

Носов Александр Леонидович,

доктор экономических наук, заведующий кафедрой экономики и управления трудовыми ресурсами ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров

Logistic_vgu@mail.ru



Логистика запасов: оптимизация затрат

Аннотация. Рассмотрена методика управления многономенклатурными запасами в условиях ограничения оборотного капитала, иммобилизованного в запасы. Приведен вывод формул для определения величины заказа с использованием метода множителей Лагранжа. На примере рассмотрена возможность минимизации затрат, связанных с запасами, и определены оптимальные по критерию затрат размеры заказов.

Ключевые слова: управление запасами, многономенклатурная задача, оптимизация затрат, ограничение оборотных средств.

Раздел: (04) экономика.

Любое деловое предприятие для повышения своей эффективности должно особо обращать внимание на оборотные средства, львиную долю которых составляют запасы. Теория управления запасами является составной частью логистики [1], в которой даны часто общие сведения об оптимальном размере заказа и о системах управления запасами. В данной статье показаны практические возможности этой теории.

Управление запасами с использованием оптимального размера заказа, определяемого по классической формуле Вильсона, предполагает минимизацию суммарных транспортно-заготовительных и складских затрат – стоимости обеспечения запасов.

Предположим, что номенклатура запасов содержит n позиций ($i = 1, \dots, n$).

Годовой спрос для каждой позиции – S_i .

Стоимость заказа позиции – A_i .

Закупочная стоимость единицы товара – C_i .

Стоимость хранения единицы запаса в год I_i определяется как доля k от стоимости товара C_i , т. е. $I_i = k \cdot C_i$.

Оптимальный размер заказа – $Q_{oi} = \sqrt{(2 \cdot A_i \cdot S_i / I_i)} = \sqrt{[2 \cdot A_i \cdot S_i / (k \cdot C_i)]}$.

Средняя годовая стоимость запасов – $B = \sum Q_{oi} \cdot C_i / 2$.

Стоимость обеспечения запасов – $J = \sum A_i \cdot S_i / Q_{oi} + B \cdot k$.

Оптимальный размер заказа Q_{oi} соответствует минимально возможному значению J .

В практической деятельности возможны другие варианты оптимального управления запасами:

- а) ограничение оборотных средств в запасах некоторой величиной B^* ;
- б) минимизация затрат, связанных с запасами.

а) Ограничение оборотных средств в запасах

В условиях ограничения оборотных средств может быть лимитирована средняя годовая стоимость запасов до уровня B^* .

Поскольку средняя годовая стоимость запасов пропорциональна размеру заказа, то выполняется равенство отношений $B / B^* = Q_{oi} / Q_{oi}^*$, где Q_{oi}^* – оптимальный размер заказа с учетом лимитирования средней годовой стоимости запасов B^* .

Отсюда можно определить значение Q_{oi}^* :

$$Q_{oi}^* = Q_{oi} \cdot B^* / B. \quad (1)$$

В книге [2] для решения поставленной задачи предлагается использовать метод множителей Лагранжа, однако не показано, как определить значение коэффициента Лагранжа λ . Покажем вывод формулы для определения значения λ .

Стоимость обеспечения запасов J определяется:

$$J = \sum A_i \cdot S_i / Q_i + k \cdot \sum Q_i \cdot C_i / 2,$$

где Q_i – размер заказа i -й номенклатуры.

Введем коэффициент Лагранжа, отвечающий следующим условиям:

$$\lambda = 0, \text{ если } \sum Q_i \cdot C_i / 2 \neq B^*;$$

$$\lambda \neq 0, \text{ если } \sum Q_i \cdot C_i / 2 = B^*;$$

т. е. коэффициент Лагранжа принимает нулевое значение до тех пор, пока средняя годовая стоимость запасов отличается от заданной B^* .

В этом случае стоимость обеспечения запаса J можно записать, прибавив к ней условие ограничения стоимости запасов $\sum Q_i \cdot C_i / 2 - B^*$, помноженное на λ , учитывая, что это произведение всегда имеет нулевое значение:

$$J = \sum A_i \cdot S_i / Q_i + k \cdot \sum Q_i \cdot C_i / 2 + \lambda \cdot (\sum Q_i \cdot C_i / 2 - B^*).$$

Минимум J соответствует таким значениям $Q_i = Q_{oi}^*$, при подстановке которых в выражения частных производных J по Q_i получается ноль:

$$\partial J / \partial Q_i = -A_i \cdot S_i / Q_i^2 + k \cdot C_i / 2 + \lambda \cdot C_i / 2 = 0.$$

Отсюда находим:

$$Q_{oi}^* = \sqrt{[2 \cdot A_i \cdot S_i / ((k + \lambda) \cdot C_i)]}. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получим:

$$B^* / B = \sqrt{[2 \cdot A_i \cdot S_i / ((k + \lambda) \cdot C_i)]} / \sqrt{[2 \cdot A_i \cdot S_i / (k \cdot C_i)]}.$$

Путем простых преобразований находим значение коэффициента Лагранжа, удовлетворяющее условию ограничения стоимости запасов величиной B^* :

$$\lambda = k \cdot [(B / B^*)^2 - 1]. \quad (3)$$

Рассмотрим *пример*.

Фирма «Техника для Вас» реализует в течение года следующие товары.

Годовой товарооборот фирмы «Техника для Вас»

№ п/п (i)	Наименование	Спрос (S_i), шт.	Закупочная стоимость (C_i), руб.	Стоимость заказа (A_i), руб.
1	Стиральная машина	1200	10 000	6000
2	Холодильник	800	14 000	8000
3	Телевизор	3600	8000	4000
4	Пылесос	2400	3200	5000
5	Магнитола	6000	2200	2000
6	Музыкальный центр	4000	6400	2000

Стоимость хранения единицы запаса в год составляет 20% от стоимости товара:
 $k = 0,2$.

1. Определим оптимальные размеры заказов $Q_{oi} = \sqrt{[2 \cdot A_i \cdot S_i / (k \cdot C_i)]}$:

$$Q_{o1} = \sqrt{[2 \cdot 6000 \cdot 1200 / (0,2 \cdot 10000)]} = \sqrt{7200} = 85 \text{ шт.};$$

$$Q_{o2} = \sqrt{[2 \cdot 8000 \cdot 800 / (0,2 \cdot 14000)]} = \sqrt{4571} = 68 \text{ шт.};$$

$$Q_{o3} = \sqrt{[2 \cdot 4000 \cdot 3600 / (0,2 \cdot 8000)]} = \sqrt{18000} = 134 \text{ шт.};$$

$$Q_{o4} = \sqrt{[2 \cdot 5000 \cdot 2400 / (0,2 \cdot 3200)]} = \sqrt{38710} = 194 \text{ шт.};$$

$$Q_{o5} = \sqrt{[2 \cdot 2000 \cdot 6000 / (0,2 \cdot 2200)]} = \sqrt{54545} = 234 \text{ шт.};$$

$$Q_{o6} = \sqrt{[2 \cdot 2000 \cdot 4000 / (0,2 \cdot 6400)]} = \sqrt{12500} = 112 \text{ шт.}$$

На практике размеры заказов корректируют таким образом, чтобы обеспечить целочисленное количество поставок по каждому наименованию. Мы это проведем на заключительной стадии расчетов.

2. Среднегодовая стоимость запасов $B = \sum Q_{oi} \cdot C_i / 2$:

$$B = 85 \cdot 10000 / 2 + 68 \cdot 14000 / 2 + 134 \cdot 8000 / 2 + 194 \cdot 3200 / 2 + 234 \cdot 2200 / 2 + 112 \cdot 6400 / 2 = 425000 + 476000 + 536000 + 310400 + 257400 + 358400 = 2363200 \text{ руб.}$$

3. Стоимость обеспечения запасов $J = \sum A_i \cdot S_i / Q_{oi} + B \cdot k$:

$$J = 6000 \cdot 1200 / 85 + 8000 \cdot 800 / 68 + 4000 \cdot 3600 / 134 + 5000 \cdot 2400 / 194 + 2000 \cdot 6000 / 234 + 2000 \cdot 4000 / 112 + 2363200 \cdot 0,2 = 470853 + 472640 = 943493 \text{ руб.}$$

Стоимость обеспечения запасов включает транспортно-заготовительные расходы – 470 853 руб. – и расходы на хранение запасов – 472 640 руб. Следует отметить, что в случае оптимальных размеров заказов эти суммы становятся равными. В данном примере они различаются на 1787 руб. из-за целочисленного округления размеров заказов.

4. Общие затраты на запасы $B + J = 2363\,200 + 943\,493 = 3306\,693$ руб.

5. Введем ограничение средней годовой стоимости запасов, например 1500 000 руб.

6. Определим коэффициент Лагранжа λ по формуле (3) для $B^* = 1500\,000$ руб.:

$$\lambda = 0,2 \cdot [(2363200 / 1500000)^2 - 1] = 0,30.$$

7. Определим оптимальные размеры заказов в условиях ограничений Q_{oi}^* по формуле (2), подставив значения $k = 0,2$ и $\lambda = 0,3$, получим $Q_{oi}^* = \sqrt{(4 \cdot A_i \cdot S_i / C_i)}$:

$$Q_{o1}^* = \sqrt{(4 \cdot 6000 \cdot 1200 / 10000)} = \sqrt{2880} = 54 \text{ шт.};$$

$$Q_{o2}^* = \sqrt{(4 \cdot 8000 \cdot 800 / 14000)} = \sqrt{1829} = 43 \text{ шт.};$$

$$Q_{o3}^* = \sqrt{(4 \cdot 4000 \cdot 3600 / 8000)} = \sqrt{7200} = 85 \text{ шт.};$$

$$Q_{o4}^* = \sqrt{(4 \cdot 5000 \cdot 2400 / 3200)} = \sqrt{15000} = 123 \text{ шт.};$$

$$Q_{o5}^* = \sqrt{(4 \cdot 2000 \cdot 6000 / 2200)} = \sqrt{21818} = 148 \text{ шт.};$$

$$Q_{o6}^* = \sqrt{(4 \cdot 2000 \cdot 4000 / 6400)} = \sqrt{5000} = 71 \text{ шт.}$$

8. Результирующая среднегодовая стоимость запасов:

$$B_{рез}^* = 54 \cdot 10000 / 2 + 43 \cdot 14000 / 2 + 85 \cdot 8000 / 2 + 123 \cdot 3200 / 2 + 148 \cdot 2200 / 2 + 71 \cdot 6400 / 2 = 270000 + 301000 + 340000 + 196800 + 162800 + 227200 = 1497800 \text{ руб.}$$

Полученная стоимость запасов удовлетворяет введенному ограничению $\leq 1500\,000$ руб., что подтверждает правильность формул (2) и (3).

9. Определим результирующую стоимость обеспечения запасов:

$$J_{рез}^* = 6000 \cdot 1200 / 54 + 8000 \cdot 800 / 43 + 4000 \cdot 3600 / 85 + 5000 \cdot 2400 / 123 + 2000 \cdot 6000 / 148 + 2000 \cdot 4000 / 71 + 1497800 \cdot 0,2 = 133333 + 148837 + 169412 + 98361 + 81081 + 112676 + 299240 = 742900 + 299560 = 1042460 \text{ руб.}$$

Видно, что транспортно-заготовительные расходы значительно возросли (с 470 853 до 742 900), что объясняется уменьшением размеров заказов. Расходы на хранение уменьшились пропорционально уменьшению стоимости запасов (с 472 640 до 299 560). При этом стоимость обеспечения запасов возросла на $1042\,460 - 943\,493 = 98\,967$ руб.

10. Проведем окончательную коррекцию размеров заказов до целочисленного числа поставок N_i каждого наименования продукции:

$$N_1 = 1200 / 54 = 22,2 \text{ поставок.}$$

Примем $N_1 = 24$, что соответствует $Q_{o1}^* = 50$;

$$N_2 = 800 / 43 = 18,6 \text{ поставок.}$$

Примем $N_2 = 20$, что соответствует $Q_{o2}^* = 40$;

$$N_3 = 3600 / 85 = 42,4 \text{ поставок.}$$

Примем $N_3 = 40$, что соответствует $Q_{o3}^* = 90$;

$$N_4 = 2400 / 123 = 19,5 \text{ поставок.}$$

Примем $N_4 = 20$, что соответствует $Q_{o4}^* = 120$;

$$N_5 = 6000 / 148 = 40,5 \text{ поставок.}$$

Примем $N_5 = 40$, что соответствует $Q_{o5}^* = 150$;

$$N_6 = 4000 / 71 = 56,3 \text{ поставок.}$$

Примем $N_6 = 50$, что соответствует $Q_{об}^* = 80$.

11. Проведем окончательный расчет стоимости запасов:

$$B_{ок}^* = 50 \cdot 10000 / 2 + 40 \cdot 14000 / 2 + 90 \cdot 8000 / 2 + 120 \cdot 3200 / 2 + 150 \cdot 2200 / 2 + 80 \cdot 6400 / 2 = 250000 + 280000 + 360000 + 192000 + 165000 + 256000 = 1503000 \text{ руб.}$$

Полученная стоимость на 3000 руб. превышает установленное ограничение, что не критично, поскольку отклонение составляет 0,2%, при этом обеспечивается целочисленность и кратность поставок, обеспечивающие сокращение заготовительных расходов.

12. Определим окончательную стоимость обеспечения запасов:

$$J_{ок}^* = 6000 \cdot 24 + 8000 \cdot 20 + 4000 \cdot 40 + 5000 \cdot 20 + 2000 \cdot 40 + 2000 \cdot 50 + 1503000 \cdot 0,2 = 144000 + 160000 + 160000 + 100000 + 80000 + 100000 + 299240 = 744000 + 300600 = 1044600 \text{ руб.,}$$

что незначительно отличается от суммы по п. 9.

13. Окончательные общие затраты на запасы $B_{ок}^* + J_{ок}^* = 1503000 + 1044600 = 2547600$ руб., что на $3311512 - 2547600 = 763912$ руб. меньше затрат по варианту с оптимальными размерами поставок.

Приведенный пример показывает методику управления заказами при ограничении оборотных средств предприятия и подтверждает правильность теоретических формул (2) и (3). При этом наглядно показана возможность уменьшения общих затрат на запасы.

б) Минимизация затрат, связанных с запасами

Общие затраты на запасы L определяются как сумма стоимости обеспечения запасов J и средней стоимости самих запасов B :

$$L = J + B = \sum A_i \cdot S_i / Q_i + k \cdot \sum Q_i \cdot C_i / 2 + \sum Q_i \cdot C_i / 2 = (1 + k) \cdot \sum Q_i \cdot C_i / 2 + \sum A_i \cdot S_i / Q_i.$$

Условием минимизации L является равенство нулю частных производных

$$\partial L / \partial Q_i = (1 + k) \cdot C_i / 2 - A_i \cdot S_i / Q_i^2 = 0.$$

Отсюда размеры заказов Q_{mi} определяются по формуле (4):

$$Q_{mi} = \sqrt{[2 \cdot A_i \cdot S_i / ((1 + k) \cdot C_i)]}. \quad (4)$$

Для рассмотренного примера определим размеры заказов, соответствующие минимуму затрат, связанных с запасами:

$$Q_{M1} = \sqrt{[2 \cdot 6000 \cdot 1200 / (1,2 \cdot 10000)]} = \sqrt{1200} = 35 \text{ шт.};$$

$$Q_{M2} = \sqrt{[2 \cdot 8000 \cdot 800 / (1,2 \cdot 14000)]} = \sqrt{762} = 28 \text{ шт.};$$

$$Q_{M3} = \sqrt{[2 \cdot 4000 \cdot 3600 / (1,2 \cdot 8000)]} = \sqrt{3000} = 55 \text{ шт.};$$

$$Q_{M4} = \sqrt{[2 \cdot 5000 \cdot 2400 / (1,2 \cdot 3200)]} = \sqrt{6250} = 79 \text{ шт.};$$

$$Q_{M5} = \sqrt{[2 \cdot 2000 \cdot 6000 / (1,2 \cdot 2200)]} = \sqrt{9091} = 95 \text{ шт.};$$

$$Q_{M6} = \sqrt{[2 \cdot 2000 \cdot 4000 / (1,2 \cdot 6400)]} = \sqrt{2083} = 46 \text{ шт.}$$

Среднегодовая стоимость запасов при этом:

$$B_M = 35 \cdot 10000 / 2 + 28 \cdot 14000 / 2 + 55 \cdot 8000 / 2 + 79 \cdot 3200 / 2 + 95 \cdot 2200 / 2 + 46 \cdot 6400 / 2 = 175000 + 196000 + 220000 + 126400 + 104500 + 147200 = 969100 \text{ руб.}$$

Определим стоимость обеспечения запасов:

$$J_M = 6000 \cdot 1200 / 35 + 8000 \cdot 800 / 28 + 4000 \cdot 3600 / 55 + 5000 \cdot 2400 / 79 + 2000 \cdot 6000 / 95 + 2000 \cdot 4000 / 46 + 969100 \cdot 0,2 = 205714 + 228571 + 261818 + 151898 + 126316 + 173913 + 193820 = 1148230 + 193820 = 1342050 \text{ руб.}$$

Видно, что относительно оптимального размера заказов транспортно-заготовительные расходы значительно возросли (с 470 853 до 1148 230), что объясняется уменьшением размеров заказов. Расходы на хранение уменьшились пропорционально уменьшению стоимости запасов (с 472 640 до 193 820). При этом стоимость обеспечения запасов возросла на $1342 050 - 943 493 = 398 557$ руб.

Общие затраты, связанные с запасами, при этом становятся минимальными: $L_m = J_m + B_m = 1342\ 050 + 969\ 100 = 2311\ 150$ руб., что на $3306\ 693 - 2311\ 150 = 995\ 543$ руб. меньше затрат по варианту с оптимальными размерами поставок.

Следует отметить, что в точке минимума общих затрат, связанных с запасами, транспортно-заготовительные затраты (1148 230 руб.) равны сумме затрат на хранение запасов и среднегодовой стоимости запасов ($193\ 820 + 969\ 100 = 1162\ 920$ руб.).

Таким образом подтверждается возможность минимизации затрат, связанных с запасами, при использовании формулы (4) для определения размера заказа.

Приведенные выводы и расчеты справедливы не только в условиях отдельного предприятия, но и в области региональной логистики [3]. В последнем случае необходимо взаимодействие субъектов логистической деятельности [4], дающее синергетический эффект как по экономии ресурсов, так по результату. Чрезвычайно важно при этом планирование экономической деятельности основывать на концепциях оптимального управления экономическими системами [5].

Ссылки на источники

1. Носов А. Л. Логистика: учеб. пособие. – М.: Магистр, 2014.
2. Сковронек Ч., Сариус-Вольский З. Логистика на предприятии: учеб.-метод. пособие: пер. с польск. – М.: Финансы и статистика, 2004.
3. Носов А. Л. Региональная логистика. – М.: Изд-во «Альфа-Пресс», 2007.
4. Носов А. Л. Синергическое взаимодействие субъектов логистической деятельности // Логистика сегодня. – 2013. – № 1(41). – С. 28–39.
5. Носов А. Л. Управление экономическими системами в условиях рыночного взаимодействия // РИСК: Ресурсы, информация, снабжение, конкуренция. – 2014. – № 1. – С. 272–277.

Alexander Nosov,

Doctor of Economic Sciences, Candidate of Engineering Sciences, Professor, head of chair of Economics and Human Resources Management, Vyatka State University of Humanities, Kirov

Logistic_vgu@mail.ru

Logistics inventory cost optimization

Abstract. The method of management of diversified stocks in terms of working capital constraints immobilized in stocks. The derivation of the formula for determining the size of the order using the method of Lagrange multipliers. For example, consider the possibility of minimizing the costs associated with reserves and the optimal size of eligible costs orders.

Key words: inventory management, diversified task, cost optimization, limitation of working capital.

References

1. Nosov, A. L. (2014) *Logistika: ucheb. posobie*, Magistr, Moscow (in Russian).
2. Skovronek, Ch. & Sarius-Vol'skij, Z. (2004) *Logistika na predpriyatii: ucheb.-metod. posobie: per. s pol'sk*, Finansy i statistika, Moscow (in Russian).
3. Nosov, A. L. (2007) *Regional'naja logistika*, Izd-vo "Al'fa-Press", Moscow (in Russian).
4. Nosov, A. L. (2013) "Sinergicheskoe vzaimodejstvie sub#ektov logisticheskoy dejatel'nosti", *Logistika segodnja*, № 1(41), pp. 28–39 (in Russian).
5. Nosov, A. L. (2014) "Upravlenie jekonomicheskimi sistemami v uslovijah rynochnogo vzaimodejstvija", *RISK: Resursy, informacija, snabzhenie, konkurencija*, № 1, pp. 272–277 (in Russian).

Рекомендовано к публикации:

Некрасовой Г. Н., доктором педагогических наук, профессором, членом редакционной коллегии журнала «Концепт»

Поступила в редакцию <i>Received</i>	08.06.15	Получена положительная рецензия <i>Received a positive review</i>	10.06.15
Принята к публикации <i>Accepted for publication</i>	10.06.15	Опубликована <i>Published</i>	24.07.15



www.e-koncept.ru