Нагорная Валерия Олеговна,
магистр математики НГУ, студент спец. факультета психологии НГУ, учитель математики МБОУ СОШ № 202, г. Новосибирск
vbrovkina@mail.ru

Развитие математического мышления в школе

Аннотация. *Статья посвящена феномену, определённому в педагогической психологии, как математическое мышление. Даётся краткое описание видов математического мышления. Также показаны способы развития математического мышления в школе. Данная статья будет интересна, как психологам, так и учителям математики.*
Ключевые слова: *математическое мышление, педагогическая психология, эмпирическое и теоретическое мышление, формирование основ мышления в школе.*

Исследования многих отечественных и зарубежных психологов показывают, что без целенаправленного развития математического мышления, являющегося одним из важнейших компонентов процесса познавательной деятельности, невозможно достичь эффективных результатов в обучении, систематизации знаний, умений и навыков. Именно этим вопросом и занимается педагогическая психология.

К сожалению, единого мнения по вопросу определения понятия математического мышления в психолого-педагогической и методической литературе нет. Одни исследователи считают, что математического мышления, как такового, нет. Пиаже считает, что математические структуры являются продолжением умственных структур. Тем не менее, Пиаже отмечает, что логика является единственным или хотя бы главным критерием мышления, а развитие логики происходит на основе развития именно математического мышления. Другие считают, что математическое мышление не должно ограничиваться только алгебраическими, порядковыми и топологическими структурами, а должны включать такие структуры, как комбинаторные, алгоритмические и образно-геометрические [1].

Следует отметить, что раньше школьная программа ограничивалась лишь алгебраическими, порядковыми и топологическими структурами. И совсем недавно в школьную программу и, как следствие, в Государственную Итоговую Аттестацию ввели комбинаторные и алгоритмические структуры. А в старшее звено ввели образно-геометрические структуры, включенные в Единый Государственный Экзамен.

Другой подход заключается в том, что математическое мышление характеризуется, как абстрактное, логическое, обладающее способностью к формализации, обобщению, пространственным представлением, то есть наделяют качествами, которые фактическую определяют характеристику мышления не только в математическом, но и в любой другой предметной области.

На основе этого выделили компоненты, составляющие «ядро» такого мышления:

1. Пространственный – понимание пространственных фигур, образов и их составляющих, память на пространственные образы, пространственные абстракции.
2. Логический – образование понятий-абстракций, запоминание и самостоятельное выделение общих понятийных связей, заключений и доказательств по правилам формальной логики, образование числовых представлений, память на числовые решения.
3. Символический – понимание и запоминание символов, операции с ними [1].

Рассмотрим особенности математики, как науки, на основе статьи

Л. К. Максимова [2].

В естественных науках результаты получаются на основе экспериментов, то в математике эксперимент является средством построения гипотез. Математика, абстрагируясь от конкретного, обладает высокой степенью общности за счёт построения многоступенчатых абстракций. Это и развивает, так называемое, абстрактное мышление.

Особенностью математики также является то, что построение логического аппарата строго детерминирован, то есть в математике тот или иной факт либо доказывается с исчерпывающей обоснованностью, либо беспощадно отбрасывается.

Также следует отметить следующие характерные черты математического мышления, которые формируются у подавляющего числа учащихся при изучении математики в средней школе:

1. чёткость формирования проблемы, задачи, задания;
2. понимание предлагаемого математического материала;
3. строгость изложения материала;
4. память.

При исследовании математического мышления Крутецкий выделил основную способность в структуре математической одаренности – «способность к обобщению математических объектов, отношений и действий» [3]. Он выделил два способа обобщения:

1. в результате длительного решения однотипных задач;
2. обобщение «с места», когда учащийся обобщает способ решения на основе анализа решения одной задачи.

Например, при изучении комбинаторных задач, в которых используется дерево возможных вариантов, ученикам 5 класса, как правило, необходимо усвоить этот способ на примере 4-5 задач. Но также есть ученики, которые после решения 1-2 задач, последующие задачи выполняют самостоятельно. К сожалению, таких учеников очень мало, потому что к концу 5-го класса способность обобщения «с места» почти не развита.

Атаханов пишет: «В. В. Давыдов показал, что первый способ обобщения есть не что иное, как эмпирическое обобщение, а второй способ теоретическое обобщение. Эти виды обобщения и обусловливают особенности двух типов мышления – рассудочно-эмпирического и теоретического» [4].

Л. К. Максимов полагает, что вопрос о развитии математического мышления решается выявлением особенностей развития мышления. Полученные им данные говорят о том, что эмпирическое мышление имеет более раннее, а теоретическое более позднее возрастное проявление [5].

Таким образом, в своей статье Атаханов выделил четыре уровня развития мышления:

1. эмпирическое мышление (доаналитический уровень) – у школьников с этим мышлением эмпирический способ ориентации в условиях задачи, имеются зачаточные формы анализа, отсутствует рефлексия, планирование;
2. аналитический уровень теоретического типа мышления – у школьников эмпирический способ ориентации в условиях задачи, но уже имеются зачаточные формы рефлексии и планирования, начальные стадии становления анализа;
3. планирующий уровень теоретического типа мышления – у школьников теоретический способ ориентации в условиях задачи, имеется относительно развитое действие анализа, наблюдается процесс становления рефлексии и планирования;
4. рефлексирующий уровень теоретического типа мышления – у школьников теоретический способ ориентации в условиях задачи, проявляется относительно

высокий уровень развития рефлексии, анализа и планирования.

На основе четырёх типах мышления были составлены разные задачи для исследования математического мышления в разных классах. Оказалось, что эмпирическим мышлением обладают 83,3 % третьеклассников и порядка 40 % учащихся 9 классов. Задачи на содержательный анализ правильно решили 8,4 % третьеклассников и 53,8 % девятиклассников. Причём они разделились на 3 группы: тем, кто правильно решил задачи на анализ (второй тип мышления) – 4,2 % у третьеклассников и 11,5 % девятиклассников. Вторая группа – это те, кто правильно решили задачи на анализ и планирование (третий тип мышления) – 4,3 % у третьеклассников и 30,8 % у девятиклассников. И третья группа это те, кто правильно решили задачи на анализ, планирование и рефлексию (четвёртый тип мышления) – 11,5 % девятиклассников и ни одного третьеклассника [4].

Таким образом, очевидно, что теоретическим типом мышления обладают примерно 10 % учащихся 9 классов. Это связано со специфическим характером математического мышления и отсутствием развития первоначальных основ теоретического мышления в начальной школе и среднем звене, а, впоследствии, и в старшем звене, именно поэтому школьников с успешным знанием математики намного меньше, чем в любых других областях [6–8].

Также при рассмотрении развития математического мышления также не следует забывать об уровне математических знаний учащихся. Рассмотрение особенностей выполнения заданий математического содержания показывает, что проявление сравнительно низких возможностей учащихся связано с недостаточностью или с отсутствием математических знаний, которые могли бы служить содержательной основой функционирования мышления. Например, несмотря на относительную доступность математической задачи: «Боковая сторона равнобедренного треугольника вдвое больше его основания. Его периметр равен 45 см. Найти величину сторон» испытуемые затрудняются в установлении связи между периметром и сторонами треугольника: встречались решения вида

x+2-x=45,

(2-x+x)2=45,

45=a+b+c и т. д.

Здесь явно прослеживается понимание необходимости анализа, но проявляется неверное его осуществление, обусловленное недостатками в формировании понятий равнобедренности треугольника, периметра как суммы всех (трЁх) сторон, что не даёт возможности содержательного анализа ситуации. Анализ множества подобных случаев даёт основание предполагать, что важным и решающим моментом в переходе учащихся от одного уровня развития математического мышления к другому является усвоение ими содержания математического знания. В этом смысле развитие математического мышления социально обусловлено: ведущим в нём является развитие математического содержания, усваиваемого учащимися. Последнее, вероятно, и будет определять суть развития математического мышления.

Но каким именно образом должны формироваться основы теоретического мышления в школе? Можно выделить следующий комплекс необходимых условий для осуществления этого процесса:

1. длительность процесса развития мышления: осуществление его повседневно и на каждом уроке;
2. недопустимость погрешности в логике изложения учебного материала;
3. вовлечение учеников в постоянную работу по развитию своего мышления, включение в содержание обучения системы определённых теоретических знаний: о сущности логических форм и законов и о способах ориентировки в выполнении умственных действий;

4. организация в том числе и внеклассной работы по математике. Именно во время внеклассной работы учитель может максимально развивать математическое мышление в формате;

5. усвоение содержаний математических знаний.

Таким образом, в концепции школьного образования выделены основные цели обучения – это обучение учащихся приёмам мышления и методам познания, формирование у них качеств математического мышления, математических мыслительных способностей и умений. Иными словами, одна из основных задач школьного математического образования – это развитие математического мышления. Педагог с помощью эмпирических исследований (описанных в статье 4) может иметь в виду, что учащийся, находясь на некотором уровне развития мышления, имеет определённые возможности в самостоятельном решении определённого класса задач, а с помощью учителя – задач и другого класса. Это показывает, что разработка учителем системы учебных задач и их усвоение учащимся создаёт предпосылки для становления следующего уровня развития интеллекта путём реализации идеи зоны ближайшего развития.

Ссылки на источники

1. Голиков А. И. Теоретические подходы к феномену «математическое мышление» – http://portalus.ru, 2007 г. – С. 22–31.
2. Максимов Л. К. Зависимость развития математического мышления школьников от характера обучения. – Вопросы психологии, 1979 г. – С. 57–65.
3. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. – М.: 1968 г. – С. 380–390, 397–400.
4. Атаханов Р. А. К диагностике развития математического мышления. – Вопросы психологии, 1991 г. – С. 60–67.
5. Максимов Л. К. Формирование математического мышления у младших школьников. – М.: 1987 г.
6. Горев П. М. Приобщение к математическому творчеству: Дополнительное математическое образование: Монография. – Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2012. – 156 с.
7. Горев П. М. Совершенствование системы дополнительного математического образования в средней школе // Концепт. – 2014. – № 11 (ноябрь). – ART 14298. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14298.htm.
8. Горев П. М. Основные формы организации дополнительного математического образования в средней школе // Концепт. – 2013. – № 05 (май). – ART 13116. – URL: http://e-koncept.ru/2013/13116.htm.