



**Яшин Сергей Алексеевич,**

кандидат технических наук, доцент кафедры экономики и финансов Тульского филиала ФГБОУ ВПО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации», г. Тула  
[yashin.s@mail.ru](mailto:yashin.s@mail.ru)

**Самарцев Игорь Тихонович,**

кандидат геолого-минералогических наук, доцент кафедры экономики и финансов Тульского филиала ФГБОУ ВПО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации», г. Тула  
[samarit19@rambler.ru](mailto:samarit19@rambler.ru)

## Вопросы математического моделирования процессов функционирования органов и систем человека

**Аннотация.** Физиологические ритмы составляют основу жизни. Ритмические процессы взаимодействуют друг с другом и с внешней средой. Для понимания механизмов физиологических ритмов и процессов функционирования наиболее жизненно важных органов и систем человека особенно уместным является использование методов нелинейной динамики.

**Ключевые слова:** физиологические ритмы, нелинейная динамика, теория колебаний, биологическая ритмология, гомеостаз.

Все результаты в науке добываются при помощи познавательных действий. Какие бы научные достижения мы не взяли – эмпирические, теоретические или логические открытия, выявление, изучение и формулирование закона, построение теории или гипотезы, те или иные конструктивные решения и т. д., – в основе их всегда лежит сложный и кропотливый труд исследователей. Предметом рассмотрения в данной статье и будет познавательная деятельность в области моделирования процессов функционирования органов и систем человека с помощью математического аппарата.

Во всяком научном исследовании существенную роль играют сознательно формулируемые цели и проблемы, состав познавательных задач и познавательных операций или действий, методы и средства познания, получаемые результаты. В умении связывать эти составные элементы, планировать и контролировать ход научного исследования и сказывается талант и подготовленность учёного. Как в выборе целей, так и в поисках методов и средств их достижения он не может не исходить из результатов, достигнутых предшествующими поколениями исследователей. Ему необходимо знать требования, предъявляемые к научно-исследовательскому труду и его результатам. Эти требования выработаны и осознаны в истории науки, в них аккумулирован колоссальный труд многих поколений учёных, вокруг них велась и ведётся сложная теоретическая борьба. Игнорирование этих требований или произвольное обращение с ними нередко приводит к растрате сил и времени и даже серьёзным неудачам. Предшествующее развитие науки задаёт уровень, на котором включаются в научно-исследовательскую деятельность последующие поколения учёных.

Указанные обстоятельства особенно важными становятся в наши дни. В развитии современной науки происходят большие изменения: усложняется характер проблем, средств и методов познания; возникают разнообразные способы кооперирования труда ученых, работающих в различных науках, обмена знаниями и опытом внутри научных коллективов; изменяются связи науки с производством и с другими областями общественной деятельности людей; быстро возрастает количество научных



публикаций, требующих изучения, анализа и т. д. Всё это ведет к существенным изменениям в характере познавательной деятельности исследователей. При решении многих проблем приходится использовать самые различные, нередко новые методы и средства познания, большой объём знаний. Совершенно необходимым становится строгий контроль исследователя за своими познавательными действиями, согласование результатов, получаемых при помощи различных методов познания, особенно в физике, биологии и медицине. Учёный не может ограничиться только собственным опытом или интуицией. Он по необходимости обращается в таких случаях к теории познания, в особенности к той её части, которая специально изучает познавательную деятельность учёных, – к методологии науки. Поэтому логико-методологические исследования превращаются во всё более важную отрасль разделения труда в науке.

Изменения в познавательной деятельности учёных становятся вместе с тем одним из важнейших источников и стимулов прогресса науки. Они связаны, прежде всего, с разработкой новых, преобразующих науку методов и средств познания. Их открывают, разрабатывают и обосновывают сами учёные, в чём проявляются их подготовленность, творческие дарования, мастерство. Можно, конечно, говорить о той или иной степени случайности в так называемых эмпирических открытиях. Но методы и средства познания исследователи ищут, открывают и обосновывают целенаправленно. Исходным пунктом таких достижений чаще всего бывает критическое изучение самой познавательной деятельности, методов и средств, используемых в научном исследовании.

От такого изучения во многом зависит прогнозирование развития науки, становящееся всё более необходимым условием научно-технического прогресса. Сейчас ещё не существует какой-либо теории, исходя из которой можно было бы достаточно строго предвидеть перспективы развития науки. Поэтому большое значение имеют прогнозы, основанные на знаниях, опыте и интуиции самих исследователей [1].

Физиологический подход в анализе и моделировании биообъектов эффективен для исследования процессов функционирования органов и систем человека.

Типичными объектами таких исследований физиологические ритмы, биосистемы, функционирующие в условиях технического окружения: биотехнические системы, а также защита физиологических функций организма от внешнего воздействия. Физиологические ритмы составляют основу жизни. Одни ритмы поддерживаются в течение всей жизни, и даже кратковременное их прерывание приводит к смерти. Другие появляются в определенные периоды жизни индивидуума, причем часть из них находится под контролем сознания, а часть протекает независимо от него. Ритмические процессы взаимодействуют друг с другом и с внешней средой. Изменение ритмов, выходящее за пределы нормы, либо появление их там, где они раньше не обнаруживались, связано с болезнью. Понимание механизмов физиологических ритмов требует объединения математического и физиологического подходов. Особенно уместным является использование методов из раздела математики, называемого нелинейной динамикой. Основы нелинейной динамики были заложены Пуанкаре в конце девятнадцатого века, но за последние десятилетия они получили значительное развитие. К сожалению, основные понятия нелинейной динамики обычно представляются в форме, доступной хорошо подготовленному математику, но затруднительной для физиолога-практика [2].

Еще одна относительно самостоятельная отрасль исследований – физико-математическое моделирование функционирования наиболее жизненно важных органов и систем, например, сердечно-сосудистой системы и органов дыхания. Рассмотрим принципы моделирования на примере задач первого типа.



В теории физиологических ритмов, базирующейся на общей теории синхронизации автоколебаний и автоволн, используется математический аппарат бифуркации аттракторов (странных аттракторов) в динамических системах, а также аппарат описания волновых процессов в активных средах. Странный аттрактор – это аттрактор, имеющий два существенных отличия от обычного аттрактора: траектория такого аттрактора неперiodическая (она не замыкается) и режим функционирования неустойчив (малые отклонения от режима нарастают). Основным критерием хаотичности аттрактора является экспоненциальное нарастание во времени малых возмущений. Следствием этого является «перемешивание» в системе, неперiodичность во времени любой из координат системы, сплошной спектр мощности и убывающая во времени автокорреляционная функция. Аналитический аппарат использует достаточно несложные обыкновенные дифференциальные и разностные уравнения; в принципе разработаны и варианты программной реализации для получения численных значений. При моделировании и анализе используются известные понятия теории колебаний: стационарные состояния, предельные циклы, фазовая плоскость, хаос, шум, мягкий и жесткий режимы автогенерации, волновые процессы в возбудимых средах, фазовые сдвиги и др. Таким образом, речь идет о приложении аппарата нелинейной динамики к физиологии.

Как было уже сказано, основу любого жизненного цикла составляют физиологические ритмы; таким образом, биологическая ритмология органично вписывается в активно развиваемую в самые последние годы всеобщую теорию циклов. Считается экспериментально установленной зависимость характеристик индивидуальных биообъектов, популяций и сообществ не только от жизненного или эволюционного времени, но и от значений совокупных внешних и внутренних факторов; то есть это есть процессы полициклические. Однако на их фоне можно выделить группы одинаковых по величине циклов, то есть периодов. Давно известны периоды в различных областях естествознания; наиболее известный и значимый – периодический закон Д. И. Менделеева. Очевидно, можно говорить и о существовании общебиологического периодического закона, компонентом которого является и экологический периодический закон.

Данный закон звучит следующим образом. Средние значения различных характеристик индивидуумов, популяций и сообществ авто- или гетеротрофов ( $\log y$ ) находятся в функциональной периодической зависимости ( $f_p$ ) от значений различных факторов ( $x_i$ ), включая факторы внешней среды, собственные (внутренние) для биосистемы факторы и фактор физического времени ( $\overline{\log y(x_i)} = f_p(x_i)$ ), которые действуют на данную биосистему совместно и через посредство периодических зависимостей определяют значения характеристик показателей популяций и сообществ ( $\log y_{jt}$ ) в данном месте ( $j$ ) и в данное время ( $t$ ), как среднее арифметическое от результата действия каждого фактора из всех ( $n$ ) важнейших учитываемых:

$$\log y_{jt} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overline{\log y(x_{ijt})}. \quad (1)$$

Объединяя аналогичную биологической закономерности (1) химическую закономерность с законом Д. И. Менделеева, с закономерностью периодической зависимости концентраций химических соединений от значения времени в реакции Белоусова-Жаботинского и с рядом других отмеченных закономерностей, можно (алгоритмически) допустить вероятность более общего общехимического закона, аналогичного общебиологическому.

Вышеприведенные рассуждения призваны показать, что физиологические ритмы суть опосредованные через структурную организацию биообъекта более общие



ритмы, циклы и периоды, характерные для химических, биологических и физических процессов, совокупность действия которых и регулирует процессы метаболизма, гомеостаза, физиологического цикла в целом.

Сказанное является методологическим обоснованием применимости для анализа и моделирования физиологических ритмов методов, используемых, например, в физике колебаний.

Физиологические величины являются функциями времени, поэтому математически они характеризуются понятиями: стационарное состояние, колебание, хаос, шум. Как отмечено в, «классическим» подходом к началу изучения физиологических ритмов является исследование процессов гомеостаза [3]. Гомеостаз – это относительное постоянство факторов внутренней среды, таких как содержание сахара, газов и электролитов в крови, осмотическое давление, кровяное давление и  $pH$ . Физиологическое понятие гомеостаза может быть связано с понятием стационарных состояний в математике. Стационарные состояния соответствуют постоянным решениям математического уравнения. Выяснение механизмов, удерживающих изменения переменных в узких пределах, является важной областью физиологических исследований.

От гомеостаза можно сделать переход к математической модели биологических осцилляторов – основному виду модели генерации физиологических ритмов; как правило, это хорошо известная из общеприродной теории генерации колебаний релаксационная модель. Соответственно, она и описывается методами теории колебаний и автогенерации. Более сложный подход в случае возмущения физиологических ритмов, то есть их «сбой» из-за внутренних и внешних взаимодействий.

Второй существенный момент – моделирование пространственных колебаний. Дело в том, что обычно колебания распространяются упорядочено от пейсмекерной ткани (работа сердца, например), однако возможен вариант «не обнаружения» простого варианта распространения волн. Здесь мы возвращаемся к исследованию реакции Белоусова - Жаботинского. Одно из свойств этой реакции есть то, что в число химических реагентов входит индикатор восстановленности-окисленности среды ферроин, изменяющий цвет в ходе реакции, что позволяет отслеживать собственно динамику протекания последней, в том числе и исследовать трехмерные возбудимые среды. То есть эта реакция дает представление о сущности пространственной организации в биоткани.

Математические модели для временной оценки поведения физиологических систем записываются в виде дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2)$$

дающих экспоненциальное решение: экспоненциальный рост и спад:  $1 - e^{-\alpha t}$  при  $\alpha < 0$  и  $e^{-\alpha t}$  при  $\alpha > 0$ , соответственно.

Однако аналитическое решение, характерное для уравнений типа (2), обычно невозможно для нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих реальные биологические системы, причем эти уравнения в любом случае являются неадекватными и их численное решение дает приближение не выше 1-го порядка. При этом стационарное состояние физиологической системы отражается решением уравнения (2) при  $f(x) \equiv 0$ .

Математический аппарат, описывающий колебания в форме устойчивых предельных циклов, то есть базирующийся на решениях Пуанкаре для дифференциальных уравнений с двумя переменными, используется при исследовании биологических автоколебаний, восстанавливающихся (к стационарным) после возмущения колебательной физиологической системы [4]. Здесь используются понятия предельного цикла и фазо-





вой плоскости, то есть речь идет о локальной устойчивости, бифуркации и структурной устойчивости. Далее следует хаос, то есть состояние системы, характеризующееся следующими особенностями: а) для определенных значений параметров большинство начальных условий приводят к апериодичности; б) динамика системы значительно «расходится» даже для максимально близких друг к другу начальных условий.

Математически хаос (графики процессов которого имеют колоколообразный вид) описывается квадратичными функциями и предложенными еще Лоренцем дифференциальными уравнениями, моделирующими атмосферные процессы.

Модели генерации физиологических ритмов подразделяются на пейсмекерные и центрального типа; последние используют два основных механизма: взаимное ингибирование и последовательное ингибирование. Важную роль во всех названных моделях играет отрицательная обратная связь.

Собственно пейсмекерные колебания могут задаваться одиночной или резонансно связанной группой клеток. Следствием воздействия пейсмекеров является сердечная ритмика, колебательные процессы мышц, нейронов, гормональных систем и пр. Классическим методом анализа пейсмекеров является математическая модель Ходжкина-Хаксли (1952 г.).

В моделях центрального типа исследуется ритм, задаваемый центральной нервной системой и поддерживаемый в организме индифферентно к иным возбуждениям (сенсорные, рефлекторные периферические). Конкретный вид модели определяется типом базового ингибирования (взаимного угнетения двух основных групп нейронов) и учетом отрицательной обратной связи. В последнем случае одной из первых моделей была модель для дыхания Чейна-Стокса, при котором наблюдаются чередующееся увеличение и уменьшение легочной вентиляции.

Важным вопросом в физиологической ритмологии является исследование (на математических моделях) условий возникновения и исчезновения биоритмов, то есть речь идет о моделях начала и окончания генерации (автогенерации) колебаний; отсюда и понятия, хорошо известные в теории колебаний [5].

Разработанным (перенесенным из прикладных дисциплин) является механизм моделирования возмущения биологических осцилляторов одиночным стимулом – дыхательные и сердечные ритмы. Это, в основе своей, релаксационные модели описания фазовых сдвигов в автоколебательных системах. То же самое относится и к периодической стимуляции биологических осцилляторов: захват частоты и фазы в генераторе (в биопроцессе – захват частоты и фазы спонтанного ритма стимулирующим воздействием). Речь идет о использовании математического аппарата вынужденных нелинейных колебаний Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка, хорошо известный в ряде технических дисциплин: радиотехника, теория автоматического регулирования и др.

Базовым для моделирования периодической стимуляции является дифференциальное уравнение второго порядка с гармоническим вынуждающим членом Ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \varepsilon(1 - u^2) \frac{du}{dt} + u = B \cos(\nu t). \quad (3)$$

Введение в (3) правого члена означает переход от устойчивых автоколебаний к появлению захвата фазы осциллятора Ван-дер-Поля. Таким образом, колебательной системе навязываются вынужденные нелинейные колебания. Решением уравнения (3) занимались Ван-дер-Поль, Пуанкаре, Арнольд и другие известные математики первой половины XX века.



С использованием модели захвата фазы ритмов в физиологии человека моделируются дыхательная синусовая аритмия, аритмия сна и др. процессы, важные с точки зрения как теоретической, так и клинической медицины.

## Ссылки на источники

1. Кулаков Ю. Н., Рыманенко А. Г. Исследование систем управления. М.: СГУ, 1999. – 39 с.
2. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 248 с.
3. Там же.
4. Там же.
5. Новосельцев В. Н. Организм в мире техники: Кибернетический аспект. – М.: Наука, 1989. – 240 с.

### **Yashin Sergey,**

*PhD, associate professor of "Economics and Finance" Tula branch of the Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of the Russian Federation, Tula*

[yashin.s@mail.ru](mailto:yashin.s@mail.ru)

### **Samartsev Igor,**

*candidate of geological-mineralogical sciences, associate professor of "Economics and Finance" Tula branch of the Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of the Russian Federation, Tula*

[samarit19@rambler.ru](mailto:samarit19@rambler.ru)

## **Questions of mathematical modeling the functioning of organs and systems of human**

**Abstract.** Physiological rhythms are the basis of life. Rhythmic processes interact with each other and with the environment. To understand the mechanisms of physiological rhythms and the functioning of the most vital organs and systems of man particularly relevant is the use of nonlinear dynamics.

**Keywords:** physiological rhythms, nonlinear dynamics, vibration theory, biological rhythmology, homeostasis.

