

Шилова Зоя Вениаминовна,

кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа и методики обучения математике ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров

Насибуллина Эльвира Фаритовна,

выпускница факультета информатики, математики и физики ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров

Некоторые методические особенности изучения темы «Интеграл» в школьном курсе математики

Аннотация. В статье дается различное понимание определенного интеграла с позиций решения прикладных задач физики. Доказываются свойства определенного интеграла средствами решения таких задач.

Ключевые слова: интеграл, первообразная, физические задачи для изучения интеграла.

Одной из тем школьного курса математики, которая вызывает много споров, является «Определенный интеграл». Интеграл ввели в школьную программу в связи с реформами образования конца 60-х – начала 70-х годов XX века. Специфика рассуждений, свойственная математическому анализу, привносит диалектичность в мышление учащегося, способствует формированию представлений о математике как развивающейся науке, позволяет учащимся совершить следующий шаг в обобщении полученных ими знаний из курса элементарной математики, а также открывает перспективу дальнейшего расширения имеющихся знаний. Все это способствует формированию качеств мышления, необходимых в настоящее время каждому образованному человеку, и отвечает социальным требованиям модернизации российского образования.

Однако практика показывает, что трудности, возникающие при изучении этой темы в средней школе, сохраняются. Причины трудностей – высокий уровень абстракции понятий, сложная логическая структура их определений, недостаточность времени для осмысления сложных вопросов.

Поэтому у учащихся не складывается целостного представления о понятии определенного интеграла, а остаются разрозненные, часто не связанные между собой сведения, что не только не способствует развитию математической культуры, но и затрудняет дальнейшее обучение в вузе.

Понятие интеграла является одним из основных в математике. Изучение этой темы завершает школьный курс математического анализа, знакомит учащихся с новым инструментом познания мира, а рассмотрение в школе применения интегрального исчисления к важнейшим разделам физики показывает учащимся значение высшей математики. Поэтому, более широко привлекая задачи практического содержания при изучении данной темы, можно существенно улучшить усвоение понятия интеграла учащимися.

Необходимость связи между учебными предметами диктуется также дидактическими принципами обучения, воспитательными задачами школы, связью обучения с жизнью, подготовкой учащихся к практической деятельности. Эти связи играют важную роль в повышении практической и научно-теоретической подготовки учащихся, существенной особенностью которой является овладение школьниками обобщенным характером познавательной деятельности.

При формировании основного понятия (интеграла) необходимо учитывать, что оно даётся в достаточно общей, абстрактной форме. Потому, главная трудность состоит в конкретизации, т. е. в умении видеть за математическими терминами и их определениями конкретные образы. Здесь большую помощь ученику должны оказать хорошо подобранные примеры.

Помимо знания определения понятия ученик должен, по возможности, иметь о них зрительное представление (например, определенный интеграл - перемещение точки за промежуток времени). Усвоенные физические образы, рисующие картину рассматриваемого явления, надолго остаются в памяти учащихся. Этому способствует решение задач, например, физического содержания.

При введении понятия интеграла как предела интегральных сумм учитель может использовать следующие задачи для иллюстрации.

1) *Задача о работе переменной силы.* Предположим, что на точку, движущуюся по оси x , действует некоторая сила F , направленная по той же оси. Мы знаем, что если сила F постоянна, то работа равна Fs , где s – путь, пройденный точкой. Предположим теперь, что F меняется от точки к точке и нам известно её значение $F(x)$ в каждой точке x некоторого промежутка $[a; b]$. Как найти работу A по перемещению точки из a в b ?

Решение. Разобьём отрезок $[a; b]$ на n отрезков. Будем приближенно считать, что на каждом отрезке сила постоянна. В качестве постоянной силы на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ можно взять значение функции F в одной из точек этого отрезка, например в точке x_k . Работу на k -отрезке пути приближенно можно представить как произведение $F(x_k)\Delta x_k$, а на всем отрезке – суммой:

$$A_n = F(x_1)\Delta x_1 + \dots + F(x_n)\Delta x_n. \quad (1)$$

Таким образом, работу A по перемещению точки из a в b можно приближенно вычислять по формуле (1).

Сумму (1) называют интегральной суммой функции $F(x)$ на отрезке $[a; b]$. При этом предполагается, что функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и может принимать любые значения. Если $n \rightarrow \infty$ и длины отрезков разбиения стремятся к нулю, то интегральная сумма A_n стремится к некоторому числу, его и называют интегралом

от функции $F(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают $\int_a^b F(x)dx$.

2) *Задача о вычислении массы неоднородного стержня.* Дан прямолинейный неоднородный стержень, плотность которого в точке x вычисляется по формуле $\rho = \rho(x)$. Найти массу стержня.

Решение. Рассмотрим массу стержня на отрезке $[a; b]$. Разобьём отрезок на n равных частей. Будем приближенно считать, что на каждом отрезке плотность постоянна. В качестве постоянной плотности на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ можно взять значение функции ρ в одной из точек этого отрезка, например в точке x_k . Массу на k -отрезке приближенно можно представить как произведение $\rho(x_k)\Delta x_k$, а на всем отрезке – суммой:

$$m_n = \rho(x_1)\Delta x_1 + \dots + \rho(x_n)\Delta x_n. \quad (2)$$

Таким образом, массу стержня m можно приближенно вычислять по формуле (2). Точное значение массы стержня вычисляется по формуле $m = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$. Далее вводится понятие интеграла как предела суммы.

3) *Задача о перемещении точки.* Пусть по прямой движется материальная точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой $v = v(t)$. Найти перемещение точки за промежуток времени $[a; b]$.

Решение. Если бы движение было равномерным, то задача решалась бы очень просто: $s = vt$, то есть $s = v(b - a)$. Для неравномерного движения разобьём промежуток времени $[a; b]$ на n равных частей. Рассмотрим промежуток времени $[t_{k-1}; t_k]$ и будем считать, что в этот промежуток времени скорость была постоянной, такой, как в момент времени t_k : $v = v(t_k)$. Перемещение точки за промежуток времени $[t_{k-1}; t_k]$ приближенно можно представить как произведение $v(t_k)\Delta t_k$. Найдем приближенное значение перемещения s : $s \approx S_n$, где $S_k = v(t_1)\Delta t_1 + \dots + v(t_k)\Delta t_k$, $S_k = v(t_1)$. Точное значение перемещения вычисляется по формуле $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Далее вводится понятие интеграла как предела суммы.

4) *Задача о давлении жидкости на стенку.* Бассейн высоты H наполнен водой. Вычислить давление воды на прямоугольную стенку бассейна с основанием прямоугольника, равным a .

Решение. Разделим высоту H на n равных частей (Δh). Стенка разделится на «элементы». Так как кубометр воды весит тонну, то давление столба жидкости высоты h_i м, имеющего сечение 1 м^2 , равно h_i тоннам. Давление же воды на элемент, находящийся на глубине h_i , равно произведению h_i на площадь элемента: $h_i a \Delta h$. Обозначим произведение $h_i a$ через $F(h_i)$. Тогда величина давления на всю стенку приближенно равна $P_n \approx F_1(h_1)\Delta h_1 + \dots + F_n(h_n)\Delta h_n$.

Данную сумму называют интегральной суммой функции и $F(h)$ на отрезке $[0; H]$. При этом предполагается, что функция $F(h)$ непрерывна на отрезке $[0; H]$ и может принимать любые значения. Если $n \rightarrow \infty$ и высоты «элементов» стремятся к нулю, то точное выражение суммы равно $\lim_{\Delta h \rightarrow 0} P_n$. Его называют определенным интегралом

от функции $F(h)$ на отрезке $[0; H]$ и обозначают $\int_0^H F(h)dh$.

Далее понятие определенного интеграла обобщается на произвольную непрерывную функцию $F(x)$ и произвольный отрезок $[a; b]$.

Такой подход к определению интеграла предполагает введение операции интегрирования как независимой операции; при этом интеграл определяется как предел последовательности, составленной из интегральных сумм.

С учениками решаются данные физические задачи, затем задача о площади криволинейной трапеции. После чего, обобщив полученные результаты, переходят к определению интеграла как предела сумм. Хотя данное определение громоздко, но идея метода наглядна (геометрическая интерпретация – площадь криволинейной трапеции). Вместе с определением интеграла получают и способ его вычисления.

Но, как известно, интеграл можно определять не только как предел интегральных сумм. Поэтому рассмотрим несколько задач, где интеграл определяется как приращение первообразной.

1) *Задача о перемещении точки.* Пусть $v = v(t)$ скорость прямолинейного движения точки, заданная на некотором промежутке времени $[t_1; t_2]$. При этом пусть $v(t) > 0$. Как выразится длина пути, пройденного точкой за данный промежуток времени?

Решение. Обозначим координату движущейся точки в момент t через $S(t)$. То-

гда, так как движение при $v > 0$ происходит только в положительном направлении (или иначе, так как $S(t)$ – функция возрастающая, ввиду того что $S'(t) = v(t) > 0$), то искомое расстояние будет выражаться числом $S(t_2) - S(t_1)$. С другой стороны, $S(t)$ есть первообразная функции $v(t)$ ($S'(t) = v(t)$). Таким образом, вычисление длины пути, пройденного точкой за данный промежуток времени, сводится к отысканию первообразной $S(t)$ функции $v(t)$, т. е. к интегрированию функции $v(t)$.

Разность $S(t_2) - S(t_1)$ называют интегралом от функции $v(t)$ на отрезке $[t_1; t_2]$ и обозначают так: $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = S(t_2) - S(t_1)$.

2) *Задача об импульсе силы.* Пусть на тело массой m в течение времени t действует какая-то сила $F(t)$. Найти количество движения тела при заданной зависимости силы от времени за промежуток времени $[t_1; t_2]$.

Решение. Как известно из физики, второй закон Ньютона в импульсном представлении выражает уравнение $\Delta P = F \Delta t$. Произведение $P = mv(t)$ массы на скорость называется «количество движения». Так как скорость тела зависит от времени, то за промежуток времени $[t_1; t_2]$ искомое количество движения может быть найдено так: $P(t_2) - P(t_1)$. С другой стороны, $P(t)$ есть первообразная функции $F(t)$. Таким образом, вычисление количества движения тела за данный промежуток времени сводится к отысканию первообразной $P(t)$ функции $F(t)$. Разность $P(t_2) - P(t_1)$ называют интегралом от функции $F(t)$ на отрезке $[t_1; t_2]$ и обозначают так: $\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt = P(t_2) - P(t_1)$.

Величина называется также «импульсом силы» за время $[t_1; t_2]$.

3) *Задача о количестве электричества.* Представим себе переменный ток, текущий по проводнику. Вычислим количество электричества, протекающего за интервал времени $[a; b]$ через сечение проводника.

Решение. Если бы сила не менялась со временем, то изменение количества электричества q равнялось бы произведению $I(b - a)$. Пусть задан закон изменения $I = I(t)$ в зависимости от времени. Тогда количество электричества, протекающего за интервал времени $[a; b]$, равно $q(b) - q(a)$. С другой стороны, на малом промежутке времени можно считать силу тока постоянной и равной $I(t)$, а $dq = I(t)dt$, следовательно, вычисление количества электричества за данный промежуток времени сводится к отысканию первообразной функции $I(t)$.

Разность $q(b) - q(a)$ называют интегралом от функции $I(t)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают так: $\int_a^b I(t) dt = q(b) - q(a)$.

Этот подход к определению интеграла предполагает введение операции интегрирования как операции, обратной дифференцированию. При этом формула Ньютона–Лейбница практически служит определением интеграла.

Однако в этом случае идея метода суммирования отходит на второй план. Недостаток этого подхода состоит в том, что появляются затруднения при изучении приложений интеграла. В итоге все-таки приходится рассматривать интеграл как предел интегральных сумм, чтобы получить единый, достаточно общий метод решения задач геометрии, механики, электродинамики и других разделов физики.

Все вышерассмотренные задачи – это наиболее часто встречающиеся в школьном курсе физики законы и формулы, поэтому они не требуют от учащихся дополнительных знаний по физике, а, следовательно, удовлетворяют как принципу научности, так и принципу доступности материала.

Кроме того, при изучении интеграла существенным является отбор свойств, которые необходимо знать ученикам. Их должно быть достаточно для рассмотрения приложений интеграла, и в то же время не должны вводиться свойства, без которых можно обойтись в дальнейшем.

Нижеприведенные свойства интеграла рассматриваются на различных физических задачах.

$$1^0. \int_a^b F(x)dx = -\int_b^a F(x)dx. \quad (3)$$

Рассмотрим доказательство данного свойства на задаче о перемещении точки. (Пусть по прямой движется материальная точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой $v=v(t)$. Найти перемещение точки за промежуток времени $[a; b]$.)

При введении интеграла рассматривается случай, когда нижний предел интегрирования меньше верхнего. Но определенный интеграл можно обобщить и на случай, когда верхний предел меньше нижнего. В этом случае обратимся к определению интеграла как суммы. Разбивая отрезок от $[a; b]$ промежуточными значениями t_1, t_2, \dots, t_{n-1} , убедимся, что все Δt теперь отрицательны. Легко убедиться, что $\int_a^b v(t)dt = -\int_b^a v(t)dt$, (1) так как при любом разбиении отрезка $[a; b]$ соответствующие суммы будут отличаться знаками всех Δt во всех слагаемых.

$$2^0. \text{Свойство аддитивности интеграла: } \int_a^b F(x)dx = \int_a^c F(x)dx + \int_c^b F(x)dx.$$

Докажем свойство на примере той же задачи о перемещении точки. Существенное свойство интеграла состоит в том, что область интегрирования можно разбить на части: путь, пройденный за время от a (начала) до b (конца), можно представить как сумму пути, пройденного за время от a до c (промежуточного момента) и от c до b .

$$\int_a^b v(t)dt = \int_a^c v(t)dt + \int_c^b v(t)dt. \quad (4)$$

При помощи соотношения (3) можно распространить формулу (4) и на случай, когда c не лежит внутри промежутка $[a; b]$.

$$\text{Пусть } c > b > a. \text{ Тогда очевидно } \int_a^c v(t)dt = \int_a^b v(t)dt + \int_b^c v(t)dt.$$

Перенесем последнее слагаемое в левую часть и воспользуемся (3):

$$\int_a^c v(t)dt - \int_b^c v(t)dt = \int_a^b v(t)dt + \int_b^c v(t)dt = \int_a^b v(t)dt. \quad (5)$$

Таким образом получили равенство (5), в точности совпадающее с (4).

Аналогично можно рассмотреть случаи другого расположения чисел a, c, b (их всего шесть вариантов). Учащиеся легко могут самостоятельно убедиться, что формула (4) оказывается верной во всех этих случаях, т. е. независимо от взаимного расположения чисел a, c, b .

3⁰. Свойства линейности интеграла:

$$\int_a^b (F_1(x) + F_2(x))dx = \int_a^b F_1(x)dx + \int_a^b F_2(x)dx,$$

$$\int_a^b aF(x)dx = a \int_a^b F(x)dx.$$

Рассмотрим доказательство этих свойств на примере задачи о работе переменной силы и задачи о давлении жидкости на прямоугольную стенку бассейна.

3.1. Пусть к материальной точке, движущейся по оси x , приложены две силы $F_1(x)$ и $F_2(x)$, направленные по одной прямой в одну сторону. Под действием этих сил материальная точка переместилась из точки a в точку b , при этом работа каждой силы на этом отрезке вычисляется по формулам: $A_1 = \int_a^b F_1(x)dx$ и $A_2 = \int_a^b F_2(x)dx$. Тогда

общая работа, совершенная обеими силами, равна

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^b F_1(x)dx + \int_a^b F_2(x)dx. \quad (6)$$

С другой стороны, если к телу приложены две силы $F_1(x)$ и $F_2(x)$, направленные по одной прямой в одну сторону, то их равнодействующая $F(x)$ находится по формуле $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$. Работа этой силы равна

$$A = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b (F_1(x) + F_2(x))dx. \quad (7)$$

В силу равенства левых частей в формулах (6) и (7) получаем равенство правых, то есть $\int_a^b (F_1(x) + F_2(x))dx = \int_a^b F_1(x)dx + \int_a^b F_2(x)dx$.

Нетрудно показать, что данное свойство выполняется для любого конечного числа сил, действующих на точку и направленных по одной прямой в одну сторону. Это свойство показывает, что интеграл суммы нескольких слагаемых разбивается на сумму интегралов отдельных слагаемых.

Если же к материальной точке, движущейся по оси x , приложены две силы $F_1(x)$ и $F_2(x)$, направленные по одной прямой, но в противоположную сторону, то их равнодействующая $F(x)$ при $F_1(x) > F_2(x)$ находится по формуле $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$.

Тогда верно следующее равенство: $\int_a^b (F_1(x) - F_2(x))dx = \int_a^b F_1(x)dx - \int_a^b F_2(x)dx$.

3.2. Ранее был приведен метод введения интеграла, основанный на рассмотрении задачи о давлении жидкости на прямоугольную стенку бассейна с основанием a , в результате решения которой получена формула

$$P = \int_0^H F(h)dh = \int_0^H h_i a dh, \quad (8)$$

где a – величина постоянная, равная ширине стенки бассейна.

Разделим прямоугольную стенку бассейна на a прямоугольников с основанием, равным единице. Тогда весь бассейн также разделится на a равных частей, причем давление на прямоугольную стенку с основанием, равным единице в каждой части,

будет вычисляться по формуле $p = \int_0^H h_i dh$. Учитывая, что во всех частях давление одно и то же и всего частей a , то общее давление равно

$$P = ap = a \int_0^H h_i dh. \quad (9)$$

В силу равенства левых частей в формулах (8) и (9) получаем равенство правых, т. е. $\int_0^H ah_i dh = a \int_0^H h_i dh$.

Данное равенство можно обобщить на произвольную непрерывную функцию $F(x)$ и произвольный отрезок $[a; b]$, т. е. $\int_a^b aF(x)dx = a \int_a^b F(x)dx$.

4⁰. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Докажем данное свойство с помощью задачи о массе стержня. При введении понятия интеграла с помощью задачи о вычислении массы неоднородного стержня была получена формула $m = \int_a^b p(x)dx$.

Как известно, плотность вещества – это физическая величина, показывающая, чему равна масса вещества в единице объема, следовательно, это величина неотрицательная. С другой стороны, масса вещества есть также величина неотрицательная. Таким образом, получаем: если подынтегральная функция неотрицательна на рассматриваемом отрезке, то $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Используемые в доказательствах свойств интеграла физические модели, во-первых, наглядны, во-вторых, при соответствующей методике введения понятия интеграла данная методика введения свойств заставляет постоянно повторять пройденное, вспоминать полученные при введении формулы. Все это удовлетворяет принципу прочности знаний и наглядности в обучении.

После решения физических задач можно доказать все рассмотренные свойства интеграла на основе геометрического смысла интегральной суммы и площадей криволинейных трапеций, что позволит подчеркнуть связь математики и физики, а также будет способствовать лучшему усвоению учащимися свойств интеграла.

Кроме того, можно использовать задачи из различных разделов физики для отработки навыков интегрирования.

1. Использование свойств интеграла

№ 1. Вычислите силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 м и высотой 6 м (рис. 1).

Решение. Сила давления воды зависит от глубины x погружения площадки: $P(x) = ax$, где a – площадь пло-

щадки. Получаем $P = 18 \int_0^6 x dx = 18 \frac{6^2 - 0^2}{2} = 324$ (т).

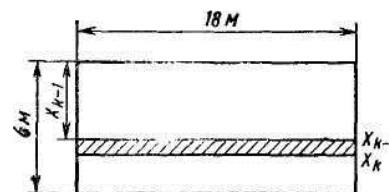


Рис. 1

№ 2. Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Какова наибольшая высота, достигаемая телом?

Решение. Скорость тела в любой момент времени t движения равна разности начальной скорости и скорости gt , вызванной ускорением, определяемым силой тяжести: $v = v_0 - gt$. Движение вверх будет происходить при $v = v_0 - gt > 0$, то есть при

$$0 < t < \frac{v_0}{g}. \text{ Таким образом, максимальная высота полета равна } h = \int_0^{\frac{v_0}{g}} (v_0 - gt) dt = \frac{v_0^2}{2g}.$$

2. Введение новой переменной

№ 1. Задан закон изменения скорости движения материальной точки по прямой: $y = (2t + 1)^{\frac{2}{3}}$ (время t в секундах, скорость v в метрах в секунду). Какой путь пройдёт точка за 13 с от начала движения ($t = 0$)?

Решение. В качестве новой переменной введем величину, стоящую в скобках. Назовем её z , $z = 2t + 1$. При этом надо также от дифференциала dt перейти к дифференциалу dz . Получим $dz = 2dt$, $dt = dz/2$. Вычислим сначала неопределенный интеграл:

$$s = \int (2t + 1)^{\frac{2}{3}} dt = \int z^{\frac{2}{3}} \frac{dz}{2} = \frac{1}{2} \int z^{\frac{2}{3}} dz = \frac{z^{\frac{5}{3}}}{2 \cdot \frac{5}{3}} + C = \frac{(2t + 1)^{\frac{5}{3}}}{2 \cdot \frac{5}{3}} + C.$$

$$\text{Таким образом, } s = \int_0^{13} (2t + 1)^{\frac{2}{3}} dt = \frac{(2 \cdot 13 + 1)^{\frac{5}{3}} - (2 \cdot 0 + 1)^{\frac{5}{3}}}{2 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{729 - 3}{10} = 72,6 \text{ м/с.}$$

№ 2. Вычислить количество электричества, протекающее через цепь за промежуток времени $[0,01; 1]$, если ток изменяется по формуле $I(t) = 0,5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. За элементарный промежуток времени протекает количество электричества $dq = I(t)dt$. В качестве новой переменной введем величину, стоящую в скобках. $u = 100\pi t + \frac{\pi}{6}$. Тогда $dt = \frac{1}{100\pi} du$. Значит, общее количество электричества равно

$$q = \int 0,5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) dt = \int 0,5 \frac{1}{100\pi} \cos u du = 0,5 \frac{1}{100\pi} \sin u + C = 0,5 \frac{1}{100\pi} \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) + C$$

$$q = \int_{0,01}^1 0,5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) dt = 0,5 \frac{1}{100\pi} \sin\left(100\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{6}\right) - 0,5 \frac{1}{100\pi} \sin\left(100\pi \cdot 0,01 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{200\pi}$$

№ 3. Точка движется по прямой. В начальный момент времени $t = 1$ с её скорость равна 1 м/с, а затем уменьшается по закону $v = \frac{1}{(4t + 3)^2}$. Найдите длину пути, пройденного точкой за 4 с от начального момента времени.

3. Интегрирование путем подстановки (внесением под знак дифференциала)

№ 1. Найти величину давления на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус равен R , а верхний диаметр лежит на свободной поверхности жидкости; удельный вес жидкости равен γ .

Решение. Проведем горизонтальную полосу на глубине x . Сила давления жидкости на эту полосу равна $dP = 2\gamma x \sqrt{R^2 - x^2} dx$. Таким образом, $P = \gamma \int_0^R 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx$.

Заметим, что $2x dx = dx^2$, тогда

$$P = \gamma \int_0^R 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\gamma \int_0^R (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} d(R^2 - x^2) = -\gamma \frac{2}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R = \frac{2}{3} \gamma R^3.$$

№ 2. Конец трубы, погруженной горизонтально в воду, может быть закрыт заслонкой. Определить давление, испытываемое этой заслонкой, если её диаметр равен 60 см, а центр находится на глубине 15 м под водой.

Рассмотрим несколько **нетривиальных примеров применения интеграла в физике**. Решение данных задач поможет учащимся осознать большую прикладную значимость интеграла, а также позволит сформировать зрительные образы понятия интеграла.

№ 1. На прямой расположены материальная точка массы m и однородный стержень массы M и длины l . Точка удалена от концов стержня на расстояния c и $c + l$. Определить силу гравитационного притяжения между стержнем и точкой.

Решение. Разобьем отрезок $[c; c + l]$ на большое число отрезков. Если отрезки эти малы, то массу каждого из них можно считать точечной и силу гравитационного притяжения между таким отрезком и массой m вычислять по закону всемирного тяготения. Если длина отрезка равна Δx , а расстояние его от начала координат равно x , то сила гравитационного притяжения равна $\frac{\gamma m M}{l x^2} \Delta x$.

Суммируя полученные для каждого отрезка значения силы гравитационного притяжения, мы получим представление искомой силы в виде суммы тем более точное, чем мельче отрезки, на которые мы разбивали отрезок $[c; c + l]$. В пределе получим $\int_c^{c+l} \frac{\gamma m M}{l x^2} dx$.

№ 2. Стержень AB вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси OO' с угловой скоростью $\omega = 10\pi$ рад/с. Поперечное сечение стержня $S = 4 \text{ см}^2$, длина его $l = 20$ см, плотность материала, из которого он изготовлен, $\gamma = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Найти кинетическую энергию стержня.

Решение. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна $\frac{1}{2} J \omega^2$, где ω – угловая скорость, а J – момент инерции относительно оси вращения. Момент инерции стержня относительно оси равен $S \gamma l^2 \Delta l$, отсюда кинетическую

энергию стержня можно найти по формуле: $K = \int_0^{0,2} \frac{S \gamma l^2 \omega^2}{2} dl = \frac{S \gamma l^3 \omega^2}{6} \Big|_0^{0,2} = 4,2 \text{ (Дж)}$.

№ 3. Найти давление воды на плотину, если вода доходит до её верхнего края и если известно, что плотина имеет вид трапеции с высотой h , верхним основанием a и нижним основанием b .

Решение. Рассмотрим элементарный слой, находящийся на глубине x и имеющий высоту dx . Легко доказать, что длина этого слоя равна $a - \frac{a-b}{h} x$. Поэтому его

площадь dS равна $\left(a - \frac{a-b}{h}x\right)dx$, а давление dP на него равно $x\left(a - \frac{a-b}{h}x\right)dx$. Всё давление на плотину выражается интегралом

$$P = \int_0^h \left(a - \frac{a-b}{h}x\right)x dx = a \int_0^h x dx - \frac{a-b}{h} \int_0^h x^2 dx = a \frac{x^2}{2} \Big|_0^h - \frac{a-b}{h} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{h^2}{6}(a+2b).$$

№ 4. Найдите работу переменного тока, изменяющегося по формуле $I(t) = I_0 \sin \omega t$ за промежуток времени $\left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right]$, если сопротивление цепи равно R .

Решение. Как известно из физики, в случае постоянного тока мощность выражается формулой $W = I^2 R$. Обозначим, $\frac{2\pi}{\omega} = T$. Поэтому, учитывая, что $A = \int_a^b W(t) dt$, име-

$$\text{ем: } A = \int_0^T R I_0^2 \sin^2 \omega t dt = R I_0^2 \int_0^T \sin^2 \omega t dt = R I_0^2 \int_0^T \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2} dt = \frac{R I_0^2}{2} \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_0^T = \frac{I_0^2 R \pi}{\omega}.$$

№ 5. Два точечных электрических заряда $+10^{-4}$ и -10^{-4} Кл находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Найдите работу, необходимую для того, чтобы развести их на расстояние 10 км.

Решение. Сила взаимодействия F между зарядами равна $F = \frac{a}{r^2}$ ($a = kq_1q_2$, где $\text{Нм}^2/\text{Кл}^2$). Тогда работа этой силы, когда заряд q_1 неподвижен, а заряд q_2 передвигается по отрезку $[0,1; 10000]$ м, равна

$$A = \int_{0,1}^{10000} \frac{9 \cdot 10^9 \cdot |10^{-4}| \cdot |-10^{-4}|}{r^2} dr = 9 \cdot 10^9 \cdot |10^{-4}| \cdot |-10^{-4}| \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{0,1}^{10000} = 899991 \cdot 10^3.$$

№ 6. Какую работу требуется выполнить, чтобы с помощью ракеты тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R , на высоту h ?

Решение. На тело массы m по закону всемирного тяготения действует сила $F = k \frac{mM}{r^2}$, где M – масса Земли, а r – расстояние тела от центра Земли. Поэтому

$$A = \int_R^{R+h} k \frac{mM}{r^2} dr = kmM(-r^{-1}) \Big|_R^{R+h} = \frac{kmMh}{(R+h)R}.$$
 На поверхности же Земли, то есть при

$r = R$, имеем $F = mg$, то есть $mq = k \frac{mM}{R^2}$ и $k = \frac{gR^2}{M}$. Отсюда $A = \frac{mqhR}{R+h}$.

№ 7. Бак, имеющий форму полусферы радиуса R , целиком заполнен водой. Какую работу надо затратить, чтобы полностью выкачать воду из бака (рис. 2)?

Решение. Разобьем отрезок $[0; R]$ на n отрезков равной длины точками $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = R$ и соответственно разрежем мысленно содержимое бака на n слоев. Приняв каждый такой слой примерно за круговой цилиндр, найдем объем k -го слоя: $V_k = \pi x_{k-1}^2 \Delta x = \pi(R^2 - x_{k-1}^2) \Delta x$.

Таков же численно будет и его вес. Для поднятия этого слоя до верха бака требуется затратить работу A_k , равную приблизительно $A_k = x_{k-1} \pi(R^2 - x_{k-1}^2) \Delta x$. Заме-

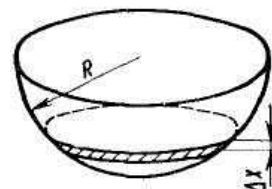


Рис. 2

тим, что по мере измельчения отрезка $[0; R]$ точность полученной

$A_n = \sum_{k=1}^n x_{k-1} \pi \cdot (R^2 - x_{k-1}^2) \Delta x$ формулы будет увеличиваться, перейдем к пределу, в результате получим точную формулу:

$$A = \pi \int_0^R x(R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Таким образом, решение представленных задач формирует такие специальные качества, как умение строить математические модели реальных процессов и явлений, исследовать и изучать их, а следовательно, способствует развитию мышления, памяти, внимания и речи учащихся.

Кроме того, использование физических задач для изучения интеграла в школьном курсе алгебры и начал анализа позволяют сформировать наглядные образы изучаемого понятия, повысить осознанность усвоения темы. В свою очередь, в физике интеграл используется как средство решения задач. Отметим, что без понимания сути данного понятия, его свойств осознанное решение задач физики невозможно. Учителю необходимо регулярно осуществлять и подчеркивать тесную связь математики и физики как в ходе изучения темы «Интеграл», так и при решении физических задач.

Ссылки на источники

1. Виленкин Н. Я., Куницкая Е. С., Мордкович А. Г. Математический анализ. Интегральное исчисление. – М.: Просвещение, 1979.
2. Задачи как средство обучения алгебре и началам анализа в X классе / сост. Е. С. Канин. – Киров: КГПИ имени В. И. Ленина, 1985.
3. Задачник по курсу математического анализа. Ч. I / под ред. Н. Я. Виленина. – М.: Просвещение, 1971.
4. Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и её приложения к физике. – М.: Наука, 1970.
5. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала анализа. – М.: Просвещение, 1998.
6. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. Ч. I. – М.: Мнемозина, 2003.

Shilova Zoya,

Ph.D., assistant professor of mathematical analysis and methyl procedure was teaching mathematics of Vyatka State University humanities, Kirov

Nasibullina Faritovna Elvira,

graduate of the Faculty of Informatics, Mathematics and Physics FGBOU VPO "Vyatka State University of Humanities", Kirov

Some methodological features of the study of the topic "Integral" in school mathematics

Abstract. The article gives a different understanding of the definite integral solutions from the standpoint of applications of physics. We prove certain properties gral means of solving such problems.

Keywords: integral, primitive, physical problems for the study of the integral.