

**Горев Павел Михайлович,**

кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа и методики обучения математике ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров

[pavel-gorev@mail.ru](mailto:pavel-gorev@mail.ru)

## Приобщение школьников к опыту творческой деятельности по математике через систему задач, реализующих интегративные связи

**Аннотация.** В статье описываются четыре вида учебной деятельности школьников, последовательное осуществление которых дает возможность приобщить учащихся к опыту творческой математической деятельности. Раскрываются некоторые методические аспекты обучения математике на внеклассных занятиях в контексте реализации внутрипредметных и межпредметных связей на примере изучения темы «Графы».

**Ключевые слова:** учебная математическая деятельность, творческая деятельность, внеклассная работа по математике, интеграция учебных предметов, межпредметные связи, внутрипредметные связи.

В эпоху постиндустриальной цивилизации основными ценностями становятся интеллектуальные системы и связанные с ними высокие технологии. Особую значимость среди них приобретают технологии в прикладных науках, таких как медицина, биохимия, геофизика, электроника и т. д. Внедрение их в сферу человеческой деятельности требует качественной перестройки системы образования. Происходящие в ней в последнее время инновационные процессы призваны сформировать личность, способную быстро ориентироваться в изменяющейся ситуации, находить качественно новые пути решения разнообразных проблем, ориентироваться во всевозрастающем потоке информации и выделять из него те знания, которые необходимы для продуктивной работы, мыслить и действовать нестандартно, творчески.

С этих позиций среднее образование, в том числе и математическое, должно становиться более практико-ориентированным, направленным на достижение результатов в непосредственной деятельности учащихся. Это становится возможным при включении в систему обучения практико-ориентированных задач, реализующих внутрипредметные и межпредметные связи с прикладными науками и обеспечивающих готовность школьника к поиску и решению новых, жизненно важных проблем, к преобразованию действительности через осуществление учебной творческой деятельности.

Об учебной творческой деятельности школьников в последнее время говорится очень много. Значительную сложность составляет разграничение исполнительской и творческой учебной деятельности: и та, и другая предполагают получение учеником новых для него знаний, умений и навыков, поскольку любая учебная деятельность направлена на это. Однако, получение новых знаний, умений и навыков не всегда является со стороны учащегося творческим процессом. Решение проблемы определения места творчества в учебной математической деятельности школьников нами видится в четком разграничении ее видов и выделении как минимум двух параметров учебной деятельности – содержания и организации [1].

Под содержанием учебной деятельности мы понимаем конкретные знания, умения, алгоритмы и приемы, которыми оперирует учащийся в ходе осуществляемой деятельности, а под организацией – порядок оперирования этими компонентами деятельности. Организация деятельности представляет собой некий более ши-

рокий, еще не сформированный, алгоритм или прием деятельности, составленный из более «мелких», уже сформированных компонентов.

В таком понимании содержание и организация могут иметь со стороны педагога четкую регламентацию, что, как правило, и осуществляется в традиционной методике обучения математике: порядок изучения материала, его содержание, основные приемы и алгоритмы предусмотрены для изучения образовательным стандартом, учебными пособиями и сообщаются учащимся практически в готовом виде.

Наш подход к определению содержания и организации дает возможность учесть роль школьника в их выборе, что уже позволяет говорить о собственных потребностях и мотивах школьников, их активной позиции в учении. Расширение возможностей выбора учащимися организации и содержания за рамки учебной темы и предмета определяет творческий подход в изучении математики.

Таким образом, комбинируя по степени свободы выбора учащимися содержания и организации, получим пять видов учебной деятельности школьника (табл. 1).

Таблица 1

## Виды учебной деятельности

|  |  |   |
|--|--|---|
| организация учебной деятельности / содержание учебной деятельности | определенная извне                                 | собственный выбор учащегося                     |
| определенное извне   | репродуктивная и продуктивная учебная деятельность | проектная учебная деятельность                  |
| собственный выбор учащегося  | исследовательская учебная деятельность             | проектно-исследовательская учебная деятельность |

1. *Репродуктивная и продуктивная учебная деятельность* характеризуются отсутствием свободы выбора школьником как содержания, так и организации деятельности. Оба параметра четко задаются учебной программой и определяются в процессе обучения педагогом. При формировании опыта *репродуктивной учебной деятельности* учащемуся предлагается непосредственное применение знаний (понятий и фактов) и умений (основных приемов и алгоритмов). На этом этапе школьники должны воспроизводить определения основных понятий, узнавать определяемые объекты и выделять их среди родственных объектов, осознанно воспроизводить формулировки теорем, знать и уметь применять основные алгоритмы и приемы деятельности. Задания *продуктивной* учебной деятельности направлены на применение уже сформированных на этапе репродуктивной деятельности знаний и умений в несколько измененной учебной ситуации. Этот уровень предполагает решение задач, условие которых в явной форме не содержит известных школьникам алгоритмов действий, однако легко сводится к ним.

Примером такого сведения может служить построение школьниками математической модели реальной задачи практики (здесь и далее задачи заимствованы из [2–4]).

**Задача 1.** В 2 литра 10-процентного раствора уксусной кислоты добавили 8 л чистой воды. Определить процентное содержание уксусной кислоты в полученном растворе.

При решении этой задачи школьнику требуется применить последовательно два алгоритма (моделью являются два числовых выражения): нахождение процента от числа (чтобы узнать, сколько «чистой» уксусной кислоты задействовано) и опре-

деления того, сколько одно число составляет процентов от другого. Очевидно, что при моделировании открывается огромный простор для решения практических задач; здесь уже на некотором уровне прослеживаются межпредметные связи.

Овладение школьниками основными знаниями и умениями по изучаемой тематике на этапах репродуктивной и продуктивной учебной деятельности, дает возможность включить в организацию процесса обучения приемы, способствующие свободному выбору школьником организации или содержания учебной деятельности.

2. Предоставление свободы выбора содержания учебной деятельности определяет переход школьника к новому виду учебной деятельности – *исследовательской*. Ученик выступает в роли исследователя – применяет полученные на предыдущих этапах знания и умения в новых условиях: других темах курса математики (внутрипредметные связи), дисциплинах, изучаемых в школе (межпредметные связи). Результатом такой деятельности служит наполнение школьником готовой структуры деятельности новым содержанием, что выражается в составлении и решении новых задач, где известный алгоритм представляется в неузнаваемой учебной ситуации. Этот процесс уже носит черты творчества, поскольку создается новый для ученика продукт.

Нами определены два подхода к конструированию системы творчески ориентированных задач для формирования исследовательской деятельности.

При первом подходе новое содержание, которым наполняется знакомая организация, как правило, выбирается школьниками из рекомендованных учителем разделов математики или смежных дисциплин. Таким образом, реализуются внутрипредметные и межпредметные связи в обучении математике.

В качестве примера такой организации исследовательской деятельности школьников опишем применение *алгоритма реализации полного перебора на графах* при решении задач из различных областей знаний.

1) При решении задач *комбинаторики и теории вероятностей* новизна содержания характеризуется получением новых знаний из этих разделов математики и умением интерпретировать задачи, возникающие в них, на языке графов.

**Задача 2.** В ящике лежат 1 белый и 3 черных шара. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что вынуты 1) 2 черных шара; 2) белый и черный шар?

**Решение.** Определим в качестве вершины графа возможный исход события, в качестве ребра – порядок выполнения исходов. Изобразим граф всех возможных исходов испытаний (рис. 1). Для большей наглядности вершины графа будем нумеровать в соответствии с номером шарика и обозначать соответствующим цветом. Теперь сосчитаем висячие вершины ветвей полученного дерева – их 12. Для случая 1) благоприятными оказываются 6 исходов, а, значит, вероятность вынуть два черных шара равна 0,5. Для случая 2) благоприятны также 6 исходов и вероятность тоже 0,5.

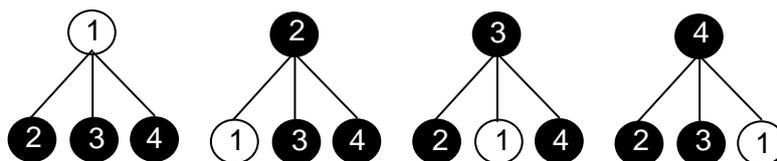


Рис. 1. Дерево перебора в задаче 2

2) Алгоритм реализации полного перебора на графах находит также свое применение при решении задач *нахождение стратегий*. К ним относят классические де-

терминированные игры, а также задачи на переливания, переправы, дележи и т.п. Обычно такие задачи решаются «в уме» и требуют немалого остроумия и смекалки. Найти хотя бы одно решение такой задачи каким-либо способом бывает не сложно. Гораздо сложнее указать самый короткий способ или все возможные способы решения.

**Задача 3.** Два человека имеют полный кувшин молока в 8 литров и два пустых кувшина в 5 и 3 литра. Как они могут разделить молоко поровну?

Новизна содержания при решении этой задачи заключается в идее приписывания каждой вершине графа своеобразного кода заполненности кувшинов – упорядоченной тройки чисел: на первом месте 8-литровый, на втором – 5-литровый и на третьем – 3-литровый (рис. 2). При этом в графе не допускается вершин с одинаковым кодом (кроме последней, которая расписана на две для большей наглядности в выборе длины перебора).

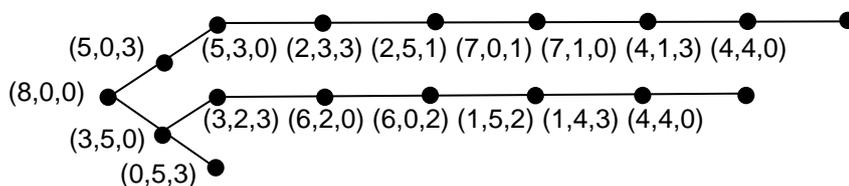


Рис. 2. Дерево перебора с помеченными вершинами в задаче 3

Таким образом, различные содержательные линии позволяют исследовать возможности применения одного или нескольких алгоритмов и общих приемов действий к новым задачам. Подобные варианты применения изначально подбирает учитель и предлагает школьникам увидеть в незнакомой ситуации знакомый алгоритм, подобрать и самостоятельно изучить новые понятия и факты.

При втором подходе новое содержание, которым наполняется знакомая организация, может быть интерпретировано как применение известного алгоритма действий в малоузнаваемой ситуации. Приведем пример.

**Задача 4.** Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям (рис. 3), так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?

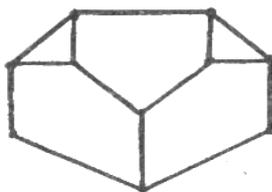


Рис. 3

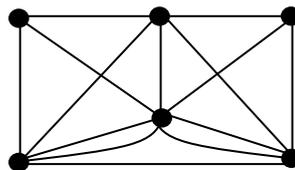


Рис. 4

Здесь сложность возникает при определении школьниками вершин и ребер графа, необходимых для решения задачи. Вершинами целесообразно считать области, на которые заборы разбивают плоскость, а ребрами – факт пересечения забора. Как показывает практика, такой подход к определению вершин и ребер очень сложен для учащихся и лишь немногие могут сделать его самостоятельно. Однако, увидев построенный граф (рис. 4), учащиеся легко решают задачу, поскольку могут применить известный им факт – правило Эйлера поиска цикла и пути в графе. Очевидно, такого пути нет. Значит, и требуемое условием задачи невозможно.

Задачи такого рода очень полезны при формировании опыта творческой деятельности, поскольку развивают нестандартность мышления, способность видеть знакомый алгоритм в незнакомой ситуации.

Таким образом, исследовательская учебная деятельность оказывается направленной на решение разнообразных, в том числе и практических, задач, в которых организация деятельности не имеет существенной новизны, а содержание либо подбирается под алгоритм, либо скрывает его в значительной степени, что требует осознания этого алгоритма в новой учебной ситуации.

3. Если учащемуся предоставить свободу выбора организации учебной деятельности (то есть порядка применения известных алгоритмов и их компонентов), он перейдет к *проектной учебной деятельности*. Школьник начинает работу, заключающуюся в исследовании известного содержания с позиции применения к нему новых алгоритмов или их комбинаций. Результатом такой деятельности является поиск новых алгоритмов в знакомой учебной ситуации или решение поставленных в изучаемой теме задач другими способами. Этот процесс также носит черты творчества.

Нами выявлены два подхода к конструированию системы творчески ориентированных задач для формирования проектной деятельности.

При первом подходе реализуется поиск других вариантов решения к задачам, разобранным в данной теме. Очевидно, что школьников нужно обучить производить такой поиск. Для этого необходимо проводить занятия «Задача одна – решения разные», демонстрируя тем самым разнообразные связи между разделами и отдельными темами математики. Приведем пример.

**Задача 5.** Три подруги были в белом, красном и голубом платьях. Их туфли были тех же трех цветов. Только у Тамары цвета платья и туфель совпадали. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвет платья и туфель каждой из подруг.

С помощью графов эта задача решается следующим образом.

**Решение 1.** Изобразим три множества: множество подруг, множество их платьев и множество их туфель. Проведем на рисунке сплошные (если есть соответствие) и пунктирные (если его нет) ребра графа, отвечающие условиям задачи (рис. 5а). Ответ должен получиться в виде трех сплошных треугольников, не имеющих общих вершин. Ясно, что Лида должна быть в голубых туфлях (вершина *б* занята, с вершиной *к* – пунктирная линия) и не в голубом платье. Тогда Тамара в красных туфлях, а, значит и в красном платье. Следовательно, Валя в белом платье, а Валя – в голубом (рис. 5б).

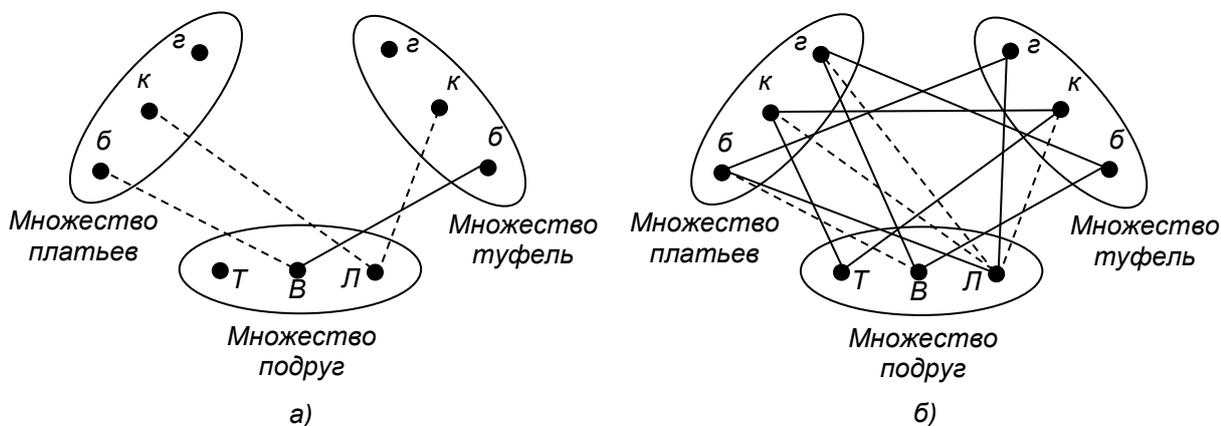


Рис. 5. Решение задачи 5 с помощью графов

При решении этой задачи можно применить метод исчерпывающих проб и составление таблиц. Часто эти таблицы имеют форму квадратов, поэтому их и называют «логическими квадратами». В том случае, когда в задаче рассматриваются значения только двух переменных, достаточно одного логического квадрата (таблицы с двумя входами). Иногда для решения одной задачи приходится составлять более одного квадрата. Так, в рассматриваемой задаче решению помогает составление двух логических квадратов. При этом истинное высказывание обозначают цифрой 1, ложное – цифрой 0.

**Решение 2.** Логические квадраты для этой задачи будут иметь следующий вид.

| Платья |         |         |        | Туфли |         |         |
|--------|---------|---------|--------|-------|---------|---------|
| Белое  | Красное | Голубое |        | Белые | Красные | Голубые |
| 0      | 1       | 0       | Тамара | 0     | 1       | 0       |
| 0      | 0       | 1       | Валя   | 1     | 0       | 0       |
| 1      | 0       | 0       | Лида   | 0     | 0       | 1       |

Заполним квадраты. По условию Валя была в белых туфлях (1), и, значит, не в белом платье (0). Ни туфли, ни платье Лиды не были красными (0). Так как у каждой подруги только одни туфли и одно платье, в каждом квадрате в каждой строке и каждом столбце должны стоять ровно по одной 1. Значит, можно заполнить полностью первый столбец и вторую строку второго квадрата. Тогда ясно, что Тамара в красных туфлях, а Лида в голубых. Значит, у Тамары красное платье, а у Лиды – не голубое. Вновь, заполнив нулями строки и столбцы квадрата, в которых уже стоят единицы, выясняем, что платье Вали – голубое, а Лиды – белое.

При втором подходе конструирование системы задач основывается на подборе задач со знакомым школьникам содержанием, но требующим применения новых содержательных идей. Приведем пример.

**Задача 6.** В некотором обществе любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что в этом обществе все имеют одинаковое число знакомых.

**Решение.** Как обычно, члены общества будут вершинами графа, а знакомства между ними – ребрами. Условие (1) «любые два знакомых не имеют общих знакомых» означает, что граф не содержит «треугольников», т. е. трех вершин попарно соединенных ребрами. Условие (2) «любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых» означает, что любые вершины, не соединенные ребром, соединены ровно двумя путями из двух ребер.

Сначала докажем, что два знакомых человека  $A$  и  $B$  имеют одинаковое число знакомых (рис. 6а). По условию (1) все знакомые  $A$  не знакомы с  $B$ , и знакомые с  $B$  не знакомы с  $A$ . Значит, по условию (2) каждая пара  $(A_i, B)$  должна иметь ровно двух общих знакомых. Один из них – это  $A$ , а второй должен быть из  $B_1, B_2, \dots, B_m$ . Это означает, что каждый  $A_i$  знаком ровно с одним из  $B_1, B_2, \dots, B_m$ . При этом не может быть, что  $A_i$  и  $A_j$  знакомы с одним  $B_k$  (рис. 6б) потому, что тогда незнакомые между собой  $A$  и  $B_k$  будут иметь трех общих знакомых  $A_i, A_j$  и  $B$ . Значит, каждый знакомый  $A$  знаком ровно с одним знакомым  $B$ , и наоборот. Поэтому их одинаковое число.

Возьмем теперь двух незнакомых  $A$  и  $C$  и найдем их общего знакомого  $B$ . У  $A$  и  $B$ , у  $B$  и  $C$  одинаковое число знакомых, значит, у  $A$  и  $C$  – тоже.

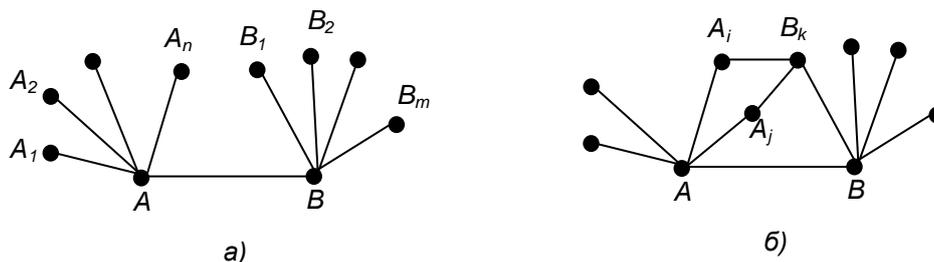


Рис. 6. Графы решения задачи 6

Решение этой трудной задачи требует от школьников больших творческих усилий. Здесь не используются какие-то известные факты из теории графов. Ученик должен сам, рассмотрев ситуацию, выделить обстоятельства, приводящие к решению, и найти нужные аргументы. Графы используются здесь только для придания наглядности рассуждениям. Но, как это часто бывает, именно наглядность делает решение доступным.

Таким образом, проектирование возможности решения задач другими способами и применения новых содержательных идей позволяет формировать у школьников способности применять знания и умения, полученные ранее в новых ситуациях, способствует формированию умений видеть знакомую ситуацию в незнакомой задаче, что без сомнений, является признаком творческой работы учащихся.

И исследовательская, и проектная учебная деятельность предоставляют свободу выбора учащимся одного из указанных параметров. Необходимо, чтобы учащиеся прочувствовали предоставленную возможность выбора и восприняли свою сопричастность к процессу их обучения. Однако нужно точно предугадать момент готовности переходящего на новый для него этап деятельности. В первое время учащиеся будут испытывать трудности в реализации своей деятельности описанных двух видов, поэтому помощь со стороны учителя должна быть значительной. Приобретая опыт, со временем учащиеся все более и более проникаются предоставляемой свободой и, как показывает опыт, сами начинают отказываться от помощи педагога, получая все более интересные результаты своей деятельности.

4. Если учащийся смог получить результаты в проектной и исследовательской учебной деятельности на уровне личных достижений, то следует констатировать, что он подведен к этапу реализации *проектно-исследовательской учебной деятельности*. Этот вид учебной деятельности предполагает, что и содержание, и организацию каждый ученик выбирает самостоятельно. Содержание проектно-исследовательской деятельности возникает вследствие сформулированного учеником самостоятельно или при помощи учителя творческого задания, организация определяется учащимся из различных форм проделанной им работы на проектном уровне.

Ее результатом служит учебный продукт, отличающийся как новизной (в основном, субъективной) содержания или его части, так и структуры, полученных в результате свободного выбора самого учащегося. Как правило, проектно-исследовательская деятельность организуется в рамках работы школьников над учебными проектами. Здесь под *учебным проектом* понимается совокупность различных видов деятельности, направленных на получение знаний и умений по дисциплине, их организация и создание нового продукта с рекомендациями по его использованию в одной из предусмотренных форм: портфолио (пакет документации), презентация, база данных, видеофильм, предметная модель и т. п.

Примерами проектно-исследовательской деятельности, которую осуществляют школьники при изучении темы «Графы», могут служить разработки ими проектов на темы: теорема Эйлера на практике; топология графов; матрицы и графы; графы и лабиринты; графы с цветными ребрами; применение графов для решения экстремальных задач; графы на шахматной доске; применение теории графов к задачам теории чисел; графы и программирование; графы и электрические цепи; графы и стратегические игры; применение теории графов в биологии; как графы помогают химии; графы и спортивные парадоксы; графы в экономике и управлении; теория графов и составление расписаний и т. д.

В нашей практике одним из наиболее удачных, реализующий ко всему прочему связи с химией, оказался информационный проект «Как графы помогают химии». На двенадцати слайдах проекта подробно рассказывается о химических графах: двухдольных, молекулярных, сигнальных, химико-технологических, описывается применение индекса Винера.

Из выше сказанного становится понятным, что в формировании учебной математической деятельности школьников и приобщении их к опыту творческой деятельности учащиеся при изучении каждого тематического модуля проходят несколько этапов. Сначала знания, умения и навыки формируются на уровне осуществления репродуктивной и продуктивной учебной деятельности, где уже возможно и даже необходимо использовать межпредметные связи. Затем, предоставляя свободу выбора либо содержания, либо структуры, параллельно осуществляется исследовательская и проектная учебная деятельность. При этом возникает необходимость поиска применения математических знаний в различных областях науки и техники, а также поиска новых алгоритмов решения известных задач. Вершиной успеха служит осуществление школьниками проектно-исследовательской деятельности, содержание которой сложно представить вне взаимосвязей с различными областями как математики, так и других дисциплин.

Таким образом, на всех этапах формирования учебной творческой математической деятельности предоставляются широкие возможности для реализации внутрипредметных и межпредметных связей.

## Ссылки на источники

1. Горев П. М. Приобщение к математическому творчеству: Дополнительное математическое образование. – Saarbrücken: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2012. – 156 с.
2. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике: задачи логического характера. – М.: Просвещение, 1996. – 160 с.
3. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. – Киров: АСА, 1994. – 272 с.
4. Куланин Е. Д., Норин В. П., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. 3000 конкурсных задач по математике. – М.: Айрис-пресс, 2003. – 624 с.

## Gorev Pavel,

*Ph.D., assistant professor of mathematical analysis and methodology of teaching mathematics Vyatka State University of Humanities, Kirov*

[pavel-gorev@mail.ru](mailto:pavel-gorev@mail.ru)

## Familiarizing students to experience creativity in mathematics through tasks that implement integrative communication

**Abstract.** This article describes the four types of learning activities students, consistent implementation of which allows students to attach to the experience of creative mathematical activity. Revealed some methodological aspects of teaching mathematics in extra-curricular activities in the context of Intra and interdisciplinary connections on the example of studying the topic "The Count."

**Keywords:** teaching mathematical activities, creative activities, class work in mathematics, the integration of academic subjects, interdisciplinary communication, Intra communication.