Санников Юрий Григорьевич,
преподаватель математики ГБОУ СОШ № 539 Кировского р-на, г. Санкт-Петербург
san58.spb@gmail.com

Креативный урок алгебры в 9-м классе по теме «Графики уравнений, содержащих символ модуля»

Аннотация*. В статье рассматривается тренинг креативного мышления в обучении математике. В статье приведена разработка урока по теме «Графики уравнений, содержащих символ модуля». Вводится понятие графика уравнения, и построение графиков уравнений, содержащих символ модуля. В процессе работы выявляется связь алгебры и геометрии. Рассматривается применение этой темы к решению уравнений с параметром, содержащих символ модуля.*
Ключевые слова*: график уравнения, модуль, параметр, творчество, гипотеза, эксперимент.*

Тема урока: Графики уравнений, содержащих символ модуля.
Предмет: алгебра.
Тип урока: комбинированный.

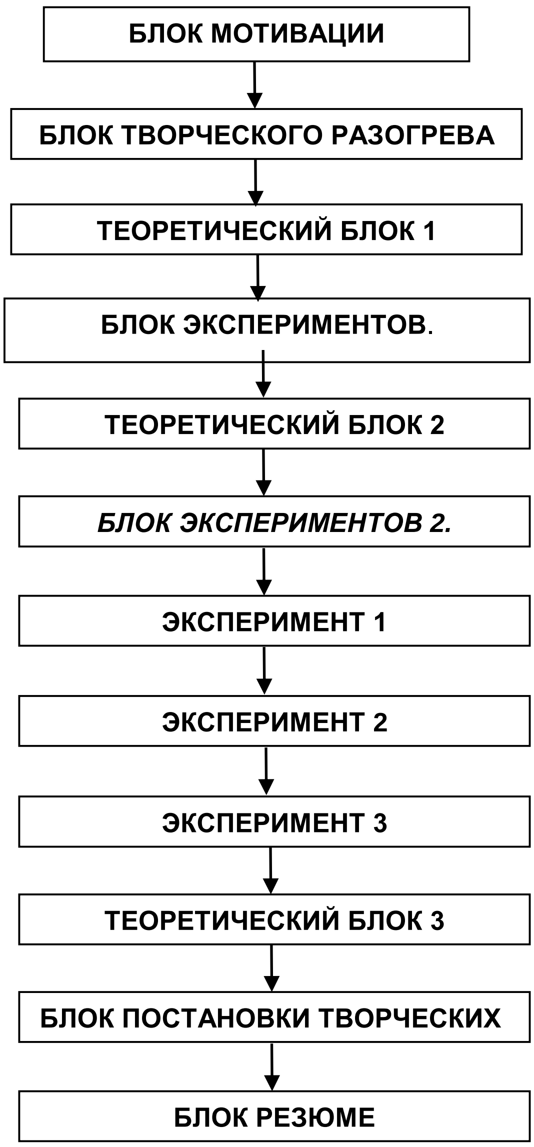

Рис. 1. Блок-схема урока

Продолжительность занятия: 90 минут.

Главная дидактическая цель урока: выявление области приложения темы «График уравнения» в алгебре и в её связи с геометрией, формирование знаний по данной теме при решении стандартных и нестандартных алгебраических задач. Развитие у учащихся навыков исследовательской работы.

Цели урока:

1. Формирование умений распознавать стандартные задачи в различных формулировках.
2. Формирование способности к интеграции знаний из различных тем курса математики.
3. Содействовать развитию логического мышления учащихся, умение выделять главное, обобщать.
4. Формирование исследовательской, креативной работы учащихся.
5. Воспитание графической культуры учащихся.
6. Совершенствование коммуникативной культуры учащихся.

Оборудование: доска, мультимедийное оборудование, раздаточный дидактический материал для учащихся.

План урока

1. **Блок мотивации.** Изучая темы «Графики функций» и «Векторы», мы обнаруживаем тесную связь геометрии и алгебры, и, естественно, возникает вопрос – нельзя ли геометрические фигуры такие как квадрат, прямоугольник, ромб, треугольник задавать алгебраическими уравнениями и иследовать свойства этих фигур алгебраическими методами. Выявлению этой связи между геометрией и алгеброй и будет посвящён урок. Мы введём новое понятие «График уравнения» и рассмотрим графики уравнений в алгебраических и графических задачах. **(3 мин.)**

2. **Блок творческого разогрева.** Повторение определения функции и графика функции. Обсуждение необходимости введения понятия **«График уравнения».**

Устная работа (20 мин.)

Актуализация знаний учащихся: повторение, анализ, обобщение.

Работа учащихся в следующих режимах: диалог, обсуждение, самостоятельная деятельность.

Материалы для проведения устной работы оформлены на доске.

Повторение определения функции и графика функции.

На доске представлены следующие чертежи (Рис. 2).

Каждый ученик получает раздаточный материал с этими чертежами.

Обсуждение:

1) На каких чертежах представлены графики функций? Почему?
2) Графики каких функций представлены на этих чертежах?
3) На каких чертежах графики не задают функции? Почему?

Обсуждается необходимость введения понятия графика уравнения.

Определение: Графиком уравнения $p(x;y)=0$ называют множество точек координатной плоскости $x0y$, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению.

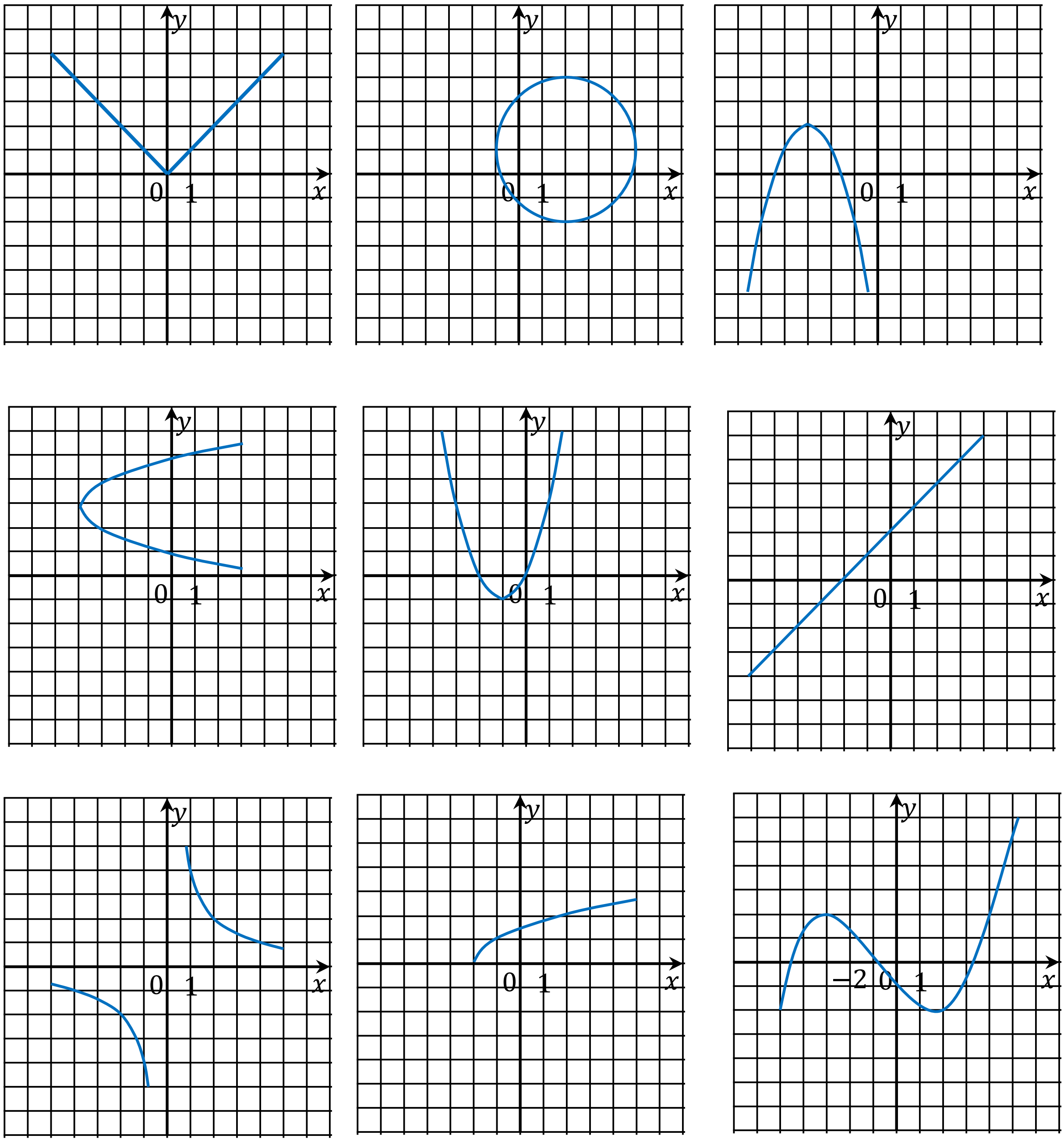

Рис. 2.

3. **Теоретический блок 1**. Изображение множества точек, координаты которых удовлетворяют заданным условиям. Ведущие идеи: симметрия, сдвиг графика уравнения (Рис. 3).

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

$$|x| + |y| = 4$$

Рис. 3.

Обсуждается наилучший способ построения графика этого уравнения.

Варианты:

1. Решить задачу “в лоб”: раскрыть модули в четырёх случаях:

I. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, $y = -x + 4$

II. $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, $y = x + 4$

III. $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$, $y = -x - 4$

IV. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$, $y = x - 4$

2. Если $y \geq 0$, то $y = 4 - |x|$

Если $y < 0$, то $y = |x| - 4$

3. Замечаем, что переменные x и y входят в уравнение симметрично.

Так как $|-x| = |x|$ и $|-y| = |y|$, то график уравнения должен быть симметричным как относительно оси OX, так и относительно оси OY.

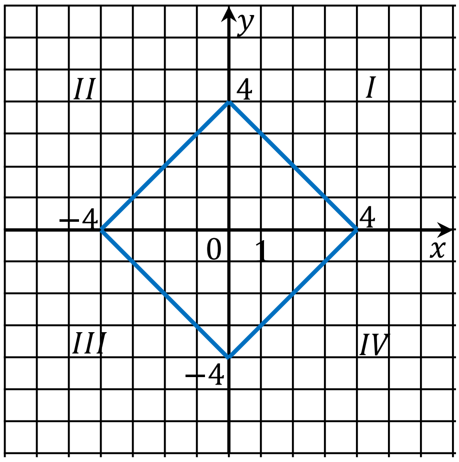

Рис. 4

Строим график в первой четверти при условии, что $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$y = -x + 4$$

И симметрично отображаем его как относительно оси OX, так и относительно оси OY.

Вопрос: какую геометрическую фигуру описывает уравнение

$$|x| + |y| = 4?$$

Задание: найти площадь этого квадрата и его сторону:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8^2 = 32, \qquad a = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

Творческое задание: Начертить график уравнения $|x| + |y| = p$, где $p > 0$ и записать формулы для его площади и стороны.

$$S = \frac{1}{2} \cdot (2p)^2 = 2p^2, \qquad a = \sqrt{p^2 + p^2} = p\sqrt{2}$$

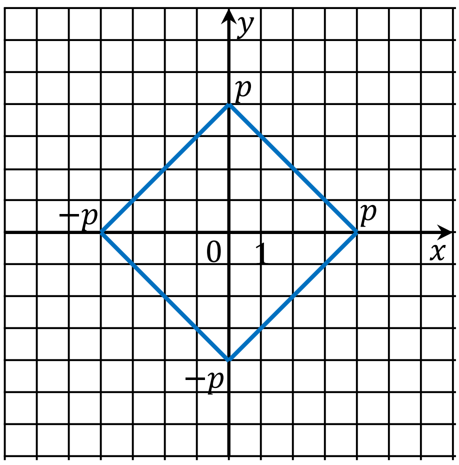

Рис. 5

4. **Блок экспериментов.**

Эксперимент. Преобразовать уравнение $|x| + |y| = p$, где $p > 0$, которое описывает квадрат так, чтобы уравнение задавало ромб.

Гипотеза: уравнение должно иметь вид:

$m|x| + n|y| = p$, где $p > 0, m \neq n$.

После обсуждения учащиеся получают задание на два варианта:

Построить графики уравнений:

1 вариант: $2|x| + |y| = 4$ 2 вариант: $|x| + 2|y| = 4$

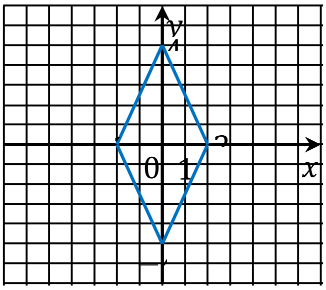

Рис. 6

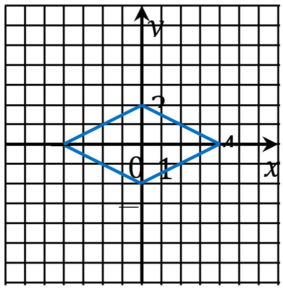

Рис. 7

5. **Теоретический блок 2**. Построение графика уравнения вида: $|x + a| + |y + b| = p$

Задание: построить график уравнения $|x - 2| + |y + 2| = 4$

1. Повторяется вопрос о построении графика функции $y = f(x + a)$. Выдаются дидактические материалы. Учитель работает у доски.

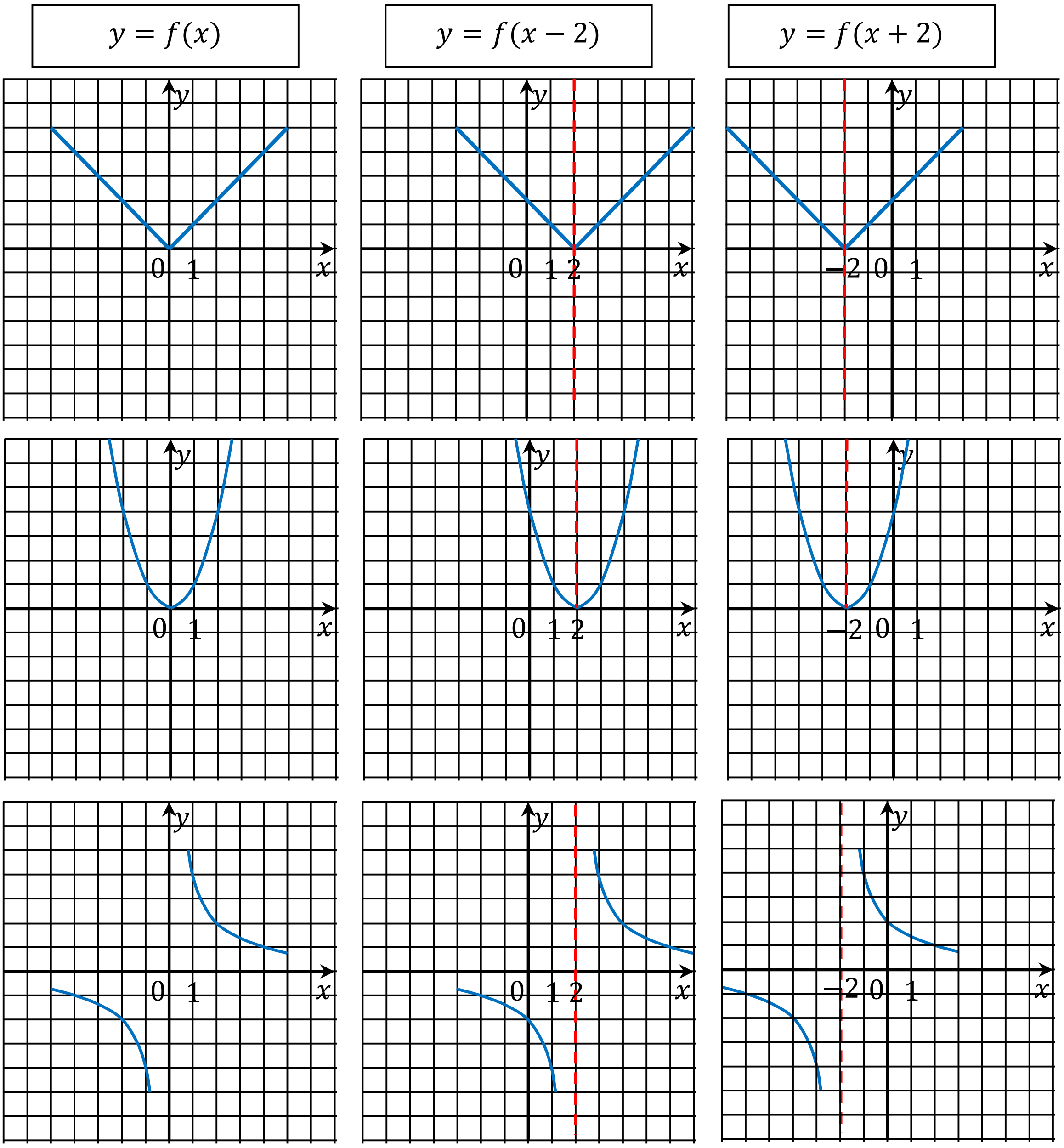

Рис. 8.

Гипотеза: *график уравнения* $|x-2|+|y+2|=4$ *получается из графика уравнения* $|x|+|y|=4$ *в результате сдвига на две единицы вправо вдоль оси* OX *и на две единицы в отрицательном направлении вдоль оси* OY*. График уравнения будет представлять собой квадрат, центр симметрии которого находится в точке* $(2;-2)$*. Осями симметрии квадрата будут прямые* $x=2$ и $y=-2$.

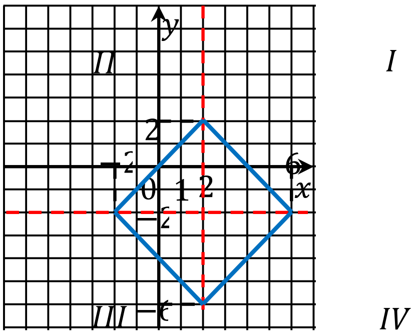

Рис. 9.

Выполняется непосредственная проверка гипотезы. Раскрываются модули в четырёх случаях:

I. $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}, \quad y=-x+4$

II. $\begin{cases} x \leq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}, \quad y=x$

III. $\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq -2 \end{cases}, \quad y=-x-4$

IV. $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq -2 \end{cases}, \quad y=x-8$

6. **Блок экспериментов 2.**

Эксперимент 1. *Построить график уравнения:* $|y-x|+|y+x|=6$

Рассматриваем четыре случая:

I. $\begin{cases} y \geq x \\ y \geq -x \end{cases}, \quad y-x+y+x=6, \;\; y=3$

II. $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq -x \end{cases}, \quad y-x-y-x=6, \;\; x=-3$

III. $\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x \end{cases}, \quad -y+x-y-x=6, \;\; y=-3$

IV. $\begin{cases} y \leq x \\ y \geq -x \end{cases}, \quad -y+x+y+x=6, \;\; x=3$

График уравнения представляет собой квадрат центром симметрии которого является точка $(0;0)$*, сторона которого* $a=6$*, а площадь* $S=36$*.*

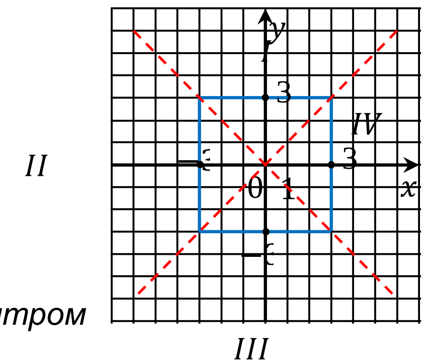

Рис. 10.

Эксперимент 2. *Построить график уравнения:* $|y-x|+|y+x|=p$, где $p>0$. *Найти его сторону и площадь.*

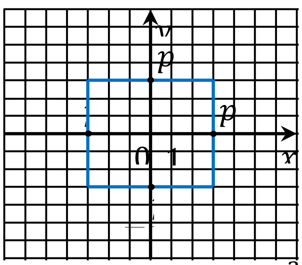

Рис. 11. $a=p, \;\; S=p^2$

Эксперимент 3. *Творческое задание: изменить уравнение* $|y-x|+|y+x|=8$ *так, чтобы оно описывало прямоугольник.*
Учащиеся предлагают свои варианты. После чего сроят график уравнения:

$$|y-2x|+|y+2x|=8$$

I. $\begin{cases} y\ge x \\ y\ge -x \end{cases}$, $y-2x+y+2x=8,\ y=4$

II. $\begin{cases} y\ge x \\ y\le -x \end{cases}$, $y-2x-y-2x=8,\ x=-2$

III. $\begin{cases} y\le x \\ y\le -x \end{cases}$, $-y+2x-y-2x=8,\ y=-4$

IV. $\begin{cases} y\le x \\ y\ge -x \end{cases}$, $-y+2x+y+2x=2,\ x=2$

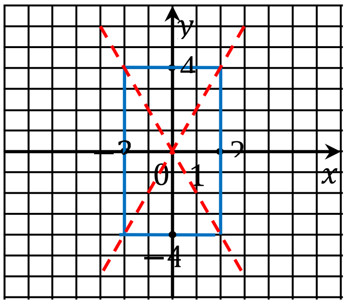

Рис. 12

7. **Теоретический блок 3.** *Методика применения полученных знаний и навыков при решении уравнений некоторых типов с модулем и параметром.*

Задание: Решить уравнение $|\boldsymbol{a-x}|+|\boldsymbol{a+x+1}|=\boldsymbol{3}$

При решении уравнений и неравенств с одним неизвестным, содержащих параметр, удобно проводить исследование на координатно-параметрической плоскости $x0a$. (Значение параметра a будем откладывать по вертикальной оси, а значение неизвестного x по горизонтальной оси).

Построим на плоскости $x0a$ график данного уравнения. Для этого построим прямые $a=x$ и $a=-x-1$, которые разобьют плоскость на 4 части.

I. $\begin{cases} a\ge x \\ a\ge -x-1 \end{cases}$, $a-x+a+x+1=3,\ a=1$

II. $\begin{cases} a\ge x \\ a\le -x-1 \end{cases}$, $a-x-a-x-1=3,\ x=-2$

III. $\begin{cases} a\le x \\ a\le -x-1 \end{cases}$, $-y+2x-y-2x=8,\ y=-4$

IV. $\begin{cases} a\le x \\ a\ge -x-1 \end{cases}$, $-y+2x+y+2x=2,\ x=2$

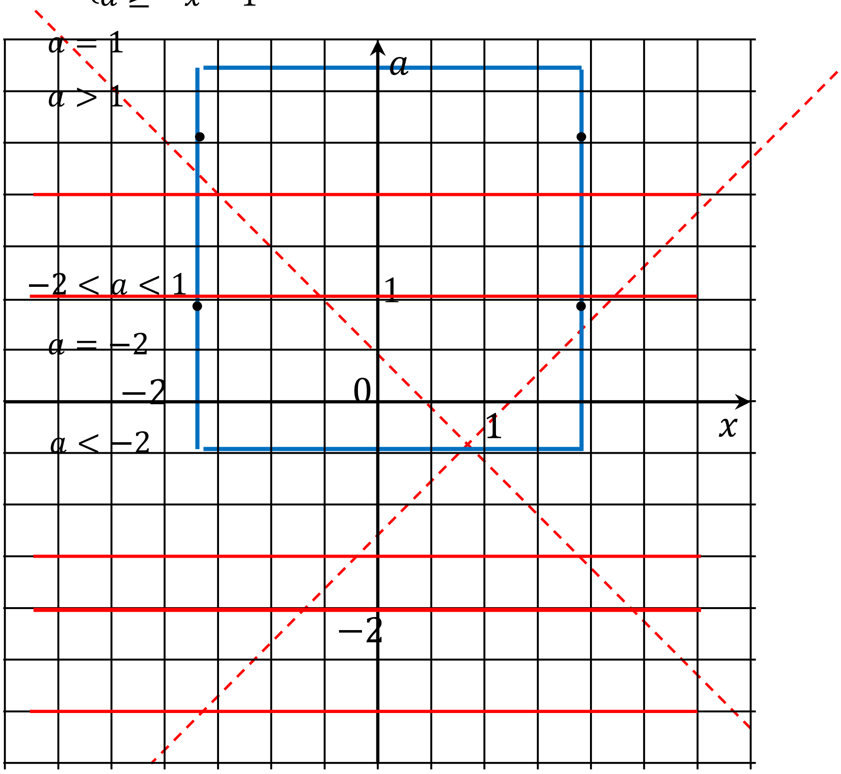

Рис. 13

1) Если $a - 2$, то корней нет;
2) Если $a = -2$, то решением уравнения является отрезок $[-2; 1]$;
3) Если $-2 < a < 1$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = -2,\ x_2 = 1$;
4) Если $a = 1$, то решением уравнения является отрезок $[-2; 1]$;
5) Если $a > 1$, то корней нет;
Ответ:
1) Если $a \in (-\infty; -2) \cup (1: +\infty)$, то уравнение корней не имеет;
2) Если $a = -2$ или $a = 1$, то решением является отрезок $[-2; 1]$;
3) Если $-2 < a < 1$, то уравнение имеет два корня: $-2; 1$.
8. **Блок постановки творческих задач.**
Обсуждение и комментарии к домашнему заданию (7 мин.).
Домашнее задание к следующему уроку будет содержать:
1) Обязательная часть (индивидуальная работа) (Рис. 14).

ПОСТРОИТЬ ГРАФИКИ УРАВНЕНИЙ:
1. $|x+3| + |y-1| = 4$
2. $|x| - |y| = 4$
3. $|x+3| - |y-1| = 4$

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ
4. $|a - x + 2| + |a + x - 2| = 6$

Рис. 14.

При решении задания 4 допускается совместное творчество.
2) Творческая часть (допускается совместное творчество) (Рис. 15).

ПОСТРОИТЬ ГРАФИКИ УРАВНЕНИЙ:
5. $|y - x| + |x| = 4$
6. $1 - |x+1| = \big|y - |x+1|\big|$
7. *Найти формулы площади, длин диагоналей и сторону ромба, заданного уравнением:* $m|x| + n|y| = p$, где $p > 0, m \neq n$.

Рис. 15.

Учащиеся должны построить графики этих уравнений и убедиться в том, что одно уравнение описывает параллелограмм, а второе – треугольник. Учащимся предлагается поэкспериментировать с этими уравнениями, меняя коэффициенты при неизвестных, и понаблюдать как это влияет на геометрию получаемых геометрических фигур. Результаты этой самостоятельной работы учащиеся смогут продемонстрировать на следующем уроке.

9. Блок резюме.

1. Учащиеся формулируют главные выводы урока:

– Дано определение графика уравнения в сравнении с определением графика функции.

– Научились строить графики уравнений, содержащих символ модуля.

– Установили связь геометрии с алгеброй: различные геометрические фигуры могут быть заданы алгебраическими уравнениями. В частности, были построены квадрат, ромб и прямоугольник.

– Познакомились графическим методом решения уравнений с модулем и параметром, с использованием навыков полученных при построении графиков уравнений.

2. Оценивание работы учащихся: самооценка, взаимооценка, оценка работы учащихся учителем.

3. Выяснение мнения учащихся об уроке.

Ссылки на источники

1. А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев Алгебра 9. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2013.
2. И. Ф. Шарыгин. Факультативный курс по математике 10. – М. «Просвещение», 1989.
3. В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И Шабунин. Лекции и задачи по элементарной математике. Издательство “Наука”, М. 1974.