КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.
ART 12178 УДК 37.025:51

Ончукова Любовь Викторовна,
старший преподаватель кафедры математического анализа и методики обучения математике ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров
kaf_matanaliz@vshu.kirov.ru

Логические задачи в школьном курсе математики

Аннотация. *Статья посвящена вопросам обучения школьников 5–7-х классов решению логических задач. Дается краткое описание пяти авторских учебных пособий по математической логике для школьников; более подробно анализируются методы решения логических задач; приводятся примеры таких задач и их решения.*
Ключевые слова: *математическая логика, развивающее обучение, творческий подход, игровая ситуация.*

Современные подходы к обучению требуют, чтобы на первое место в образовательном процессе выходило развитие личности школьника, его мышления и творческих способностей. На страницах журнала «Концепт» уже не раз авторы останавливались на вопросах совершенствования обучения математике с этих позиций, в том числе средствами математических задач с логическим содержанием [1, 2].

Наш опыт преподавания математических дисциплин студентам физико-математических специальностей ВятГГУ и ученикам средних школ г. Кирова показывает, что добиваются хороших результатов, успешно поступают в высшие учебные заведения, легче проходят адаптационный период на младших курсах вузов, в дальнейшем учатся в них те выпускники школ, кто в среднем звене овладел умениями:

а) самостоятельно мыслить,
б) творчески подходить к выполнению любого задания,
в) искать различные варианты его решения,
г) отбирать среди них наиболее оптимальный.

Ни одна учебная дисциплина, кроме *логики*, не учит этому специально.

При изучении даже самого элементарного курса логики школьники учатся думать и рассуждать, отстаивать в споре свою точку зрения, делать правильные выводы. Поэтому нами был разработан курс логики для учащихся 5–7-х классов для обеспечения образовательного процесса в учреждении дополнительного образования «Открытый лицей» ВятГГУ. Программы лицея скоординированы с учебными программами школ и нацелены на качественную подготовку к поступлению и обучению в высших учебных заведениях. Курс логики в 5–7-х классах прошёл апробацию в школах №№ 3, 8, 36, 48, 49, 53, 70 города Кирова.

1. Определение логики как учебного предмета.

Приступая к занятиям с учащимися 5-х классов, прежде всего потребовалось сформулировать само понятие логики. С. И. Ожегов в «Словаре русского языка» даёт определение логики как науки о законах мышления и его формах [3, с. 301]. Нам представляется более уместным привести здесь определение проф. ВятГГУ М. И. Ненашева, читавшего курс логики учащимся Вятской гуманитарной гимназии, которое сформулировано в его учебном пособии «Введение в логику»: «Логика – это наука о формах мышления, на которых основаны рассуждения, позволяющие получать истинное знание об окружающем мире» [4, с. 3]. Это определение ближе к пониманию цели изучения курса, в основе которого лежит умение правильно рассуждать. Поэтому для школьников 5–7-х классов мы даём следующее определение: *логика – это наука,*

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12178 УДК 37.025:51
Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

изучающая такие человеческие рассуждения, которые позволяют получать истинное знание об окружающем мире. Логикой называют также ход рассуждений, умение делать правильные выводы. Такая формулировка близка к идеям, выдвинутым в предисловии к учебнику математики 5-го класса под ред. Н. Я. Виленкина: «…основа хорошего понимания математики – умение считать, умение думать, рассуждать, находить удачные пути решения задач» [5, с. 3]. С этим созвучна мысль, приведённая в учебнике математики 6-го класса И. И. Зубаревой, А. Г. Мордковича: «Думать придётся самостоятельно. Учиться этому нужно уже сейчас. …Ученик не просто заучивает то или иное теоретическое положение, а, выполнив упражнения в определённой последовательности, получает возможность самостоятельно сформулировать правило, определение нового понятия или даже ввести новый термин» [6, с. 3]. В соответствии с определением логики как учебного предмета нами определяется и понятие логической задачи.

2. Определение логической задачи.

К логическим задачам отнесём такие, при решении которых главное, определяющее – это отыскание связи между фактами, сопоставление их, построение цепочки рассуждений для достижения цели. Профессор Е. С. Канин, не ставя цель определить понятие «логическая задача», относит к ним такие задачи, которые на первый взгляд не являются математическими, но в то же время требуют для своего решения формулирования суждений (высказываний), построения умозаключений и их цепочек. Поскольку при решении логических задач строятся умозаключения, то при этом приходится применять и общие методы решения математических задач, такие как метод выведения, метод исчерпывающих проб, метод сведения к противоречию и др. [7, с.17–18].

Иногда приходится слышать, что любая математическая задача, не являющаяся чисто вычислительной, есть логическая задача, так как требует анализа данных, построения цепочки рассуждений, вывода, оценки его правильности. Но среди логических задач встречается множество таких, которые, на первый взгляд, не несут чисто математического содержания. Поэтому к логическим задачам отнесём такие, при решении которых используются законы логики, например, закон двойного отрицания, закон противоречия (не может быть сразу А и не А), закон исключённого третьего (или А или не А, третьего быть не может).

3. Содержание и структура курса «Элементы логики» в 5–7-х классах.

При построении курса логики были выделены два основных направления. Первое направление непосредственно связано с изучением основных логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, строгой дизъюнкции, импликации, эквиваленции и их свойств с последующим применением к решению логических задач. Содержание соответствующих разделов вошло в теоретическую часть курса. Второе направление связано с построением школьного курса математики и ориентировано на решение нестандартных задач доступными для школьников методами. Содержание этих разделов составило практическую часть курса. При создании учебного пособия автор в основном ориентировался на построение курса математики, изложенное в учебниках Н. Я. Виленкина.

Таким образом, можно предложить следующее построение курса логики для учащихся 5–7-х классов.

1) **Теоретическая часть:** изучение логических операций и их свойств с последующим применением к решению нестандартных задач.

Цель: повышение культуры мышления учащихся путём развития логической составляющей школьного курса математики.

Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Эта часть курса логики для учащихся 5–7-х классов нашла отражение в наших авторских учебных пособиях [9–11].

2) **Практическая часть:** решение нестандартных задач, связанных с программой школьного курса математики.

Цель: совершенствование умений и навыков решения задач школьного курса доступными для учащихся 5–6-х классов методами.

Эта часть курса логики для учащихся 5–7-х классов получила воплощение в еще в двух учебных пособиях [12, 13]. Ниже представлена более подробная схема построения курса логики для каждого класса.

5-й класс. Теоретическая часть: логические операции.

Введение. Что изучает логика?

1. Отрицание высказываний. Понятие отрицания.

2. Решение задач с помощью отрицания.

3. Свойства отрицания.

4. Отрицание отрицания. Поиск противоречия.

В этой части происходит знакомство учащихся с простейшими логическими задачами, которые можно решить с помощью операции отрицания, поэтапно исключая все лишние, «ненужные» случаи. При решении используются таблицы, схемы, рисунки, облегчающие понимание задачи. При этом школьники постепенно учатся сами составлять таблицы и схемы, соответствующие условию задачи.

5. Утверждения, одинаковые по смыслу. Эквивалентные высказывания.

Цель данной части – научиться заменять одно высказывание другим, имеющим тот же смысл, но более кратким и понятным пятиклассникам.

6. Логическое следствие. Рассуждения и умозаключения.

При изучении данного раздела школьники не только учатся строить цепочки умозаключений, восстанавливать пропущенные звенья в рассуждениях, но и решают задачи, в которых часть условий ложна. В процессе обучения они начинают самостоятельно находить ложные утверждения, отмечать противоречия в ходе рассуждений и в заключений, исключая при этом неверные ответы.

5-й класс. Практическая часть: решение линейных уравнений, неравенств и их систем нестандартными методами.

1. Решение задач с конца.

2. Геометрические методы решения логических задач.

3. Решение логических задач с помощью уравнений и неравенств.

4. Задачи с несколькими неизвестными.

Эта часть в основном посвящена пропедевтике изучения действий с дробями, методов решения уравнений, неравенств и систем уравнений. В доступной для учащихся форме излагаются принципы решения задач соответствующего содержания.

6-й класс. Теоретическая часть: логические операции.

1. Логические операции и признаки делимости. Свойства импликации.

2. Конъюнкция высказываний.

3. Дизъюнкция высказываний.

4. Отрицание конъюнкции.

5. Отрицание дизъюнкции.

В данной части учащиеся продолжают знакомство со свойствами операции импликации, а также их применением к изучению делимости чисел. Кроме того, при изучении свойств конъюнкции и дизъюнкции происходит и углубление знаний о

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12178 УДК 37.025:51
Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

свойствах эквиваленции, что позволяет использовать полученные знания при решении более сложных логических задач, часть условий в которых ложна.

6-й класс. Практическая часть: применение свойств делимости чисел при решении задач.

1. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель.

2. Деление на части и расчёты.

3. Решение логических задач с помощью уравнений и неравенств.

4. Задачи с несколькими неизвестными.

В представленной части рассматриваются нестандартные задачи, связанные с делимостью чисел, рассматриваются нестандартные методы решения задач с несколькими неизвестными.

7-й класс. Теоретическая часть: логические операции.

1. Строгая дизъюнкция (или А, или В).

2. Свойства строгой дизъюнкции.

3. Умозаключение в логике высказываний. Модусы.

4. Модусы и решение задач.

На этом этапе учащиеся кроме новой для них операции строгой дизъюнкции и её применения для решения логических задач, имеют все возможности взглянуть на изученный в 5–6-х классах материал с новой точки зрения, обобщить и проанализировать полученные ранее знания. Понятие модуса позволяет записывать условие задачи в буквенной форме и правильно определять, какие логические связки применялись при её составлении. Определение характера модуса, его достоверности или вероятностности позволяет сделать верное заключение. Умение правильно составить и применить модусы к решению логических задач определяет степень усвоения материала всего курса.

4. Методы решения логических задач.

В предлагаемой статье мы рассмотрим задачи, связанные со свойствами логической операции отрицания, рассматриваемыми в курсе логики в 5-м классе.

1. Некоторые логические задачи решаются без применения каких-либо специальных методов. При их решении достаточно проявить сообразительность, установить верный порядок рассуждений, сделать правильные выводы из условий задачи. Такие задачи встречаются по всему тексту каждой книги, оформлены в виде тестов или представлены в разделе «И» – игра.

Задача 1. На острове живут два племени – аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, пришельцы всегда лгут. Путешественник нанял жителя острова в проводники. По дороге они встретили другого островитянина. Путешественник попросил проводника узнать, к какому племени принадлежит этот человек. Проводник вернулся и сообщил, что человек назвался аборигеном.

Кем был проводник – пришельцем или аборигеном?

Решение. Аборигены всегда говорят правду. На вопрос «Кто вы?» абориген ответит: «Абориген». Пришельцы всегда лгут. Поэтому на тот же вопрос пришелец тоже ответит «Абориген». Проводник, вернувшись к путешественнику, сказал правду, следовательно, он абориген.

2. Ещё одна группа задач связана с построением отрицания высказывания. С отрицаниями высказываний мы сталкиваемся не только при решении задач, но и в реальной жизни. Поэтому важно научиться правильно формулировать отрицание заданного высказывания. Под высказыванием мы понимаем предложение, про которое можно сказать истинно оно или ложно. На первом этапе изучения свойств операции отрицания при построении отрицания какого-либо утверждения школьниками использовались слова *нет*, *неверно*, *не*, *не является*. Поэтому построение отрица-

Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

ния происходит в два приёма: сначала к предложению школьники добавляют слова «Неверно, что…», а затем стараются переформулировать его в более краткой форме. При этом обязательно внимание пятиклассников обращается на возможные логические ошибки.

Задача 2. Постройте отрицания высказываний с помощью слов «Неверно, что…», а затем запишите их в более простой форме.

1) Сестра всегда старше брата.
2) 25 меньше, чем 25.
3) Ни одна рыба не кусается.
4) У всех людей длинные волосы.
5) Все пятиклассники круглые отличники.
6) Саша не принёс на урок ни линейки, ни карандаша.
7) У бабушки на даче есть то ли куры, то ли кролики.

Решение. На первом этапе отрицания высказываний выглядят следующим образом.

1) **Неверно, что** сестра всегда старше брата.
2) **Неверно, что** 25 меньше, чем 25.
3) **Не верно, что** ни одна рыба не кусается.
4) **Не верно, что** у всех людей длинные волосы.
5) **Не верно, что** все пятиклассники круглые отличники.
6) **Не верно, что** Саша не принёс на урок ни линейки, ни карандаша.
7) **Не верно, что** у бабушки на даче есть то ли куры, то ли кролики.

Далее ученики, проанализировав смысл полученных высказываний, должны составить следующие предложения.

1) Сестра **не** всегда старше брата.
2) 25 **не** меньше, чем 25.
3) **Есть** рыбы, которые кусаются.
4) **Не** у всех людей длинные волосы.
5) **Не все** пятиклассники круглые отличники.
6) Саша принёс на урок линейку **или** карандаш.
7) У бабушки на даче **нет** ни кур, ни кроликов.

Возможные логические ошибки, на которые следует обращать внимание учеников.

1) Сестра всегда **младше** брата.
2) 25 **больше**, чем 25.
3) **Все** рыбы кусаются.
4) У всех людей **короткие** волосы.
5) **Нет** пятиклассников, которые являются круглыми отличниками.
6) Саша принёс на урок **и** линейку, **и** карандаш.
7) У бабушки на даче **нет** кур или кроликов.

Полезно каждое высказывание занести в таблицу, которая раздаётся школьникам заранее. Они заполняют её самостоятельно, что позволяет им сравнить полученные результаты.

Первоначальная формулировка отрицания	***Отрицание высказывания***	***Возможные логические ошибки***
1. Неверно, что сестра всегда старше брата. **2. Неверно, что** 25 меньше, чем 25. **3. Не верно, что** ни одна рыба не кусается. **4. Не верно, что** у всех людей длинные волосы. **5. Не верно, что** все пятиклассники круглые отличники. **6. Не верно, что** Саша не принёс на урок ни линейки, ни карандаша. **7. Не верно, что** у бабушки на даче есть то ли куры, то ли кролики.	**1.** Сестра **не** всегда старше брата. **2.** 25 **не** меньше, чем 25. **3. Есть** рыбы, которые кусаются. **4. Не** у всех людей длинные волосы. **5. Не все** пятиклассники круглые отличники. **6.** Саша принёс на урок линейку **или** карандаш. **7.** У бабушки на даче **нет** ни кур, ни кроликов.	**1.** Сестра всегда **младше** брата. **2.** 25 **больше**, чем 25. **3. Все** рыбы кусаются. **4.** У всех людей **короткие** волосы. **5. Нет** пятиклассников, которые являются круглыми отличниками. **6.** Саша принёс на урок **и** линейку, **и** карандаш. **7.** У бабушки на даче **нет** кур **или** кроликов.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12178 УДК 37.025:51
Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

3. Задачи раздела «Операция отрицания» решаются как простым рассуждением, так и с помощью таблиц. Мы не рассматриваем построение таблицы в качестве метода решения, а предлагаем учащимся в качестве удобного средства его оформления. При этом таблицы могут быть различных видов. В результате решения большого количества задач ученики сами начинают конструировать таблицы различных форм в соответствии с условием задачи, предлагая различные варианты.

Задача 3. В одной школе учатся три друга: Сергей, Коля и Максим. Их фамилии Петров, Семёнов и Иванов. Сергей учится в 5 классе, мама Коли инженер. Иванов учится в 6 классе, его мама бухгалтер. Сергей и Семёнов болеют за разные футбольные клубы.

Решение. Выпишем условия задачи в следующем порядке.

1) Сергей учится в 5 классе.
2) Иванов учится в 6 классе.
3) Мама Коли инженер.
4) Мама Иванова бухгалтер.
5) Сергей и Семёнов болеют за различные футбольные клубы.

Будем рассуждать и одновременно заполнять таблицу. Известно, что Сергей учится в 5-м классе, а Иванов – в 6-м. Значит, Сергей и Иванов – два разных мальчика. В первой клетке третьей строки таблицы ставим знак «–». Ещё известно, что мама Коли инженер, а мама Иванова бухгалтер. Это значит, что Коля и Иванов – мальчики из разных семей. Но тогда фамилия Коли не Иванов. Во второй клетке третьей строки таблицы ставим «–». Получается, что Ивановым может быть только Максим. Сергей может быть или Петровым или Семёновым. Но в условии 5 сказано, что Сергей и Семёнов болеют за разные футбольные клубы. Значит, Сергей не Семёнов. В первой клетке второй строки ставим «–». Получается, что Семёновым может быть только Коля. Тогда фамилия Сергея – Петров.

Фам. \ Имя	**Сергей**	**Коля**	**Максим**
Петров	+	–	–
Семёнов	–	+	–
Иванов	–	–	+

Далее рассматриваются задачи, в которых надо учесть порядок расположения элементов. Их также легко решить с помощью таблиц, сопровождаемых схематичными рисунками. Ниже приведены две такие задачи.

Задача 4. В кругу сидят четыре котёнка: Барсик, Дымок, Васька и Тимофей. Их цвета: белый, серый, рыжий и чёрный. Барсик не рыжий, Дымок сидит между белым и чёрным котятами. Между Дымком и рыжим котёнком сидит Тимофей. Тимофей не белый. Определите цвет каждого котёнка.

Задача 5. На столе лежат в ряд четыре фигуры: треугольник, круг, прямоугольник и ромб. Они окрашены в разные цвета: красный, синий, жёлтый и зелёный. Известно, что красная фигура лежит между зелёной и синей; справа от жёлтой фигуры лежит ромб; круг лежит правее и треугольника и ромба; треугольник не лежит с краю, синяя и жёлтая фигуры не лежат рядом. Определите цвет и порядок расположения фигур.

При использовании таблиц учащиеся 5-х классов довольно легко решают задачи с разнородными условиями.

Задача 6. Три подруги – Надя, Валя и Маша – вышли гулять в белом, красном и чёрном платьях. Туфли их были тех же трёх цветов, но только у Нади цвета туфель и платья совпадали. При этом у Вали ни платье, ни туфли не были чёрными, а Маша была в красных туфлях. Определите цвета платьев и туфель каждой из них.

Не приводя решения этой задачи, отметим только, что она легко решается с помощью следующей таблицы.

Цвет \ Имя	**Надя**	**Валя**	**Маша**
Белый			
Черный			
Красный			

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12178 УДК 37.025:51
Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Задача 7. На киностудии «XX век Фокс» одновременно идут киносъёмки 15 фильмов. В них снимаются Джекки Чан, Мел Гибсон, Чак Норрис, Арнольд Шварцнеггер, Сильвестр Сталлоне, Антонио Бандерас. В каждом фильме заняты двое из кинозвёзд. Составьте график работы киностудии на 5 дней, если известно следующее.

1) В первый день должны сниматься в одном фильме Джекки Чан и Мел Гибсон.
2) Во второй день на съёмочной площадке заняты Джекки Чан и Антонио Бандерас.
3) В третий день Антонио Бандерас снимается с Сильвестром Сталлоне.
4) В четвёртый день в одном фильме встречаются Чак Норрис и Мел Гибсон.

Решение. В этой задаче можно определить, какие актёры играли в фильмах в каждый из пяти дней. Для этого надо выяснить, кто из них не мог сниматься друг с другом в каждый из пяти дней, то есть опять применить законы отрицания. Например, в четвёртый день Джекки Чан не мог играть в одном фильме ни с Чаком Норрисом, ни с Мелом Гибсоном, так как в этот день они снимались в одном фильме. Не мог он играть и с Антонио Бандерасом, так как их совместная съёмка уже состоялась во второй день. Не мог он сниматься и с Арнольдом Шварцнеггером, так как тогда Сталлоне должен играть в одном фильме с Бандерасом, что уже было накануне. Остаётся считать, что в четвёртый день Джекки Чан встречается на съёмочной площадке с Сильвестром Сталлоне. Но тогда Шварцнеггер задействован в одном фильме с Бандерасом. Исключая далее случаи, которые уже имели место, получим график киносъёмок, представленный в таблице.

1-й день	**2-й день**	**3-й день**	**4-й день**	**5-й день**
Чан – Гиббсон Бандерас – Норрис Шварцнеггер – Сталлоне	Чан – Бандерас Гибсон – Сталлоне Норрис – Шварцнеггер	Бандерас – Сталлоне Гибсон – Шварцнеггер Норрис – Чан	Норрис – Гибсон Бандерас – Шварцнеггер Чан – Сталлоне	Чан – Шварцнеггер Сталлоне – Норрис Бандерас – Гибсон

Постепенно условия задач усложняются, но пятиклассники при большом количестве решённых задач сами начинают конструировать таблицы различного вида.

Задача 8. Был день рождения Клеопатры. Пятеро из гостей сидели на палубе нового корабля, – такой подарок сделала себе Клеопатра, – потягивали напитки и беседовали. На Клеопатре были две из подаренных ей вещей – новое платье и подарок Марка Антония. Марк Антоний пил виноградный сок, а один из его военачальников, Агенобарбус, сидел рядом с ним и пил молоко. Цезарион, сын Клеопатры, разглядывал старинный папирус, он пил не воду. Женщина, которая играла с собачкой, пила молоко ослицы, но это была не Чармиан, подруга Клеопатры. Чармиан внимательно слушала собеседников, она не пила гранатовый сок, его пил человек, который подарил Клеопатре обезьян бабуинов. Человек, который обмахивался веером, подарил не нитку жемчуга, а человек, который рассказывал весёлую историю, подарил прекрасную вазу. Кто писал письмо?

Решение задачи также удобно оформить в виде таблицы, которую на этом этапе изучения курса логики ребята составляют и заполняют самостоятельно.

Решение. Мы знаем, что Клеопатра сделала себе подарок – новый корабль. На нём находились всего две женщины – Клеопатра и её подруга Чармиан. Чармиан не играла с собачкой и не пила молоко ослицы, значит, это была сама Клеопатра. Тогда остальным гостям в графе «Подарок» можно написать, что они подарили *не* корабль, в графе «Напиток», что они пили *не* молоко ослицы, в графе «Занятие» – *не* играли с собачкой. Виноградный сок пил Марк Антоний, молоко пил Агенобарбус. Так как сын Клеопатры пил не воду, не виноградный сок, не молоко и не молоко ослицы, то он пил гранатовый сок. Значит, это он подарил матери обезьян бабуинов. Мы знаем, что он разглядывал старинный папирус. Тогда получается, что Чармиан пила воду. Подарок Марка Антония Клеопатра могла надеть на себя, но это было *не* платье. Из всех других подарков она могла надеть только нитку жемчуга, значит, это и был подарок Марка Антония. Следовательно, Марк Антоний не обмахивался веером. Он не рассказывал и весёлую историю, так как рассказчик подарил Клеопатре прекрасную вазу. Значит, это он писал письмо. Чармиан также не рассказывала весёлую историю, а внимательно слушала собеседников, значит это не она подарила прекрасную вазу. Следовательно, это она подарила Клеопатре новое платье. Рассказчиком весёлой истории мог быть только Агенобарбус, военачальник Марка Антония, он и подарил вазу. Тогда получается, что Чармиан обмахивалась веером.

Несмотря на кажущуюся сложность и запутанное условие данной задачи, пятиклассники обычно справлялись с ней довольно быстро.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12178 УДК 37.025:51
Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

	Клеопатра	Марк Антоний	Агенобарбус	Чармиан	Цезарион
Подарок	Корабль	Не корабль Жемчуг	Не корабль Не бабуины Не жемчуг Не платье Ваза	Не корабль Не бабуины Не жемчуг Не ваза Платье	Не корабль Бабуины
Напиток	Молоко ослицы	Виноградный сок	Молоко	Не молоко ослицы Не виноградный сок Не гранатовый сок Не молоко Вода	Гранатовый сок
Занятие	Игра с собачкой	Не играл с собачкой Не разглядывал папирус Не обмахивался веером Не рассказывал историю Писал письмо	Рассказывал историю	Не играла с собачкой Не разглядывала папирус Не писала письмо Не рассказывала историю Обмахивалась веером	Разглядывал папирус

4. Раздел «Отрицание отрицания. Поиск противоречия» представлен большим количеством задач, часть условий в которых ложна. Постепенно условия задач усложняются, так как при решении требуется учесть порядок следования элементов. Ниже приведены некоторые из них.

Задача 9. В соревнованиях по плаванию три пловца – Михаил, Андрей и Валерий – пришли к финишу почти одновременно, и между болельщиками разгорелся спор. Один утверждал, что Михаил – второй, а Валерий – третий. Другой доказывал, что Михаил – третий, а Валерий – первый. Третий говорил, что Андрей – второй, а Валерий – первый. Когда судьи объявили результаты заплыва, оказалось, что каждый болельщик был прав только наполовину. Как распределились места?

Решение. Мы не знаем, какая половина каждого высказывания верна, а какая – нет. Поэтому мы можем сделать предположение.

1-й случай. Пусть в высказывании первого болельщика утверждение «Михаил – второй» – истинно, а «Валерий – третий» – ложно. Тогда второй болельщик ошибается, утверждая, что Михаил – третий, и говорит правду, доказывая, что Валерий – первый. Это значит, что в утверждении третьего болельщика вторая половина – «Валерий – первый» – истинна, а первая – «Андрей – второй» – ложна. Получается, что Валерий занял первое место, Михаил – второе, а Андрей приплыл к финишу третьим.

2-й случай. Пусть в высказывании первого болельщика утверждение «Михаил – второй» – ложно, а «Валерий – третий» – истинно. Тогда второй болельщик ошибается, утверждая, что Валерий – первый и говорит правду, заявляя, что Михаил – третий. Получается, что и Валерий, и Михаил приплыли к финишу третьими. Но Андрей не может быть одновременно первым и вторым. Получили противоречие. Кроме того, если пронализировать высказывание третьего болельщика, то получится ещё одно противоречие. Так как Валерий не может быть первым, то утверждение «Андрей – второй» истинное. Выходит, что ни один из спортсменов не был первым.

Рассуждения проще понять, если внести условия задачи в таблицу.

1-й случай	*2-й случай*
истинно *ложно* Михаил – второй, Валерий – третий.	*ложно* *истинно* Михаил – второй, Валерий – третий.
ложно *истинно* Михаил – третий, Валерий – первый.	*истинно* *ложно* Михаил – третий, Валерий – первый.
ложно *истинно* Андрей – второй, Валерий – первый.	*истинно* *ложно* Андрей – второй, Валерий – первый.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12178 УДК 37.025:51
Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Задача 10. Четверо друзей – Дима, Миша, Лёня и Максим – получили в подарок по котёнку. Их назвали Пушок, Елисей, Фантик и Мурлыка. Каждый из ребят выбрал себе котёнка любимого цвета. На расспросы они ответили следующее:

– Фантик *не* рыжий, а Мурлыка *не* серый.
– Пушок *не* белый, а Елисей *не* серый.
– Миша выбрал чёрного котёнка, а Максим – Мурлыку.
– Лёня взял Елисея, а Дима – белого котёнка.
– Пушок *не* серый, и Дима *не* взял Фантика.

Какого цвета котёнок укаждого из друзей, если во всех высказыванниях одно утверждение истинно, а другое нет?

Решение. **1-й случай.** Мы не знаем, какая часть каждого высказывания верна, а какая нет. Предположим сначала, что Фантик не рыжий – это истинное высказывание. Тогда то, что Мурлыка *не* серый, это ложь. Данное предложение можно прочитать по-другому: «*Неверно*, что Мурлыка *не* серый». Но это значит, что на самом деле Мурлыка серый. Занесём полученный результат в таблицу. Так как все котята разного цвета, то Елисей, Фантик и Пушок серыми быть не могут. В соответствующем разделе таблицы запишем этот вывод. Тогда во втором предложении утверждение «Елисей не серый» истинно, а «Пушок не белый» ложно. Поэтому Пушок на самом деле белый. Следовательно, Фантик и Елисей не белые. Кроме того, мы предположили, что Фантик не рыжий. Тогда Фантик может быть только чёрного цвета, а значит Елисей – рыжий.

Теперь обратим внимание на последнее предложение. В нём истинным оказывается утверждение «Пушок не серый». Тогда фраза «Дима *не* взял Фантика» является ложной. Иначе её можно записать так: «*Неверно*, что Дима *не* взял Фантика». Получается, что это Дима взял Фантика. В четвёртом условии сказано, что Дима взял белого котёнка. Но белый котёнок – это Пушок, а не Фантик. Следовательно, это условие ложно. Но тогда верна вторая часть высказывания о том, что Лёня взял Елисея.

Осталось рассмотреть третье условие. Уже известно, что Дима взял чёрного Фантика, Поэтому Миша не мог выбрать чёрного котёнка, эта часть утверждения ложна. Но тогда верно, что Максим выбрал Мурлыку. Остаётся считать, что Мише достался белый Пушок.

	Фантик	Мурлыка	Пушок	Елисей
Цвет	Не серый Не белый Не рыжий Чёрный	Серый	Не серый Белый	Не серый Не белый Не чёрный Рыжий
Хозяин	Дима	Не Дима Не Лёня Максим	Не Дима Не Лёня Не Максим Миша	Лёня

2-й случай. Мы можем предположить, что в первом предложении утверждение «Фантик не рыжий» ложно, а утверждение «Мурлыка не серый» истинно. Тогда получается, что Фантик рыжий. Но для дальнейшего решения задачи это ничего не даёт. Заметим, что в условии чаще других упоминается серый цвет. Поэтому удобнее сначала выяснить, у кого из котят шерсть серого цвета. Когда мы рассматривали первый случай, то предполагали, что высказывание «Мурлыка не серый» ложно. При этом получилось, что Елисей не серый. Теперь предположим, что Елисей не серый – это ложь. Тогда на самом деле Елисей серый. Значит, первая половина второго условия является истинной, и Пушок действительно не белый. Кроме того, из этого следует, что Мурлыка действительно не серый, а Фантик рыжий. Тогда получается, что Пушок чёрного цвета, и в последнем предложении истинна фраза «Пушок не серый». Кроме того остаётся считать, что белый котёнок – это Мурлыка. Следовательно, утверждение «Дима не взял Фантика» ложно. В действительности это означает, что Дима взял рыжего Фантика, и утверждение «Дима взял белого котёнка» ложно. Значит, истинно то, что Лёня взял серого Елисея.

Теперь рассмотрим третье предложение. Оно не несёт явного противоречия, поэтому здесь тоже придётся сделать предположение. Пусть истинно первое утверждение о том, что Миша выбрал чёрного котёнка. Но это Пушок. Тогда то, что Максим выбрал белого Мурлыку – это ложь. Получается, что один котёнок остался без хозяина, что противоречит условию. Предположим теперь, что истинна вторая часть третьего предложения «Максим выбрал Мурлыку». Тогда Миша не мог взять чёрного котёнка, так как это утверждение оказывается ложным. Теперь получается, что чёрный Пушок не достался никому. Опять пришли к противоречию. Результаты рассуждений также можно занести в отдельную таблицу.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12178 УДК 37.025:51
Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

При решении подобных задач основная трудность у учащихся 5-х классов возникает при исследовании двойного отрицания. На первых порах им бывает сложно осмыслить тот факт, что отрицание отрицания какого-либо факта может оказаться утверждением этого факта. Кроме того, отрицание какого-то одного свойства, например цвета шерсти котёнка, ещё не означает наличия другого свойства. Необходимо обращать внимание учащихся на то, что надо исследовать все возможные случаи до тех пор, пока не останется один единственно верный.

Задача 11. Журналист прибыл в аэропорт, чтобы побеседовать с Фёдоровым, Григорьевым и Даниловым – лётчиком, бортинженером и штурманом одного самолёта. Знакомый пилот сообщил ему следующие факты.

– Данилов не лётчик.
– Фёдоров не бортинженер.
– Данилов не бортинженер.
– Григорьев не штурман.

Когда журналист начал беседовать с экипажем, выяснилось, что из всех четырёх фактов соответствует действительности только один. Какая специальность у каждого члена экипажа?

Несмотря на кажущуюся простоту задачи, её решение требует от пятиклассников достаточно больших усилий, так как необходимо проанализировать четыре возможных случая в предположении, что верно а) первое, б) второе, в) третье, г) четвёртое утверждения, а остальные три ложны. Решение получается только в третьем случае, три других приводят к противоречиям, которые ребята должны найти.

	1-й случай	**2-й случай**	**3-й случай**	**4-й случай**
Данилов не лётчик	И	Л	Л	Л
Фёдоров не бортинженер	Л	И	Л	Л
Данилов не бортинженер	Л	Л	И	Л
Григорьев не штурман	Л	Л	Л	И

Таким образом, задачи, связанные со свойствами операции отрицания рассматриваемой в 5-м классе, можно классифицировать по содержанию и методам решения следующим образом.

1. Решение задач с помощью простых таблиц. Цель – исключить все случаи, которых не может быть. Основная идея – выделить ключевые условия.

2. Задачи с набором разнородных условий. Цель – перебор всех возможных вариантов в каждой группе, которые надо исключить с установлением связей между ними.

3. Задачи с учётом порядка следования элементов. Цель – исключить все ненужные случаи с учётом порядка следования элементов.

4. Задачи на закон исключённого третьего. Цель – выбрать правильное решение из двух возможных вариантов при сделанных предположениях истинности.

5. Задачи на закон двойного отрицания. Цель – замена двойного отрицания более простым высказыванием с последующим выбором правильного решения из всех возможных.

Кроме перечисленных, встречаются и комбинированные задачи, например такие, в которых требуется учесть порядок следования элементов, причём часть условий в задаче оказывается ложной.

Задача 12. В небольшой деревушке жили лесорубы, охотники и рыбаки. Лесорубы всегда говорили правду, охотники, если им задавали несколько вопросов, отвечали поочерёдно то правду, то неправду (в ответ на первый вопрос они могут сказать и неправду), рыбаки всегда говорили неправду.

За круглым столом сидели трое жителей деревни в таком порядке (по часовой стрелке): Боб, Дик и Пит. Приезжий задал всем по очереди три вопроса: 1. Кто Ваш сосед слева? 2. Кто Ваш сосед справа? 3. Кто Вы? Вот как они ответили на эти вопросы. *Боб*: 1. Рыбак. 2. Охотник. 3. Лесоруб. *Дик*: 1. Охотник. 2. Охотник. 3. Лесоруб. *Пит*: 1. Рыбак. 2. Лесоруб. 3. Лесоруб. Кем на самом деле были Боб, Дик и Пит?

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12178 УДК 37.025:51
Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

На первых порах такие задачи трудны для учащихся, они не всегда понимают, с чего начинать решение. Поэтому от учителя требуется помочь им сделать рисунок к задаче, который существенно облегчает понимание, показать, как лучше оформить решение в виде краткой схемы, обратить внимание на противоречия, появляющиеся в процессе анализа данных задачи. Со временем учащиеся начинают сами предлагать различные варианты оформления решения при работе с подобными задачами.

Теперь приступим к разбору задач второй части, непосредственно связанных с программой по математике для средней школы. Задачи практической части курса «Введение в логику. Некоторые методы решения логических задач» для 5-го класса можно разбить на два основных раздела.

1. Задачи, связанные с понятием обыкновенной дроби.
2. Задачи с несколькими неизвестными.

Первая группа задач предназначена для пропедевтики и в дальнейшем лучшего усвоения темы «Дроби». Здесь представлены задачи, направленные на усвоение понятия части числа, а также действия с обыкновенными дробями.

Задача 13. Гиря весит 1кг и ещё половину массы гири. Сколько кг весит гиря?

Решение. Часто в ответе получают 1,5 *кг*. При этом рассуждают так: гиря весит 1 *кг* и ещё половину от 1 *кг*, следовательно, масса всей гири 1,5 *кг*. Это неверно. Правильный ответ 2 *кг*. Поскольку 1 *кг* составляет половину массы гири, то вся масса равна 2 *кг*. Полезно решение таких задач сопровождать рисунками.

Задача 14. В коробке лежали карандаши. Сестра взяла половину всех карандашей и ещё полкарандаша. Остальные 4 карандаша взял брат. Сколько карандашей было в коробке первоначально?

Нередко при решении подобной задачи можно слышать от учеников, что сестра взяла четыре с половиной карандаша, что один карандаш был сломан, что сестра и брат сломали один карандаш, чтобы поделить карандаши поровну и т.д. Поэтому иногда приходится уточнять, что число карандашей могло быть и нечётным, или добавлять в условие задачи, что ни один карандаш не был сломан. После этого дети довольно быстро догадываются о действительном числе карандашей – 9.

Задача 15. Мотоциклист проехал 160 *км* и ещё $\frac{1}{9}$ часть всего пути. Чему равен весь путь?

При решении таких задач полезно сделать чертёж, что существенно облегчает их понимание. Ученикам проще понять по рисунку, что 160 *км* составляет $\frac{8}{9}$ части всего пути и на $\frac{1}{9}$ часть пути приходится 20*км*.

Задача 16. Мама купила яблоки для троих своих детей. Дети должны поделить эти яблоки поровну между собой. Первым пришёл из школы старший сын, взял себе третью часть и ушёл гулять. Второй пришла сестра и, думая, что она пришла первой, взяла себе третью часть и ушла. Последним пришёл младший брат и взял третью часть остатка. После этого осталось 8 яблок. Сколько яблок было всего? Как дети должны поделить оставшиеся яблоки?

Задачи такого типа решаются «с конца». Хотя школьники при их решении оперируют с целыми числами, по сути эти задачи также связаны с делением целого на части. Поэтому они отнесены нами в один раздел с задачами на действия с дробями.

Задача 17. Дорога от дома до хозяйственного магазина занимает у Пети 40 *мин*. Однажды по дороге в магазин он вспомнил, что забыл дома список покупок. Если он пойдёт дальше, то придёт за 15 *мин* до обеденного перерыва. Если вернётся обратно, то опаздает на 5 *мин*. Какую часть пути успел пройти Петя?

Решение. Продолжив путь, Петя дойдёт до магазина за 15 *мин*. до перерыва, а если вернётся домой, то опаздает на 5 *мин*. Значит, ему надо 20 *мин*. дополнительного времени, которые требуются, чтобы вернуться домой и снова прийти в ту точку, где он был вынужден повернуть назад, то есть Петя должен пройти эту часть пути дважды. Получается, что один раз он проходит её за 10 *мин*., а раз весь путь он проходит за 40 *мин*., то он успел пройти четвёртую часть пути.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12178 УДК 37.025:51
Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Таким образом, задачи второй части по теме «Дроби» можно классифицировать по методам решения следующим образом.

1. Задачи, решаемые с конца.
2. Задачи на деление нечётного количества предметов.
3. Геометрические методы решения задач на части.

Кроме приведённых здесь задач в учебном пособии для 5-го класса «Введение в логику. Некоторые методы решения логических задач» представлены задачи «на части», известные из школьного курса математики, так как умение их решать необходимо при изучении следующего раздела «Задачи с несколькими неизвестными». Несмотря на то, что пятиклассники ещё не умеют их решать с помощью систем уравнений, данные задачи вполне разрешимы с помощью метода исчерпывающего перебора и некоторых специальных приёмов.

Задача 18. Дама сдавала в багаж: рюкзак, чемодан, саквояж.
– Чемодан и рюкзак вместе весят 12 *кг*.
– Чемодан и саквояж – 15 *кг*.
– Саквояж и рюкзак – 9 *кг*.
Сколько весит каждый предмет в отдельности?

Решение. Пятиклассники довольно быстро понимают, что если сложить приведённые в задаче числа, то получится удвоенный вес всех трёх предметов – 36*кг*. Тогда чемодан, саквояж и рюкзак вместе весят 18*кг*. Следовательно, масса саквояжа равна 6*кг*, рюкзака – 3*кг*, чемодана – 9*кг*. Как видно из решения, задачи такого вида хотя и содержат несколько неизвестных, но не требуют от школьников умения решать системы уравнений для их отыскания.

Задача 19. Весы пришли в равновесие, когда на одну чашу поставили гири по 2*кг*, а на другую – по 5*кг*, а всего 14 гирь. Сколько тех и других гирь поставили на весы?

Решение. Школьники подбирают количество гирь каждого вида до тех пор, пока весы не «покажут» одинаковый вес. Результаты вычислений тоже можно занести в таблицу (см. табл. 9). В начале решения ученики обычно берут количество гирь каждого вида поровну. Сложность заключается в том, что многие пятиклассники не сразу видят, количество гирь какого вида надо уменьшать, а какого увеличивать, чтобы масса на двух разных чашах весов приближалась к одному значению. Вначале перебор носит, как правило, хаотичный характер, и только после ряда неудачных попыток школьники начинают понимать закономерность изменения массы в зависимости от изменения числа гирь каждого вида.

Кол-во гирь по 2*кг*	**Кол-во гирь по 5*кг***	**Масса гирь по 2*кг***	**Масса гирь по 5*кг***
7	7	14	35
8	6	16	30
9	5	18	25
10	4	20	20

Подводя итог, нужно отметить, что перечисленные виды задач далеко не исчерпывают всех методов, изложенных в учебных пособиях по курсу логики для 5–7-х классов. Кроме задач, связанных с изучением и применением логических операций, в учебных пособиях «Открытого лицея» предложено большое количество занимательных задач, задач на смекалку, тестов, которые интересно решать как школьникам, так и их родителям. В дальнейшем мы планируем продолжить знакомство читателей с учебными пособиями «Элементы логики. Логические операции» для 6-х и 7-х классов средней школы.

Ссылки на источники

1. Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm.
2. Горев П. М. Уроки развивающей математики в 5–6-х классах средней школы // Концепт. – 2012. – № 10 (октябрь). – ART 12132. – 0,6 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12132.htm.
3. Ожегов С. И. Словарь русского языка. – М.: Советская энциклопедия, 1972. – 848 с.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // Концепт. – 2012. – № 12 (декабрь). – ART 12178. – 0,9 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12178.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.
ART 12178 УДК 37.025:51

4. Ненашев М. И. Введение в логику. – Киров, 1997. – 240 с.
5. Виленкин Н. Я., Чесноков А. С., Шварцбурд С. И., Жохов В. И. Математика: учебник для 5 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1990. – 304 с.
6. Зубарева И. И., Мордкович А. Г. Математика. 6 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2007. – 264 с.
7. Канин Е. С. Логические задачи // Математика для школьников. – 2011. – № 3. – С. 17–30.
8. Ончукова Л. В. Введение в логику. Логические операции: учебное пособие для 5 класса. – Киров, 2004. – 124 с.
9. Ончукова Л. В. Элементы логики. Логические операции: учебное пособие для 6 класса. – Киров, 2002. – 92 с.
10. Ончукова Л. В. Элементы логики. Логические приёмы в курсе математики: учебное пособие для 7 класса. – Киров, 2002. – 84 с.
11. Ончукова Л. В. Введение в логику. Некоторые методы решения логических задач: учебное пособие для 5 класса. – Киров, 2004. – 68 с.
12. Ончукова Л. В. Элементы логики. Логические методы на уроках математики: учебное пособие для 6 класса. – Киров, 2001. – 64 с.

Onchukova Lyubov,
Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis and methods of teaching mathematics Vyatka State University of Humanities, Kirov
kaf_matanaliz@vshu.kirov.ru

Logical problems in school mathematics

Abstract. The article is devoted to teaching students 5-7-graders solving logic problems. A brief description of the five copyright textbooks on mathematical logic for students, a more detailed analysis of methods for solving logic problems, are examples of such problems and their solutions.

Keywords: mathematical logic, developing training, creativity, game situation.

ISSN 2304-120X

***Рецензент**: Горев Павел Михайлович, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа и методики обучения математике ВятГГУ, главный редактор журнала «Концепт»*