

Изотов Виктор Николаевич,

доктор технических наук, профессор кафедры экономики и финансов
 Тульского филиала ФГБОУ ВПО «Российская академия народного хозяйства
 и государственной службы при Президенте Российской Федерации», г. Тула
izotovvn-tula@mail.ru



Морозова Татьяна Владиславовна,

начальник аналитического отдела ГУ Тульской области «Тулаупрадор», г. Тула
tanek171290@yandex.ru

Алгоритмизация приближенных методов решения задачи унификации

Аннотация. Рассмотрены алгоритмы приближенных методов решения одноуровневой многомерной задачи унификации. Приведено обоснование алгоритма отбора переменных, использующего приближенные алгоритмы. Доказана точность получаемых решений, найденных с помощью алгоритма отбора переменных. Исследована эффективность алгоритма.

Ключевые слова: задача унификации, алгоритм решения, доказательство алгоритма, исследование эффективности алгоритма.

Раздел: (04) экономика.

Среди приближенных методов решения задачи унификации наибольшее распространение получили алгоритмы с апостериорной оценкой их точности [1]. Относительная точность определяется в них по формуле (учитывается, что $x_i=1-y_i$):

$$\varepsilon = \frac{S(x_1, \dots, x_m) - \mu(W)}{\mu(W)}. \quad (1)$$

В основу первого приближенного алгоритма положен тот факт, что, исходя из особенностей построения оценочной матрицы W , единичные компоненты вектора $\|x_i\|$, минимизирующего целевую функцию, следует искать после построения W , прежде всего среди элементов множества $I_0(W) = \left\{ i \mid \bar{G}_i^0 = 0 \right\}$. Поэтому целесообразно ограничиться рассмотрением только таких допустимых решений, для которых $\left\{ i \mid x_i = 1 \right\} \subset I_0(W)$. Алгоритм, учитывающий данное обстоятельство, должен включать следующие этапы:

1. Вычисление значения $\mu(W)$.

2. Исключение из рассмотрения всех строк матрицы $\|G_{ij}\|$ и элементов вектора $\|G_i^0\|$ с номерами, не принадлежащими множеству $I_0(W)$. При этом получается новая исходная пара $\|\bar{G}_{ij}\|, \|\bar{G}_i^0\|$.

3. Применение алгоритма ветвей и границ к решению задачи с новой исходной парой для получения приближенного решения.

Этот метод дает наилучшее приближение, однако трудоемкость вычисления $\mu(\bar{W})$ существенно влияет на время решения задачи, так как построение \bar{W} осуществляется на каждом шаге вычисления, хотя число шагов и уменьшается в результате 2-го этапа приближенного алгоритма.

Второй приближенный алгоритм, в основе которого лежит идея «движения по градиенту», на 3-м этапе вместо схемы ветвей и границ включает ряд шагов итерационного процесса, количество которых не может быть больше m . На первом этапе осуществляется построение оценочной матрицы, которая позволяет получить оценку «снизу» целевой функции на множестве продолжений частичного решения (Z_1, \dots, Z_k) . На втором этапе производится вычисление нижней границы $H(Z_1, \dots, Z_k)$ и значений фиксируемых свободных переменных Z_{k+1}, \dots, Z_p . На третьем этапе выполняется ряд шагов итерационного процесса, количество которых не может быть больше m . На пер-

вом шаге в качестве приближенного решения рассматривается вектор $\|\bar{x}_i\|$, такой, что $x_i = 1$, если $i \in I_0(W)$, и $x_i = 0$ – в противном случае. Далее, для всех $i \in M = \{i \mid x_i = 1\}$ вычисляются показатели

$$\Delta S_i = S(x_1, \dots, x_m) - S(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_m),$$

характеризующие степень изменения целевой функции при удалении i -го типа изделия из предварительно полученного типоразмерного ряда. Затем определяется

$$\Delta S = \max_{i \in M} \Delta S_i.$$

Если $\Delta S \leq 0$, то улучшить имеющее решение невозможно, и алгоритм заканчивает работу. Если $\Delta S > 0$, то отыскивается номер i_0 , для которого $\Delta S_{i_0} = \Delta S$, и для него полагается $x_{i_0} = 0$. При этом получается новое приближенное решение с меньшим значением $S(x_1, \dots, x_m)$. После этого переходят ко второму шагу и т. д. Этот алгоритм позволяет получить если не наилучшее (как первый метод) приближенное решение, то достаточно хорошее. Точность метода существенно зависит от точности построения W на первом этапе. Здесь матрица W строится один раз.

Третий приближенный алгоритм основан на вычислении специальных показателей P_i , характеризующих изменение величины $S(x_1, \dots, x_m)$ при условии $x_i = 0$.

$$P_i = \sum_{j=1}^n \max \left\{ \min_{l \in D \cup B_D} (G_{lj} - G_{ij}) 0 \right\} - G_i^0, i \in B_D;$$

где $D = \{i \mid x_i = 1\}$ – множество индексов переменных x_i , вошедших в допустимое решение со значением $x_i = 1$;

B_D – множество индексов переменных x_i , не вошедших еще в допустимое решение, то есть значения которых пока не определены.

На каждом шаге алгоритма при условии $P_i \geq 0$ элементы i выводятся из множества B_D и вводятся во множество D , а затем из множества B_D удаляется элемент i_0 , для которого

$$P_{i_0} = \min_{i \in B_D} P_i.$$

Алгоритм заканчивает свою работу, когда все элементы i будут введены из множества B_D . При этом множество D будет содержать решение задачи.

На эффективность приближенных методов значительное влияние оказывает метод построения нижней границы, используемой для отсека неперспективных ветвлений.

Решение задачи унификации приближенными методами хотя и занимает незначительное время, но не всегда удовлетворяет требованиям точности. Решение же задач большой размерности (более 100x100) методом ветвей и границ требует относительно много машинного времени. Сокращение числа переборов допустимых решений в методе ветвей и границ может быть достигнуто применением дополнительной проверки на каждом шаге ветвления допустимого решения на оптимальность путем направленного решения двойственной задачи. Приближенное решение двойственной задачи сравнивается с найденным на данном шаге допустимым решением исходной задачи, и случай совпадения указывает на оптимальность целочисленного решения исходной задачи. В противном случае решение задачи продолжается методом ветвей и границ, причем поиск и уточнение допустимого решения исходной задачи целесообразно осуществлять одним из приближенных методов.

Рассматривая сущность направленного решения двойственной задачи, можно заметить, что это есть не что иное, как построение оценочной матрицы W , а приближенное двойственное решение есть результат вычисления оценки «снизу» целевой функции. Учитывая, что в основе применяемой усовершенствованной стратегии, обеспечивающей наибольшую точность нижней оценки, лежит идея «движения» в направлении получения максимальной величины $\mu(W)$, имеет смысл в качестве метода для нахождения допустимого решения исходной задачи выбрать второй приближенный метод, применяя в нем для повышения точности ту же усовершенствованную стратегию. Кроме того, анализируя алгоритм, а также принимая во внимание указанные особенности усовершенствованной стратегии и второго приближенного алгоритма, представляется возможным разработать новый алгоритм, включающий в себя достоинства приближенных методов и обеспечивающий получение точного решения задачи унификации.

Алгоритм, основанный на использовании двойственного решения для отбора переменных, включаемых в решение задачи унификации, содержит следующие этапы:

1. Нахождение двойственного решения $\mu(W)$ с применением усовершенствованной стратегии.
2. Определение допустимого решения S_d с помощью второго приближенного алгоритма.
3. Проверка допустимого решения на оптимальность путем сравнения с двойственным решением.
4. Отбор переменных, включаемых в решение задачи.

Алгоритм заканчивает работу, если доказана оптимальность допустимого решения или все переменные после отбора включены в решение задачи. Если в результате отбора не все переменные вошли в решение, то к оставшимся переменным применяется тот же алгоритм, начиная с 1-го этапа.

2. Определение допустимого решения S_d с помощью второго приближенного алгоритма.
3. Проверка допустимого решения на оптимальность путем сравнения с двойственным решением.
4. Отбор переменных, включаемых в решение задачи.

Алгоритм заканчивает работу, если доказана оптимальность допустимого решения или все переменные после отбора включены в решение задачи. Если в результате отбора не все переменные вошли в решение, то к оставшимся переменным применяется тот же алгоритм, начиная с 1-го этапа.

Алгоритм отбора переменных представляет собой следующую последовательность действий.

Если $\mu(W) \neq S_d$, то вычислить $\Delta \mu = S_d - \mu(W)$.

1. Просматриваются элементы вектора $\|\bar{G}_i^0\|$, полученного после построения матрицы W :

а) если $\bar{G}_i^0 > 0$ и $\bar{G}_i^0 \geq \Delta \mu$, то полагается $x_i = 0$, а номер строки вводится во множество $D_0 = \{i \mid x_i = 0\}$;

б) если $\bar{G}_i^0 = 0$, вычислить μ_i^* – двойственное решение задачи при условии, что номер i исключен из множества U ;

в) если $\mu_i^* \geq S_d$, то полагается $x_i = 1$, а номер i вводится во множество $D_1 = \{i \mid x_i = 1\}$.

2. Оставшиеся номера $i \in U$, не вошедшие во множества D_0 и D_1 , вводятся во множество \bar{D} . Затем для всех переменных $x_i \mid i \in \bar{D}$ алгоритм отбора повторяется, начиная с вычисления новых значений $\mu(W)$, S_d и $\|\bar{G}_i^0\|$, рассчитываемых для множества $U = \bar{D}$.

Алгоритм заканчивает работу, когда множество \bar{D} пустое. Это означает, что получено оптимальное решение $S_d = S^{opt}$.

Рассмотрим некоторые особенности применения данного алгоритма. Допустим, что заданы ограничения, когда, например, невозможно применение изделий i -го типа для выполнения работ j -го вида (то есть исходные данные содержат элементы $G_{ij} = \infty$). Задача решается обычным способом, но во время решения может оказаться, что $\mu(W) = S_d = \infty$. Тогда номера из множества \bar{D} вводятся во множества D_0 и D_1 по правилу, определяемому элементами вектора $\|x_i\|$, полученного на предыдущем этапе алгоритма.

Необходимо доказать, что алгоритм отбора переменных за конечное число шагов обеспечивает нахождение точного решения задачи унификации.

Для доказательства используется понятие тупиковой матрицы [2]. Оценочную матрицу W называют тупиковой, если для всякого $j \in X$:

1. $J_0(W) \cap J_j(W) \neq \emptyset$.

2. $w_{ij} = G_{ij}$ при $i \notin J_j(W)$;

где $J_0(W) = \left\{ i \mid G_i^0 = \sum_{j \in X} (w_{ij} - G_{ij}) \right\}$ – множество номеров i , для которых

$$\bar{G}_i^0 = 0;$$

$J_j(W) = \left\{ i \mid \min_i w_{ij} \right\}, \quad j = \overline{1, n}$ – множество номеров i , соответствующих

минимальным элементам в j -м столбце матрицы W ;

$\min_i w_{ij}$ – минимальный элемент в j -м столбце.

Тупиковые матрицы (в них дальнейшее увеличение $\mu(W)$ невозможно) являются наиболее перспективными – в смысле наилучшего $\mu(W)$ – оценочными матрицами.

В такой матрице величины G_i^0 распределяются наиболее экономичным образом, поскольку в процессе построения матрицы W к элементу w_{ij} добавляется величина не более той, которая необходима для увеличения значения минимума в j -м столбце. В наибольшей степени этим требованиям удовлетворяют матрицы, построенные с применением усовершенствованной стратегии. Для обоснования алгоритма отбора переменных необходимо доказать теорему.

Теорема. Тупиковая матрица, построенная для оценки полинома целевой функции на множестве продолжений частичного решения (z_1, \dots, z_k) , где $0 \leq k \leq m$, при $k = m - 1$, приводит к точной оценке этого полинома.

Полином может быть представлен в виде

$$S(z_1, \dots, z_k, y_{k+1}, \dots, y_m) = \sum_{i \in \{i \mid z_i = 0\}} G_i^0 + \bar{S}(y_{k+1}, \dots, y_m). \quad (2)$$

Необходимо определить, какой должна быть тупиковая матрица \bar{W} , построенная для оценки полинома $\bar{S}(y_{k+1}, \dots, y_m)$, чтобы величина $\mu(\bar{W})$ при произвольном значении $0 \leq k \leq m$ представляла собой точную оценку.

Вопрос о нижней оценке полинома целевой функции на множестве продолжений частичного решения (z_1, \dots, z_k) сводится к вопросу о нижней оценке полинома $\bar{S}(y_{k+1}, \dots, y_m)$ на всем множестве решений, определяемом вектором (y_{k+1}, \dots, y_m) .

Определение. Матрица $\bar{W} = \|\bar{w}_{ij}\|$ называется единичной, если для всякого $j \in X$ число ненулевых компонентов вектора $\|\bar{w}_{ij} - \bar{G}_{ij}\|$, где $i \in J_0(\bar{W})$, не более единицы.

Существует доказательство [3], что если \bar{W} – единичная матрица, то оценка $\mu(\bar{W})$ точная, а ее значение определяется по формуле

$$\mu(\bar{W}) = \sum_{i \in J_0(\bar{W})} \sum_{j \in \bar{X}(i)} \bar{w}_{ij} = \sum_{i \in J_0(\bar{W})} \left\{ G_i^0 + \sum_{j \in \bar{X}(i)} \bar{G}_{ij} \right\}, \quad (3)$$

где $\bar{X}(i) \subset \{j | i \in J_j(\bar{W})\}$ – множество номеров j -й строки матрицы \bar{W} , которые соответствуют минимальным элементам j -го столбца.

Если теперь рассмотреть вектор (y_{k+1}, \dots, y_m) , где $y_i = 0$, когда $i \in J_0(\bar{W})$, и $y_i = 1$ – в противном случае, то нетрудно заметить, что вектору (y_{k+1}, \dots, y_m) , минимизирующему полином $\bar{S}(y_{k+1}, \dots, y_m)$, в качестве оптимального типоразмерного ряда соответствует множество $J_0(\bar{W})$, а в качестве областей использования изделий соответствуют множества $\bar{X}(i)$. Другими словами, только единичная тупиковая матрица \bar{W} дает точную оценку полинома $\bar{S}(y_{k+1}, \dots, y_m)$.

Следовательно, при $k = m - 1$ значение нижней границы для частичного решения (Z_1, \dots, Z_k)

$$H(Z_1, \dots, Z_k) = \sum_{i \in \{i | Z_i = 0\}} G_i^0 + \mu(\bar{W})$$

всегда будет точной оценкой, поскольку в этом случае тупиковая матрица \bar{W} всегда будет единичной.

Из доказательства теоремы следует основной вывод, используемый при обосновании алгоритма отбора переменных. Если каждый элемент из множества $\{y_{k+1}, \dots, y_m\}$ рассматривать как последний элемент в этом множестве, а оставшиеся элементы – как частичное решение, то при наличии правила, устанавливающего оптимальное значение этого элемента в предположении, что частичное решение также оптимально, появится возможность поочередного отбора всех переменных для включения их в решение задачи унификации.

Как следует из (3), указанное правило целесообразно основать на учете особенностей получаемого результата построения матрицы W вектора $\|\bar{G}_i^0\|$, нулевые компоненты которого определены множеством $J_0(W)$. При этом нулевые значения вектора $\|y_i\|$ следует искать прежде всего среди номеров $i \in J_0(W)$, а единичные – среди номеров $i \in \{i | \bar{G}_i^0 > 0\}$. Учитывая факт совпадения прямого и двойственного решения для оптимального вектора $\|y_i\|$, целесообразно использовать их для поочередного установления оптимального значения каждого y_i . Действительно, если после построения матрицы W оставшаяся величина $\bar{G}_i^0 \geq \Delta\mu$, то при $y_i = 1$

произойдет совпадение прямого и двойственного решения в предположении, что частичное решение (Z_1, \dots, Z_k) без элемента y_i оптимально. Если же соотношение прямого и двойственного решений таково, что при $\bar{G}_i^0 = 0$ $\mu_i^* > S_d$, то удаление номера i из типоразмерного ряда нецелесообразно, то есть принимается $y_i = 0$, что также обеспечивает совпадение этих решений в предположении оптимальности вектора (Z_1, \dots, Z_k) при $k = m - 1$. Поскольку вектор (y_{k+1}, \dots, y_m) содержит конечное число элементов, с помощью данного алгоритма будет найдено точное решение задачи унификации за конечное число шагов.

Результаты проверки эффективности алгоритма приведены в таблице.

Результаты проверки эффективности метода отбора переменных

m	n	$\ \bar{G}_i^0\ $	$\ G_{ij}\ $	Алгоритм ветвей и границ, мин.лс.	Предлагаемый метод, с.	Время поиска 1-го допустимого решения, с.	ε , %
5	4	5–6	1 – 6	0\0,25	0,14	0,01	0
10	10	0,3–0,7	0,2–1	0\0,72	0,24	0,07	0
30	30	0–1	0 – 8	0\18,69	3,15	0,1	2,5
50	50	0,3–0,7	0,2–1	5\22,29	30,02	0,3	2,8

Проверка эффективности предлагаемого алгоритма показывает, что при небольших значениях $m \times n$ (не более 20x20) для 80% решенных задач первое допустимое решение, получаемое с помощью второго приближенного алгоритма, совпадает с оптимальным. В остальных случаях отклонение 1-го допустимого решения от оптимального не превышает 4%. Наибольшая эффективность алгоритма отмечается при больших значениях размерности матрицы $\|G_{ij}\|$.

Таким образом, алгоритм отбора переменных может быть применен для получения точного решения многомерной задачи унификации изделий, в том числе и системного ПО, по экономическому критерию. Использование в этом методе усовершенствованного алгоритма построения оценочной матрицы и второго приближенного алгоритма увеличивает число включаемых в решение переменных за один просмотр множества (y_{k+1}, \dots, y_m) , поскольку и в том и в другом алгоритмах учтены свойства единичных тупиковых матриц.

В результате анализа особенностей и способов совершенствования алгоритмов решения задачи унификации можно сделать следующие выводы:

1. Наиболее предпочтительными методами решения одноуровневой задачи унификации являются метод ветвей и границ, а также приближенные методы, основанные на его идеях. В этих методах нет необходимости применять особые требования к свойствам матриц исходных данных.

2. Для улучшения метода ветвей и границ предлагается эффективная стратегия построения оценочной матрицы, позволяющая получить более точную оценку нижней границы, а также оптимизировать функцию ветвления.

3. Проверка эффективности разработанного нового алгоритма точного решения задачи унификации, так называемого алгоритма отбора переменных, показывает, что наибольший эффект от применения алгоритма отмечается при больших значениях размерности исходной матрицы (более 50x50).

Ссылки на источники

1. Изотов В. Н., Петухов А. В. Повышение эффективности приближенного алгоритма решения задачи унификации ЭВМ в компьютерных сетях // НТС № 14. – Тула: ТАИИ, 1997. – С. 110–113.
2. Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т. Экстремальные задачи стандартизации. – Новосибирск: Наука. 1978. – 335 с.
3. Там же.

Viktor Izotov,

Doctor of Engineering Sciences, Professor, the Tula branch of Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Tula

izotovvn-tula@mail.ru

Tatiana Morozova,

Head of Analytical Department, the State Institution of the Tula Region "Tulauprador", Tula

tanek171290@yandex.ru

The algorithm of close methods of unitization tasks solution

Abstract. The algorithms of close methods of decision of one level multidimensional task of unitization are considered in the paper. The ground of the algorithm of selection of variables, using close algorithms, is given. Exactness of the got decisions found by means of the algorithm of selection of variables is well-proven. Efficiency of the algorithm is investigational.

Keywords: task of unitization, algorithm of decision, proof of algorithm, research of algorithm efficiency.

References

1. Izotov, V. N. & Petuhov, A. V. (1997) "Povyshenie jeffektivnosti priblizhennogo algoritma reshenija zadachi unifikacii JeVM v komp'juternyh setjah", *NTS № 14*, TAI, Tula, pp. 110–113 (in Russian).
2. Beresnev, V. L., Gimadi, Je. H. & Dement'ev, V. T. (1978) *Jekstrema'nye zadachi standartizacii*, Nauka, Novosibirsk, 335 p. (in Russian).
3. Ibid.

Рекомендовано к публикации:

*Некрасовой Г. Н., доктором педагогических наук,
членом редакционной коллегии журнала «Концепт»*

Поступила в редакцию <i>Received</i>	12.08.15	Получена положительная рецензия <i>Received a positive review</i>	14.08.15
Принята к публикации <i>Accepted for publication</i>	14.08.15	Опубликована <i>Published</i>	31.10.15



www.e-koncept.ru

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2015

© Изотов В. Н., Морозова Т. В., 2015