КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 11-3-02 УДК 37.026.9:51

Утёмов В. В. Советы – принципы решения математических задач на основе ТРИЗ // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – 3 квартал 2011, ART 11-3-02. – Киров, 2011 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2011/11302.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2225-1618.

***Утёмов Вячеслав Викторович,***
*старший преподаватель кафедры естественнонаучных и технических дисциплин Кировского филиала ФГБОУ ВПО «Московский государственный индустриальный университет», г. Киров*
lider_slava@mail.ru

## Советы – принципы решения математических задач на основе ТРИЗ

***Аннотация.*** *В статье автор знакомит читателей с возможностями использования инструментов ТРИЗ при обучении школьников математике, в частности, в ней акцентировано внимание на советы – принципы решения математических задач. В статье для описания каждого принципа приводится пример его использования при решении задач по математике школьного курса.*
***Ключевые слова:*** *инновационное мышление, ТРИЗ-педагогика, инструменты ТРИЗ, творческий потенциал, развитие креативности.*

Среди целей, предъявляемых к современному школьному образованию, выделяется формирование личности, способной решать поставленные перед ней задачи в условиях рыночной экономики, в частности, быстро находить наиболее оптимальное и эффективное решение преодолеваемой проблемы. Такая цель направлена на реализацию внутреннего потенциала школьника, развитие его творческого начала, продуктивности мышления, которые как раз и должны способствовать развитию умения справляется с перечисленными выше задачами.

Для достижения поставленной цели нами предлагаться использовать методы ТРИЗ-педагогики [1]. Эффективность отдельных приемов ТРИЗ убедительно была доказана в ходе экспериментальной работы по применению ТРИЗ в педагогике (по физике – А. Гин, литературе – Ю. Мурашковский, О. Алешина, по биологии – И. Андржеевская, по информатике, естествознанию и др.) [2].

На основе ТРИЗ можно сформулировать советы – принципы решения математических задач, которые могут помочь избежать многих ошибок и подсказать, как найти решение [3, 4].

**Принцип отсроченного действия.** После прочтения задачи первое желание, которое возникает – это не решать ее. Пойдите на поводу у этого желания, повремените с преобразованиями и другими действиями. Возможно, именно в этот момент вы подметите полезную закономерность. Если данный этап не принес плодов, то попытайтесь найти область определения или, хотя бы, некоторое множество, ее содержащее.

**Пример 1.** Решите уравнение: $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}$.

Не будем спешить возводить обе части уравнения в квадрат, а найдем область определения:

$$\begin{cases} x^2-4x+3\ge 0 \\ -x^2+3x-2\ge 0 \\ x^2-x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3)\ge 0 \\ -(x-1)(x-2)\ge 0 \\ x(x-1)\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 3 \end{array}\right. \\ 1\le x\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=1$$

Подставляя $x = 1$, убеждаемся, что это единственный корень.

**Принцип максимума локальной информации.** На каждом шагу процесса поиска решения необходимо стремиться к получению максимальной информации из

структуры полученной ситуации. Данный принцип мы использовали при решении предыдущей задачи.

**Принцип правильности решения.** Некоторые описки и ошибки совершаются человеком на подсознательном уровне (порой достаточно при решении задачи один раз заменить знак «плюс» на «минус» и дальше можно уже никуда не спешить, ибо все последующие правильные действия приведут к неправильному результату) и поэтому обнаружить их самому очень трудно. Отсюда вытекает необходимость как локального контроля (каждый шаг в решении проверять дважды), так и глобальной проверки (проверка результата решения, хотя бы частично, на правильность и реальность).

**Пример 2.** Решите уравнение: $\cos x + \sin x = 1$.

Возведем обе части уравнения в квадрат. Имеем:

$$\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x = 1 \Rightarrow 1 + \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

На этом решение не окончено, было использовано возведение в квадрат, которое может привести к посторонним корням. Поэтому использовать принцип правильности решения обязательно.

**Принцип отсечения ложных гипотез.** В процессе решения задачи часто приходиться делать различного рода предположения (выдвигать гипотезы). Главное, чего здесь следует опасаться – это не пойди на поводу у ложной гипотезы.

**Пример 3.** Основанием пирамиды является трапеция с основаниями *a*, *b* и высотой *h.* Грань пирамиды, проходящая через меньшее основание трапеции, перпендикулярна плоскости основания. Противоположная грань является равнобедренным треугольником с углом $\alpha$ при вершине пирамиды. Через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно ее основаниям и вершину пирамиды проведена плоскость. Найти площадь треугольника, получившегося в сечении.

Гипотезой зачастую принимается, что прямая, по которой плоскость пересекает основание пирамиды, является средней линией трапеции. После этого предположения уже можно не суетиться, задача будет решена неверно.

Отсечение ложных гипотез осуществляется через **метод вариации параметров.** Так**,** если в предыдущей задаче изменить длины боковых сторон и основание трапеции, то станет очевидно, что наша гипотеза ложна. Для отсечения ложных гипотез может пригодиться и **метод от противного.** Предполагаем, что гипотеза верна, и смотрим, к каким последствиям это приведет.

**Принцип наихудшего случая.** С задачей надо обращаться нежно, не навязывать ей своей воли. Так если в задаче речь идет о пирамиде, то совсем не обязательно, чтобы она была правильной; центр вписанного в пирамиду шара не обязан лежать на высоте пирамиды и т. д.

**Принцип непрерывности логических цепочек.** Нельзя использовать недоказанные утверждения в процессе решения, ибо недоказанное утверждение может оказаться неверным, а из неверного утверждения можно вывести и истину и ложь с помощью правил рассуждения. Поэтому в логической цепочке $A \Rightarrow B \Rightarrow C ... \Rightarrow E$ в идеале все составляющие звенья должны присутствовать в явном виде.

**Пример 4.** Решите неравенство: $2\sqrt{x^2 - 9} > 2x - 3$.

Найдем область решения:

$$x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 3 \Rightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty).$$

Рассмотрим исходное неравенство на интервалах:

- $x \leq -3 \Rightarrow 2x - 3 \leq -9 < 0$.

Утёмов В. В. Советы – принципы решения математических задач на основе ТРИЗ // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – 3 квартал 2011, ART 11-3-02. – Киров, 2011 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2011/11302.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2225-1618.

Значит, в правой части исходного неравенства на данном интервале стоит отрицательное выражение. Но $2\sqrt{x^2-9}\geq 0$ в виду не отрицательности квадратного корня. Следовательно, все $x$ из данного интервала являются решениями исходного неравенства.

- $x\geq 3 \Rightarrow 2x-3\geq 3>0$.

Итак, на данном интервале обе части неравенства неотрицательные и допустимо возведение в квадрат. Имеем: $\left(4\left(x^2-9\right)>(2x-3)^2\right)\Rightarrow(12x>45)\Rightarrow\left(x>\frac{15}{4}\right)$. И далее: $\begin{cases} x>\frac{15}{4} \\ x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow x>\frac{15}{4}$.

Объединяя решения из интервалов, получим ответ: $x\in(-\infty;-3]\cup\left[\frac{15}{4};+\infty\right)$.

**Принцип полноты пространств альтернатив.** Принцип утверждает необходимость исчерпывающего учета всех необходимых составных частей основания. Или все возможные случаи должны быть рассмотрены.

**Пример 5.** Доказать, что произведение трех последовательных целых чисел делиться на 6.

Пусть $A=(n-1)n(n+1)$ произведение трех последовательных целых чисел. Так как НОД (2; 3) = 1 то достаточно доказать, что $A$ делиться на 2 и на 3.

При делении целого числа на 2 возможно два остатка 0 или 1. В соответствии с этим имеем две альтернативы:

- $n=2k\Rightarrow A=(2k-1)2k(2k+1)$;
- $n=2k+1\Rightarrow A=(2k)(2k+1)(2k+2)$.

Очевидно, что в обоих случаях $A$ делиться на 2.

При делении целого числа на 3 возможны три остатка: 0, 1 и 2. Получаем три альтернативы:

- $n=3k\Rightarrow A=(3k-1)3k(3k+1)$;
- $n=3k+1\Rightarrow A=(3k)(3k+1)(3k+2)$;
- $n=3k+2\Rightarrow A=(3k+1)(3k+2)(3k+3)\Rightarrow A=(3k+1)(3k+2)3(k+1)$.

Очевидно, что в каждом из рассмотренных случаев $A$ делится на 3. Что и требовалось доказать.

**Принцип простоты.** Выбранное решение поставленной задачи должно быть достаточно простым. На своем пути к познанию истины человечество стремилось к простым оригинальным и ярким решениям и ценило их. С другой стороны, лишние выкладки решения, которые присутствуют в нерациональных решениях, могут послужить источником дополнительных ошибок.

**Пример 6.** Решите уравнение: $2^x+2^{-x}=2\cos 2x$.

*Первый способ.* Умножим обе части уравнения на $2^x$ (по свойству показательной функции $2^x\neq 0$) получим: $2^{2x}-2\cdot 2^x\cos 2x+1=0$. Решая это уравнение, считая его квадратным, получим: $2^x=\cos 2x\pm\sqrt{\cos^2 2x-1}$. Откуда $\cos 2x=\pm 1$, и равенство принимает вид: $2^x=\pm 1$. Но $2^x>0$. Значит $2^x=1=2^0$ и $x=0$ есть единственно решение уравнения.

Утёмов В. В. Советы – принципы решения математических задач на основе ТРИЗ // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – 3 квартал 2011, ART 11-3-02. – Киров, 2011 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2011/11302.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2225-1618.

*Второй способ.* Используя неравенство $x+\frac{1}{x}\geq 2$ при $x>0$, можно получить, что $2^x+2^{-x}\geq 2$, но с другой стороны $2\cos 2x\leq 2$. Тогда можно сразу сделать вывод о том, что единственный корень при $x=0$.

**Принцип системности решения.** Решая задачу, после того как решение нами осмыслено, мы своеобразно обращаемся к надсистеме (с точки зрения ТРИЗ) и ее базе данных, стараясь набросить на задачу некую информационную сеть. Затем мы приступаем к анализу составных частей и структуры задачи, привлекая для этого соответствующие подсистемы и информационное обеспечение (в ТРИЗ это называется переход в подсистему). Если эта деятельность не принесла результата, то опять обращаемся к надсистеме исходной задачи, пытаясь наиболее полно детерминировать поведение задачи, а затем снова возвращаемся к подсистеме. Этот **системный подход** может повторяться многократно, причем на разных уровнях. Отсюда однозначно вытекает заключение: необходимое условие решение задачи – это знание соответствующей теории, без которой информационная сеть будет с просветами.

**Пример 7.** Решите уравнение: $5^x+12^x=13^x$.

Начнем с «экспериментальной стадии», пытаясь попросту угадать корень (переход в подсистему). Очевидно, один корень $x=2$.

Если бы нам удалось показать, что других корней нет, то задача была бы решена. Перейдем в надсистему: есть две функции, причем строго возрастающие. Тогда накидываем информационную сеть (сумма двух строго возрастающих функций, функция, строго возрастающая на их общей области определения). Тем самым доказываем единственность корня.

В процесс решения задачи учащемуся приходиться преодолевать не только психологические барьеры, но вызванные ими отрицательные эмоции. Может быть, рассмотренные советы помогут преодолеть и то, и другое.

С необходимостью использования данных советов человек сталкивается во многих видах интеллектуальной деятельности, в частности, в процессе принятия решения. Поэтому навыки, приобретенные им при использовании данных задач на уроках математики, могут оказаться полезным и в очень отдаленных от нее областях, несмотря на имеющиеся различия принципиального характера.

Как показывает опыт, указанное использование методов ТРИЗ при обучении математике учит, как надо действовать для того, чтобы получить желаемый продукт, результат, какие нормы надо соблюдать, чтобы получить продукт гарантированного качества, и дает возможность интегрировать часть полученной учебной информации на уроках математики с гуманитарными и естественными науками в единую систему знаний.

## Ссылки на источники

1. Альтшуллер Г. С. Найти идею. Введение в теорию решения изобретательских задач. – Новосибирск: Наука, 1991. – 225 с.
2. Погребная Т. В., Козлов А. В. ТРИЗ-педагогика в преподавании математики. – Красноярск, 2008.
3. Великович Л. Л. Подготовка к экзаменам по математике: учеб. пособие для абитуриентов и учащихся 9–11 кл. Ч. I / Под ред. А. А. Гина, Л. Д. Корсун. – М.: Народное образование, 2006. – 304 с.
4. Великович Л. Л. Подготовка к экзаменам по математике: учеб. пособие для абитуриентов и учащихся 9–11 кл. Ч. II / Под ред. А. А. Гина, Л. Д. Корсун. – М.: Народное образование, 2006. – 308 с.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 11-3-02 УДК 37.026.9:51

Утёмов В. В. Советы – принципы решения математических задач на основе ТРИЗ // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – 3 квартал 2011, ART 11-3-02. – Киров, 2011 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2011/11302.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2225-1618.

***Utemov Vyacheslav***,
*teacher of natural sciences and technical disciplines Kirov-ray branch of the Moscow State Industrial University, Kirov*
lider_slava@mail.ru

**Councils – principles of the solution of mathematical tasks on the basis of TRIZ**

**Abstract.** In article authors acquaint readers with possibilities of use of TRIZ tools when training school students to mathematics, in particular, in it gives councils – principles of the solution of mathematical tasks. In article for the description of each principle to be given an example its uses at the solution of tasks on mathematics of a school course.

**Keywords:** innovative thinking, TRIZ pedagogics, TRIZ tools, creative potential, creativity development.

***Рецензент****: Горев Павел Михайлович, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа и методики обучения математике ВятГГУ, главный редактор журнала «Концепт»*