ISSN 2304-120X
научно-методический электронный журнал Концепт

Гилев В. Г. Методика исследования элементарных функций на монотонность и выпуклость графика методом обобщения // Концепт. – 2015. – № 04 (апрель). – ART 15102. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15102.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

ART 15102 УДК 373.851

Гилев Валерий Георгиевич,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, информатики и методики их преподавания ФГБОУ ВПО «Ишимский государственный педагогический институт им. П. П. Ершова»; г. Ишим
Gilev.valery@gmail.com

Методика исследования элементарных функций на монотонность и выпуклость графика методом обобщения

Аннотация. *В статье решается проблема исследования элементарных функций на монотонность и выпуклость графика без использования производной, по определению. Решением проблемы явился метод, который в статье носит название метода обобщения. В результате обобщения появляется функция, промежутки знакопостоянства которой определяют промежутки монотонности и выпуклости графика исходной функции.*
Ключевые слова: *функция, монотонность, выпуклость графика, исследование, метод обобщения.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Если функция задана формулой, то установление свойств этой функции называется исследованием функции. При исследовании функций до знакомства с производной наиболее трудным является поиск промежутков монотонности. Учащиеся, зная определения возрастания и убывания функции, не могут найти соответствующие промежутки, так как не знают метода их нахождения. Вместе с тем программа по математике предусматривает, чтобы основные свойства функции были освоены учащимися до изучения элементов математического анализа. Наиболее полно о проблемах изучения свойств функций говорится в статье С. В. Дворянинова и Н. Х. Розова [1]. Эта статья подтвердила важность нахождения промежутков монотонности без использования производной. Авторами был предложен один из путей нахождения промежутков монотонности – на основе свойств монотонности сложных функций. Вместе с тем авторы статьи утверждали, что «предлагаемая в начале X класса схема исследования функции в точном понимании этой задачи реализована быть не может» [2]. В процессе решения проблемы был предложен новый метод исследования рациональных функций на монотонность, основанный на идее обобщения. Этот метод позволяет реализовывать схему исследования функции «в точном понимании этой задачи». Результаты были опубликованы в статье [3].

Метод обобщения при нахождении промежутков монотонности *рациональных* и *алгебраических* функций был реализован в книгах [4] и [5].

В статье развивается идея обобщения для исследования *элементарных* функций, т. е. всех основных функций, которые изучаются в школьном курсе математики. В ней обобщение выступает в качестве ***метода исследования*** функций не только на монотонность, но и на выпуклость графика без использования первой и второй производной.

Рассмотрим выражение $\Delta(x_1;x_2)=0$ при $x_1=x_2$. В этом случае его можно представить в виде произведения двух множителей: $\Delta(x_1;x_2)=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, таких, что при $x_1=x_2$ $B(x_1;x_2)=0$ и $A(x_1;x_2)\neq 0$. Точки $\mathrm{x}=x_1=x_2$, в которых множитель $A(x_1;x_2)=A(\mathrm{x})=0$, являются точками смены знака множителя $A(x_1;x_2)$. К таким выражениям относятся, например, выражения $\Delta(x_1;x_2)=f(x_2)-f(x_1)$ и $\Delta(x_1;x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, где $f(x)$ – элементарная функция.

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Гилев В. Г. Методика исследования элементарных функций на монотонность и выпуклость графика методом обобщения // Концепт. – 2015. – № 04 (апрель). – ART 15102. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15102.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Примеры

1. $\Delta(x_1;x_2)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)\cdot(x_2+x_1)=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2)=x_2-x_1$, $A(x_1;x_2)=x_2+x_1$. На самом деле при $x_1=x_2$ имеем: $\Delta(x_1;x_2)=x_2^2-x_1^2=0$; $B(x_1;x_2)=x_2-x_1=0$, $A(x_1;x_2)=x_2+x_1\neq 0$.

2. $\Delta(x_1;x_2)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_2^2)=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2)=x_2-x_1$, $A(x_1;x_2)=x_2^2+x_1x_2+x_2^2$.

3. $\Delta(x_1;x_2)=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2x_2^2}=(x_2-x_1)\cdot\frac{-(x_2+x_1)}{x_1^2x_2^2}=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2)=x_2-x_1$, $A(x_1;x_2)=-\frac{x_2+x_1}{x_1^2x_2^2}$.

4. $\Delta(x_1;x_2)=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}=(x_2-x_1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2)=x_2-x_1$, $A(x_1;x_2)=\frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$.

5. $\Delta(x_1;x_2)=(ax_2^2+bx_2+c)-(ax_1^2+bx_1+c)=(ax_2^2-ax_1^2)+(bx_2-bx_1)=(x_2--x_1)(x_2+x_1)+b(x_2-x_1)=(x_2-x_1)(a(x_2+x_1)+b)=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2)=x_2-x_1$, $A(x_1;x_2)=a(x_2+x_1)+b$.

6. $\Delta(x_1;x_2)=a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}\left(\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}-1\right)=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2)=\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}-1$, $A(x_1;x_2)=a^{x_1}$.

7. $\Delta(x_1;x_2)=\sin x_2-\sin x_1=2\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2)=2\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)$, $A(x_1;x_2)=\cos\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)$.

8. $\Delta(x_1;x_2)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}=\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}=\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1^2-2x_2^2}{4}==\frac{-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2}{4}=-\frac{(x_2-x_1)^2}{4}=(x_2-x_1)^2\cdot\frac{-1}{4}=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2)=(x_2-x_1)^2$, $A(x_1;x_2)=-\frac{1}{4}$. При $x_1=x_2$ имеем: $\Delta(x_1;x_2)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}=0$; $B(x_1;x_2)=(x_2-x_1)^2=0$, $A(x_1;x_2)=-\frac{1}{4}\neq 0$.

9. $\Delta(\boldsymbol{x_1};\boldsymbol{x_2})=\left(\frac{\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}}{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{3}}-\frac{\boldsymbol{x_1^3}+\boldsymbol{x_2^3}}{\boldsymbol{2}}=\frac{x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3}{8}-\frac{x_1^3+x_2^3}{2}=\frac{x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3-4x_1^3-4x_2^3}{8}=\frac{-3x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2-3x_2^3}{8}=\frac{3x_1^2(x_2-x_1)-3x_2^2(x_2-x_1)}{8}=\frac{-3(x_2-x_1)^2(x_1+x_2)}{8}=(x_2-x_1)^2\cdot\left(-\frac{3}{8}(x_1+x_2)\right)=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2)=(x_2-x_1)^2$, $A(x_1;x_2)=-\frac{3}{8}(x_1+x_2)$.

10. $\Delta(x_1;x_2)=\frac{2}{x_1+x_2}-\frac{x_2+x_1}{2x_1x_2}=\frac{4x_1x_2-(x_1+x_2)^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)}=\frac{4x_1x_2-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)}=\frac{-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)}=\frac{-(x_2-x_1)^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)}=(x_2-x_1)^2\cdot\frac{-1}{2x_1x_2(x_1+x_2)}=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2)=(x_2-x_1)^2$, $A(x_1;x_2)=\frac{-1}{2x_1x_2(x_1+x_2)}$.

11. $\Delta(x_1;x_2)=a^{\frac{x_1+x_2}{2}}-\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}=\frac{2a^{\frac{x_1+x_2}{2}}-a^{x_1}-a^{x_2}}{2}=\frac{-\left(\left(a^{\frac{x_1}{2}}\right)^2-2a^{\frac{x_1}{2}}a^{\frac{x_2}{2}}+\left(a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2\right)}{2}=\frac{-\left(a^{\frac{x_1}{2}}-a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2}{2}=\left(a^{\frac{x_1}{2}}-a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2)=\left(a^{\frac{x_1}{2}}-a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2$, $A(x_1;x_2)=-\frac{1}{2}$.

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ научно-методический электронный журнал

Гилев В. Г. Методика исследования элементарных функций на монотонность и выпуклость графика методом обобщения // Концепт. – 2015. – № 04 (апрель). – ART 15102. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15102.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

12. $\Delta(x_1;x_2)=sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{sin(x_1)+sin(x_2)}{2}=sin\,\frac{x_1+x_2}{2}-sin\,\frac{x_1+x_2}{2}\,cos\,\frac{x_1-x_2}{2}=sin\,\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\left(1-cos\,\frac{x_1-x_2}{2}\right)=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2)==1-cos\frac{x_2-x_1}{2}$, $A(x_1;x_2)=sin\frac{x_1+x_2}{2}$.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на данном числовом промежутке P, если для любых x_1 и x_2 из промежутка P, таких, что $x_2>x_1$, выполняется неравенство $f(x_2)>f(x_1)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *убывающей* на данном числовом промежутке P, если для любых x_1 и x_2 из промежутка P, таких, что $x_2>x_1$, выполняется неравенство $f(x_2)<f(x_1)$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх* на данном числовом промежутке P, если для любых x_1 и x_2 из промежутка P, таких, что $x_2>x_1$, выполняется неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз* на данном числовом промежутке P, если для любых x_1 и x_2 из промежутка P, таких, что $x_2>x_1$, выполняется неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Исходя из определений 1–4, имеем:

1. Функция $y=f(x)$ возрастает, если имеем: $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$.
2. Функция $y=f(x)$ убывает, если имеем: $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$.
3. График функции $y=f(x)$ выпуклый вверх, если имеем: $x_2>x_1\Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.
4. График функции $y=f(x)$ выпуклый вниз, если имеем: $x_2>x_1\Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

При исследовании функции $y=f(x)$ на монотонность по определению поступаем следующим образом.

Пусть $x_1,x_2\in D_f$ такие, что $x_2>x_1$, т. е. $x_2-x_1>0$. Требуется найти промежутки, в которых $f(x_2)>f(x_1)$ или $f(x_2)<f(x_1)$, т. е. оценить разность $\Delta(x_1;x_2)==f\,(x_2)-f\,(x_1)$.

Для этого представим ее в виде произведения двух множителей: $\Delta(x_1;x_2)=f(x_2)-f(x_1)=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, причем при $x_1=x_2$ $B(x_1;x_2)=0$ и $A(x_1;x_2)\neq 0$.

Аналогично при исследовании функции $y=f(x)$ на выпуклость графика по определению поступаем следующим образом.

Пусть $x_1,x_2\in D_f$ такие, что $x_2>x_1$, т. е. $x_2-x_1>0$. Требуется найти промежутки, в которых $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ или $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, т. е. оценить разность $\Delta(x_1;x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Для этого представим ее в виде произведения двух множителей: $\Delta(x_1;x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, причем при $x_1=x_2$ $B(x_1;x_2)=0$ и $A(x_1;x_2)\neq 0$.

И далее, так как в определениях монотонности и выпуклости графика функции принимается $x_2>x_1$, то есть $x_2\neq x_1$ то для определенности выделим множитель $B(x_1;x_2)>0$, тогда знак $\Delta(x_1;x_2)$ будет зависеть только от знака множителя $A(x_1;x_2)$.

Остается ответить, на каких промежутках $A(x_1;x_2)$ принимает положительные значения, а на каких – отрицательные. Для этого найдем вспомогательную функцию

Гилев В. Г. Методика исследования элементарных функций на монотонность и выпуклость графика методом обобщения // Концепт. – 2015. – № 04 (апрель). – ART 15102. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15102.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

$\varphi(x)$, сделав обобщение путем замены x_1 и x_2 на x в выражении $A(x_1; x_2)$: $\varphi(x) = A(x)$, где $x = x_1 = x_2$. Вспомогательную функцию $\varphi(x)$ назовем *функцией обобщения*. Переменная x принадлежит одному из устанавливаемых исследованием промежутков. Для нахождения самих промежутков необходимо решить соответственно неравенства $\varphi(x) > 0$ и $\varphi(x) < 0$. Решение неравенства $\varphi(x) > 0$ определяет промежутки возрастания (выпуклости вверх графика) функции. Решение неравенства $\varphi(x) < 0$ определяет промежутки убывания (выпуклости вниз графика) функции. Точки, в которых функция обобщения $\varphi(x) = 0$, называются критическими (точками экстремума или перегиба).

Итак, обобщение, т. е. замена x_1 и x_2 на x в выражении $A(x_1;x_2)$, явилось решением проблемы исследования функций на монотонность и выпуклость графика без использования первой и второй производных. Поэтому можно говорить об исследовании функций на монотонность и выпуклость графика ***методом обобщения***.

Примеры

Исследовать функцию на монотонность

1. $y = x^2$.

Решение. Пусть $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$.

$\Delta(x_1; x_2) = f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)\cdot(x_2 + x_1) = B(x_1; x_2)\cdot A(x_1; x_2)$, где $B(x_1; x_2) = x_2 - x_1 > 0$, $A(x_1; x_2) = x_2 + x_1$.

Найдем функцию обобщения $\varphi(x) = A(x) = x + x = 2x$.

Итак, $\varphi(x) = 2x$. $\varphi(x) = 0$ при $x = 0$ – критическая точка, точка экстремума.

$\varphi(x) > 0$ при $x > 0$, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ функция $y = x^2$ возрастает.

$\varphi(x) < 0$ при $x < 0$, значит, на промежутке $(-\infty; 0]$ функция $y = x^2$ убывает.

Таким образом, функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, а убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

2. $y = x^3$.

Решение. Пусть $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$. Имеем: $\Delta(x_1; x_2) = f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_2^2) = B(x_1; x_2)\cdot A(x_1; x_2)$, где $B(x_1; x_2) = x_2 - x_1 > 0$, $A(x_1; x_2) = x_2^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

Найдем функцию обобщения:

$\varphi(x) = A(x) = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$.

Итак, $\varphi(x) = 3x^2$.

$\varphi(x) = 0$ при $x = 0$ – критическая точка.

$\varphi(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. В точке $x = 0$ нет смены монотонности: $x = 0$ – точка перегиба. Функция возрастает при $x \in R$.

3. $y = \frac{1}{x^2}$.

Решение. $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Пусть $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$. Имеем: $\Delta(x_1; x_2) = f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2\, x_2^2} = (x_2 - x_1)\cdot\frac{-(x_2 + x_1)}{x_1^2\, x_2^2} = B(x_1; x_2)\cdot A(x_1; x_2)$, где $B(x_1; x_2) = x_2 - x_1 > 0$, $A(x_1; x_2) = -\frac{x_2 + x_1}{x_1^2\, x_2^2}$.

Найдем функцию обобщения: $\varphi(x) = A(x) = -\frac{x+x}{x^2x^2} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$. Итак, $\varphi(x) = -\frac{2}{x^3} \neq 0$ – критических точек нет.

$\varphi(x) > 0$ при $(-\infty; 0)$. Функция $y = x^{-2}$ возрастает.

$\varphi(x) < 0$ при $(0; +\infty)$. Функция $y = x^{-2}$ убывает.

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Гилев В. Г. Методика исследования элементарных функций на монотонность и выпуклость графика методом обобщения // Концепт. – 2015. – № 04 (апрель). – ART 15102. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15102.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

4. $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Решение. Пусть $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$. Имеем: $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$; $D_f = [0;\ +\infty)$.

$\Delta(x_1;x_2) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})\cdot(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}{(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})} = \frac{x_2-x_1}{(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})} = (x_2 - x_1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}} =$ $B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2) = x_2 - x_1 > 0$, $A(x_1;x_2) = = \frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$.

Найдем функцию обобщения: $\varphi(x) = A(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Итак, $\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$. Функция $y = x^{\frac{1}{2}}$ возрастает в промежутке определения $[0;\ +\infty)$.

5. $y = ax^2 + bx + c$.

Решение. Пусть $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$. Имеем: $\Delta(x_1;x_2) = (ax_2^2 + bx_2 + c) - -(ax_1^2 + bx_1 + c) = (ax_2^2 - ax_1^2) + (bx_2 - bx_1) = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + b(x_2 - x_1) = = (x_2 - x_1)(a(x_2 + x_1) + b) = B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2) = x_2 - x_1 > 0$, $A(x_1;x_2) = = a(x_2 + x_1) + b$.

Найдем функцию обобщения: $\varphi(x) = A(x) = a(x + x) + b = 2ax + b$.

Имеем: $\varphi(x) = 2ax + b. \varphi(x) = 0$; $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$ – критическая точка.

Функция возрастает, если $\varphi(x) > 0$; $2ax + b > 0$, откуда $2ax > -b$.

Имеем два случая:

1) если $a > 0$, то $x > -\frac{b}{2a}$, т. е. $x \in \left(-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$;

2) если $a < 0$, то $x < -\frac{b}{2a}$, т. е. $x \in \left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right)$.

Функция убывает, если $\varphi(x) < 0$, $2ax + b < 0$, откуда $2ax < -b$.

Имеем два случая:

1) если $a > 0$, то $x < -\frac{b}{2a}$, т. е. $x \in \left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right)$;

2) если $a < 0$, то . $x > -\frac{b}{2a}$, т. е. $x \in \left(-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$.

Так как $x = -\frac{b}{2a}$ – критическая точка, то приходим к выводу:

если $a > 0$, то функция у = $ax^2 + bx + c$ убывает при $x \in (-\infty;\ -\frac{b}{2a}]$ и возрастает при $x \in \left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$;

если $a < 0$, то функция $y = ax^2 + bx + c$ возрастает при $x \in (-\infty;\ -\frac{b}{2a}]$ и убывает при $x \in \left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$.

6. $y = a^x$.

Решение. Заметим, что множество значений показательной функции $y = a^x$ равно: $E_f = (0;\ +\infty)$. Пусть $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$. Имеем: $\Delta(x_1;x_2) = a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\left(\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} - 1\right) = B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;\ x_2)$, где $B(x_1;x_2) = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} - 1$, $A(x_1;x_2) = a^{x_1}$.

1) При $a > 1$ имеем: $a^{x_1} > 0$, и так как $a^{x_2 - x_1} > 1$, то $a^{x_2 - x_1} - 1 > 0$.

Таким образом, $a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1) > 0$, т. е. $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Функция возрастает.

2) При $0 < a < 1$ имеем: $a^{x_1} > 0$, и так как $a^{x_2 - x_1} < 1$, то $a^{x_2 - x_1} - 1 < 0$.

Таким образом, $a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1) < 0$, т. е. $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

Функция убывает.

7. $y = sinx$.

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Гилев В. Г. Методика исследования элементарных функций на монотонность и выпуклость графика методом обобщения // Концепт. – 2015. – № 04 (апрель). – ART 15102. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15102.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Решение. Пусть, с учетом периодичности функции $y = sinx$, $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{3\pi}{2}$. В силу свойств числовых неравенств в первом и во втором случаях: $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$.

Имеем: $\Delta(x_1; x_2) = sinx_2 - sinx_1 = 2\,sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) = B(x_1; x_2) \cdot A(x_1; x_2)$, где $B(x_1; x_2) = 2\,sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$, $A(x_1; x_2) = cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)$.

Найдем функцию обобщения: $\varphi(x) = A(x) = cos\left(\frac{x+x}{2}\right) = cos\left(\frac{2x}{2}\right) = cosx$.

Имеем: $\varphi(x) = cosx$.

$\varphi(x) = 0$; $cosx = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ – критические точки.

$\varphi(x) > 0$; $cosx > 0$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ – функция $y = sinx$ возрастает.

$\varphi(x) < 0$; $cosx < 0$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ – функция $y = sinx$ убывает.

Так как критические точки являются точками экстремума, имеем: функция синус возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$ и убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

Исследовать функцию на выпуклость графика

8. $y = x^2$.

Решение. Пусть $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$.

$\Delta(x_1; x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2}{4} = \frac{-x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2}{4} = -\frac{(x_2 - x_1)^2}{4} = (x_2 - x_1)^2 \cdot \frac{-1}{4} = B(x_1; x_2) \cdot A(x_1; x_2)$, где $B(x_1; x_2) = (x_2 - x_1)^2 > 0$, $A(x_1; x_2) = -\frac{1}{4} < 0$ – график функции $y = x^2$ выпуклый вниз.

9. $y = x^3$.

Решение. Пусть $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$.

$\Delta(x_1; x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3 - \frac{x_1^3 + x_2^3}{2} = \frac{x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3}{8} - \frac{x_1^3 + x_2^3}{2} = \frac{x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 - 4x_1^3 - 4x_2^3}{8} = \frac{-3x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 - 3x_2^3}{8} = \frac{3x_1^2(x_2 - x_1) - 3x_2^2(x_2 - x_1)}{8} = \frac{-3(x_2 - x_1)^2(x_1 + x_2)}{8} = (x_2 - x_1)^2 \cdot \left(-\frac{3}{8}(x_1 + x_2)\right) = B(x_1; x_2) \cdot A(x_1; x_2)$, где $B(x_1; x_2) = (x_2 - x_1)^2 > 0$, $A(x_1; x_2) = -\frac{3}{8}(x_1 + x_2)$.

Найдем функцию обобщения:

$\varphi(x) = A(x) = -\frac{3}{8} \cdot 2x = -\frac{3}{4}x$. Таким образом, $\varphi(x) = -\frac{3}{4}x$.

Найдем промежутки выпуклости графика функции:

$\varphi(x) < 0$ при $x > 0$ – график функции $y = x^3$ выпуклый вниз.

$\varphi(x) > 0$ при $x < 0$ – график функции $y = x^3$ выпуклый вверх.

$\varphi(x) = 0$ при $x = 0$ – критическая точка, точка перегиба.

Итак, при $x \in (-\infty; 0]$ график функции выпуклый вверх, а при $x \in [0; +\infty)$ – выпуклый вниз.

10. $y = x^{-1}$.

Решение. Заметим, что область определения функции $y = x^{-1}$ или $y = \frac{1}{x}$ равна: $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пусть $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$.

$\Delta(x_1;x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{2}{x_1+x_2} - \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2} = \frac{2}{x_1+x_2} - \frac{x_2+x_1}{2x_1x_2} = \frac{4x_1x_2-(x_1+x_2)^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)} = \frac{4x_1x_2-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)} = \frac{-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)} = \frac{-(x_2-x_1)^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)} = (x_2 - x_1)^2 \cdot \frac{-1}{2x_1x_2(x_1+x_2)} = B(x_1;x_2) \cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2) = (x_2 - x_1)^2 > 0$, $A(x_1;x_2) = \frac{-1}{2x_1x_2(x_1+x_2)}$.

Найдем функцию обобщения:

$\varphi(x) = A(x) = \frac{-1}{2x\,x(x+x)} = \frac{-1}{4x^3}$. Итак, $\varphi(x) = \frac{-1}{4x^3}$. $\varphi(x) \neq 0$ – критических точек нет.

$\varphi(x) > 0$; $\frac{-1}{4x^3} > 0$; $x < 0$ – график функции выпуклый вверх.

$\varphi(x) < 0$; $\frac{-1}{4x^3} < 0$; $x > 0$ – график функции выпуклый вниз.

Итак, график функции $y = x^{-1}$ выпуклый вверх при $x \in (-\infty;\ 0)$ и выпуклый вниз при $x \in (0;\ +\infty)$.

11. $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Решение. Пусть $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$. Имеем: $\Delta(x_1;x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = a^{\frac{x_1+x_2}{2}} - \frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2} = \frac{2a^{\frac{x_1+x_2}{2}} - a^{x_1} - a^{x_2}}{2} = \frac{-\left(\left(a^{\frac{x_1}{2}}\right)^2 - 2a^{\frac{x_1}{2}}a^{\frac{x_2}{2}} + \left(a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2\right)}{2} = \frac{-\left(a^{\frac{x_1}{2}} - a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2}{2} = \left(a^{\frac{x_1}{2}} - a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = B(x_1;x_2) \cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2) = \left(a^{\frac{x_1}{2}} - a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2$, $A(x_1;x_2) = -\frac{1}{2}$.

Функция обобщения $\varphi(x) = -\frac{1}{2} < 0$ –график функции $y = a^x$ выпуклый вниз.

Итак, график функции $y = a^x$ выпуклый вниз при $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

12. $y = sinx$.

Решение. Пусть $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$. Применяя формулу суммы синусов, получим: $\Delta(x_1;x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{sin(x_1)+sin(x_2)}{2} = sin\,\frac{x_1+x_2}{2} - sin\ cos\frac{x_1-x_2}{2} = sin\frac{x_1+x_2}{2} \cdot \left(1 - cos\frac{x_1-x_2}{2}\right) = B(x_1;x_2) \cdot A(x_1;x_2)$, где $B(x_1;x_2) = 1 - cos\frac{x_2-x_1}{2} > 0$, $A(x_1;x_2) = sin\frac{x_1+x_2}{2}$. Найдем функцию обобщения: $\varphi(x) = A(x) = sin\frac{x+x}{2} = sin\frac{2x}{2} = sinx$. Таким образом, $\varphi(x) = sinx$.

Найдем промежутки выпуклости графика исходной функции.

$\varphi(x) > 0$; $sinx > 0$; $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ – график функции $y = sinx$ выпуклый вверх.

$\varphi(x) < 0$; $sinx < 0$; $-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n$, $n \in Z$ – график функции $y = sinx$ выпуклый вниз.

$\varphi(x) = 0$; $sinx = 0$ при $x = \pi n$, $n \in Z$ – точки перегиба.

Итак, при $x \in [2\pi n\ ;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$ график выпуклый вверх, а при $x \in [-\pi + 2\pi n\ ;\ 2\pi n\ ]$, $n \in Z$ – выпуклый вниз.

Ссылки на источники

1. Дворянинов С. В., Розов Н. Х. Некоторые замечания об изучении функций в школе // Математика в школе. – 1994. – № 5.
2. Там же. – С. 28.
3. Гилев В. Г. Об одном методе нахождения промежутков монотонности рациональных функций // Математика в школе. – 1996. – № 2.
4. Гилев В. Г. Исследование рациональных функций на монотонность и экстремумы. – М., 2011. – 90 с.: ил. (Серия «Математика: элективный курс»).
5. Гилев В. Г. Исследование алгебраических функций без использования производной. – М., 2012. – 162 с.: ил. (Серия «Математика: элективный курс»).

Valery Gilev,
Candidate of Pedagogic Sciences, Associate Professor at the chair of Mathematics, Computer Science and Teaching Methods; Ishim State Pedagogical Institute P. P. Ershova; Ishim, Dolgoprudny
Gilev.valery@gmail.com

Research method of elementary functions on monotony and convexity schedule by generalization method

Abstract. The paper solves the problem of elementary functions study on monotony and convexity graphics, without using derivative, but by definition. The solution is the method that is called the method of generalization. The result is the function, which determines the intervals of constant sign intervals of monotonicity and convexity of the graph of original function.

Key words: function, monotonity, convexity, graphics, research, method of generalization.

References

1. Dvorjaninov, S. V. & Rozov, N. H. (1994) “Nekotorye zamechanija ob izuchenii funkcij v shkole”, *Matematika v shkole*, № 5.
2. Ibid., p. 28.
3. Gilev, V. G. (1996) “Ob odnom metode nahozhdenija promezhutkov monotonnosti racional'nyh funkcij”, *Matematika v shkole*, № 2.
4. Gilev, V. G. (2011) *Issledovanie racional'nyh funkcij na monotonnost' i jekstremumy*, Moscow, 90 p.: il. (Serija “Matematika: jelektivnyj kurs”).
5. Gilev, V. G. (2012) *Issledovanie algebraicheskih funkcij bez ispol'zovanija proizvodnoj*, Moscow, 162 p.: il. (Serija “Matematika: jelektivnyj kurs”).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	04.02.15	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	06.02.15
Принята к публикации *Accepted for publication*	06.02.15	Опубликована *Published*	30.04.15

ISSN 2304-120X

www.e-koncept.ru