1-1)}{\lambda_1-\lambda_2} \quad (2.13)$$

Решение задачи рыночного равновесия будет устойчивым, если $|\lambda_1|<1$; $|\lambda_2|<1$.

В противном случае рост цены будет неограниченным, т. е. имеет место инфляция.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 75103 УДК 339.13
Архипов И. К., Абрамова В. И., Румянцева И. И., Степанов В. Г., Степанова Т. В., Юдин С. В., Якушин Д. И. Некоторые обобщенные модели рыночного равновесия // Концепт. – 2015. – Спецвыпуск № 06. – ART 75103. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/75103.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Ссылки на источники

1. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В., Шандра И. Г. Математика в экономике. Ч. 2. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 540 с.
2. Зудин В. И., Архипов И. К., Кочетыгов А. А. Исследование операций. Экономико-математические методы. – Тула: Изд-во РГТЭУ, 2009.
3. Гмурман В. Г. Теория вероятности и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1998.

ISSN 2304-120X

Igor Archipov,
Doctor of Engineering, professor, professor of the department of the General mathematical and natural-science disciplines Plekhanov Russian University of Economics, Tula branch, Tula
iarh@list.ru
Abramova Vlada Igorevna,
Candidate of Technical Sciences, the associate professor, the associate professor of economy and business activity of the Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula
iarh@list.ru
Inna Rumyantseva,
Candidate of Technical Sciences, associate professor, associate professor of the department of the General mathematical and natural-science disciplines Plekhanov Russian University of Economics, Tula branch, Tula
inivna@mail.ru
Vadim Stepanov,
Candidate of Economic Sciences, associate professor, director of research and to developments, project manager of INFORT Group *consulting, head of the department of the General mathematical and natural-science disciplines Plekhanov Russian University of Economics, Tula branch, Tula*
svg@infort-group.ru
Tatyana Stepanova,
head of INFORT Group *consulting, senior teacher of the department of the General mathematical and natural-science disciplines Plekhanov Russian University of Economics, Tula branch, Tula*
stv@infort-group.ru
Sergey Yudin,
Doctor of Engineering, professor, professor of the department of the General mathematical and natural-science disciplines Plekhanov Russian University of Economics, Tula branch, Tula
svjudin@rambler.ru
Dmitry Yakushin,
Candidate of Technical Sciences, associate professor of the department of the General mathematical and natural-science disciplines Plekhanov Russian University of Economics, Tula branch, Tula
yd220174@yandex.ru

Some generalized models of market balance

Abstract.. Some generalization of classical model of market balance (Valras's models) are made. Nonlinearity of laws of the demand and supply, dependence of these laws on change in price speed are considered. Specific examples of application of models are reviewed.

Key words: demand, offer, differential equation, separate judgment, price, market balance.

Рекомендовано к публикации:
Юдиным С. В., доктором технических наук, профессором ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова», Тульский филиал