ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Васюнина О. Б., Самуйлова С. В., Самуйлов С. В. Некоторые методические аспекты подготовки школьников к ЕГЭ по математике // Концепт. – 2016. – № 01 (январь). – ART 16020. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16020.htm. – ISSN 2304-120X.

ART 16020 **УДК 372.851**

Васюнина Ольга Борисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет», г. Пенза
jcolga@mail.ru

Самуйлова Светлана Валентиновна,
кандидат технических наук, доцент кафедры «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет», г. Пенза
swetlanaval@gmail.com

Самуйлов Сергей Владимирович,
кандидат технических наук, доцент кафедры «Информатика, математика и общегуманитарные науки» ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» (Пензенский филиал), г. Пенза
sws_p@mail.ru

Некоторые методические аспекты подготовки школьников к ЕГЭ по математике

***Аннотация**. Статья посвящена некоторым вопросам подготовки школьников к ЕГЭ по математике. Определены наиболее важные моменты, на которые необходимо обратить внимание учащегося при решении задач повышенной сложности, содержащих параметры. Отмечается важность обучения методам решения задач такого типа для формирования логики мышления учащегося.*
***Ключевые слова**: подготовка к ЕГЭ, задачи с параметрами, аналитический и графический подход.*
***Раздел:** (01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Серьезной проблемой для любого вуза является набор студентов, имеющих достаточный уровень базовой школьной подготовки. Вузы заинтересованы в том, чтобы поступающие к ним абитуриенты как минимум были грамотными и умели логически мыслить. К сожалению, уровень подготовки подавляющего большинства учащихся не соответствует этим требованиям. В случае поступления в вуз такой абитуриент в дальнейшем испытывает сложности при освоении дисциплин, преподаваемых в данном учебном заведении, что, конечно, отражается на квалификации выпускаемого специалиста. Несформированная логика мышления приводит к тому, что студент не способен осваивать теоретический материал, систематизировать его, делать обобщающие выводы. Отсюда – неумение студентов работать с учебной, а в дальнейшем и со специальной литературой, соответствующей профилю подготовки. Основы такого умения, кстати, тоже закладываются в средней школе.

Современная концепция высшего образования ориентирована на самообразование, то есть предполагает способность студентов к самостоятельному изучению материала. Преподаватель в данном случае выступает в роли консультанта, который помогает разобраться в наиболее сложных вопросах. Таким образом, формирование грамотности и логического мышления у школьника – основа успешной и эффективной подготовки будущих специалистов в вузах.

В настоящее время много говорят о достоинствах и недостатках ЕГЭ, но, так или иначе, он прочно вошел в образовательный процесс как завершающий этап школьного образования. При этом многие задачи, входящие во вторую часть ЕГЭ по математике, как раз и предполагают наличие логического мышления у школьника, а процесс подготовки к экзамену направлен на формирование такого мышления и повышение математической грамотности ученика в целом. Выделим это как один из положительных моментов ЕГЭ. Однако нельзя не отметить, что шансы учащегося справиться на экзамене с задачами повышенной сложности, требующими логического мышления, существенно ограничены временными рамками.

При подготовке школьников к ЕГЭ по математике преподаватель неизбежно сталкивается со следующей проблемой. Так как индивидуальные способности учащихся различны, то существенно отличаются и темпы усвоения ими материала на занятиях. Учащийся, который быстро усваивает предлагаемую ему информацию, может рассматривать более сложные разделы данной темы. Слабый же учащийся к этому моменту усваивает минимальный объем информации. Поэтому в рамках одного занятия приходится ориентироваться на средний уровень подготовки. При этом хорошо подготовленные учащиеся не имеют возможности для углубленного изучения материала в соответствии со своими способностями. Получается, что группа как бы сдерживает рост таких учащихся.

Таким образом, перед преподавателем возникает необходимость индивидуализации обучения. В рамках отведенного для занятия времени эффективно организовать индивидуальное обучение очень трудная задача. Для ее решения в распоряжении преподавателя должны находиться соответствующие учебно-вспомогательные материалы, в частности учебно-методические пособия, электронные учебники и другие средства, в которых материал был бы представлен в доступной форме, рассчитанной на самостоятельное изучение учащимися средней школы [1].

Для формирования логического мышления школьника в процессе подготовки к ЕГЭ особенно полезны, по нашему мнению, задачи с параметрами. Отметим, что этот тип задач принадлежит к числу наиболее сложных как в логическом, так и в техническом плане. Решение задач с параметрами можно считать деятельностью, близкой по своему характеру к исследовательской. Здесь выбор метода, процесс решения, запись ответа предполагают определенный уровень умения анализировать, сравнивать и обобщать полученные результаты. Поэтому, прежде чем приступить к изучению методов решения этих задач, нужно овладеть основными приемами решения различных видов уравнений и неравенств, не содержащих параметры: рациональных, иррациональных, показательных, тригонометрических и других.

Определим основные моменты, к которым нужно привлечь внимание ученика, нацеленного на овладение методами решения задач с параметрами [2]:

1. Существует два основных подхода к решению задач этого типа: аналитический и графический.
2. Выбор того или иного подхода зависит от типа задачи.
3. Чтобы определить алгоритм решения задачи с параметром, необходимо задать себе простой вопрос: как бы решалась эта задача, если бы вместо параметра стояло конкретное число? При этом не следует забывать, что параметр, в действительности являясь числом, может принимать любые значения.
4. Вначале следует попробовать решить задачу при конкретном значении параметра, при этом оценить сложность преобразований и постараться понять закономерность, существующую между значением параметра и результатом. При этом иногда приходится повторять решение несколько раз с разными значениями параметра.

5. В случае, если аналитическое решение оказывается слишком сложным, следует рассмотреть возможность привлечения графических иллюстраций для упрощения решения.

При *аналитическом решении* задачи следует понимать, что любое уравнение с параметром является фактически семейством уравнений, рассматриваемых при фиксированном значении параметра. При разных значениях параметра приходится использовать различные методы, применяемые при решении уравнений и неравенств с постоянными коэффициентами. Поэтому основной принцип аналитического решения задач с параметрами заключается в разбиении области изменения параметра на такие участки, что на каждом из них получается уравнение или неравенство, которое можно решить одним и тем же методом.

На вступительных испытаниях и ЕГЭ по математике чаще всего встречаются два типа задач с параметрами:

– для всех допустимых значений параметра найти множество всех решений уравнения или неравенства;

– найти все значения параметра, при каждом из которых выполняются заданные условия.

Ответы в задачах этих двух типов различаются по существу: в ответах к задачам первого типа перечисляются все возможные значения параметра, для каждого из которых записываются полученные решения; в ответах к задачам второго типа перечисляются все значения параметра, для которых выполнены условия задачи.

Рассмотрим в качестве примера задачи обоих типов, стараясь построить решение так, чтобы его логика была адаптирована для школьника [3].

Задача 1. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие условию

$$a^2 - 9^{x+1} - 8a \cdot 3^x > 0 .$$

Условие задачи можно сформулировать иначе: решить неравенство при любых значениях параметра a.

Решение. Преобразуем заданное неравенство к виду

$$9 \cdot \left(3^x\right)^2 + 8a \cdot 3^x - a^2 < 0$$

и выполним замену переменной $3^x = t$, где $t > 0$. В результате получим квадратное неравенство

$$9t^2 + 8at - a^2 < 0 .$$

Найдем корни трехчлена $t_1 = -a$ и $t_2 = \frac{a}{9}$. Выпишем решение неравенства, которое будет зависеть от взаимного расположения корней t_1 и t_2. Отметим, что парабола, соответствующая квадратному трехчлену, имеет ветви, направленные вверх.

Таким образом, можно выделить следующие случаи.

<u>Случай 1.</u> Если $a > 0$, то $t_2 > t_1 \Rightarrow t \in \left(-a;\ \frac{a}{9}\right)$. Учитывая условие $t > 0$, получим $t \in \left(0;\ \frac{a}{9}\right)$, тогда для исходной переменной будет иметь место неравенство

$$3^x < \frac{a}{9} \Rightarrow 3^x < 3^{\log_3 \frac{a}{9}} \Rightarrow x \in \left(-\infty;\ \log_3 a - 2\right).$$

Случай 2. Если $a<0$, то

$$t_2<t_1 \Rightarrow t\in(0;-a) \Rightarrow 3^x<-a \Rightarrow x\in(-\infty;\log_3(-a)).$$

Случай 3. Если $a=0$, то $t_1=t_2 \Rightarrow t=0 \Rightarrow x\in\varnothing$.

Ответ: $x\in(-\infty;\log_3 a-2)$, если $a>0$;

$x\in(-\infty;\log_3(-a))$, если $a<0$;

$x\in\varnothing$, если $a=0$.

Задача 2. Найдите все значения p, при которых уравнение

$$(p+3)x+|1-x|=1-2p$$

имеет единственное решение.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем.

$$1)\begin{cases}x\le 1,\\(p+3)x+1-x=1-2p;\end{cases}\quad 2)\begin{cases}x>1,\\(p+3)x+x-1=1-2p.\end{cases}$$

Случай 1. Рассмотрим первую систему. После упрощения уравнения получим $(p+2)\cdot x=-2p$. Очевидно, что при $p=-2$ уравнение не имеет решений. Если $p\ne 2$, то

$$\begin{cases}x\le 1,\\x=-\dfrac{2p}{p+2}\end{cases} \Rightarrow -\frac{2p}{p+2}\le 1.$$

Решая неравенство методом интервалов, получим, что при $p\in(-\infty;-2)\cup\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$ первая система имеет решение.

Случай 2. Преобразуем вторую систему:

$$\begin{cases}x>1,\\(p+4)x=2-2p.\end{cases}$$

При $p=-4$ уравнение не имеет решений. При $p\ne -4$ получим

$$\begin{cases}x>1,\\x=\dfrac{2-2p}{p+4}\end{cases} \Rightarrow \frac{2-2p}{p+4}>1$$

Таким образом, при $p\in\left(-4;-\frac{2}{3}\right)$ вторая система имеет решение. На рис. 1 представлены решения обеих систем.

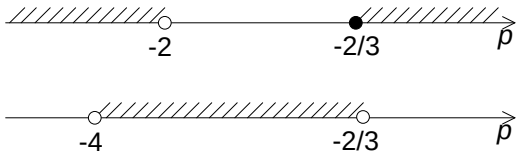

Рис. 1. Решения систем из задачи 2

Очевидно, что заданное уравнение имеет единственное решение при тех значениях параметра p, которые заштрихованы только на одной оси. По рис. 1 легко видеть, что $p \in (-\infty; -4] \cup [-2; +\infty)$. Ответ: $p \in (-\infty; -4] \cup [-2; +\infty)$.

Итак, при изменении параметра меняются функции, входящие в уравнение или неравенство, а в соответствии с этим меняются и различные характеристики этих функций, влияющие на множество решений. Удобным средством для изучения таких изменений, облегчающим анализ и решение задачи, являются те или иные графические интерпретации.

При *графическом решении* задач с параметрами основная сложность заключается в том, чтобы правильно определить тип задачи и выбрать стратегию ее решения. Следует обратить внимание учащихся на то, что существует два основных типа задач, при решении которых графический подход предпочтителен [4]:

– Первый тип задач – это задачи о расположении корней квадратного трехчлена. Аналитическое решение таких задач, связанное с непосредственным нахождением корней, как правило, бывает достаточно сложным. Графическая интерпретация условий, которым должны удовлетворять корни квадратного трехчлена, т. е. изображение расположения соответствующей ему параболы, как известно, приводит к решению достаточно простых неравенств или их систем.

– Другим типом задач с параметрами, графическое решение которых является более наглядным и лаконичным, являются задачи о количестве решений уравнений. Исследуемые при решении таких задач уравнения можно отнести к одному из следующих видов: $f(x)=a$, $f(x)=g(a)$; $f(x,a)=g(x)$, $f(x,a)=g(a)$ или $f(x,a)=g(x,a)$.

Первые два вида уравнений являются, пожалуй, самыми распространенными в задачах о количестве решений.

Приведем примеры каждого из двух типов задач, в которых используется графический подход к решению [5].

Задача 3. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2\left(x^2+x\right)\lg a\right)\cdot \lg\frac{36a-9a^2}{35}=0$$

имеет, по крайней мере, два корня, один из которых неотрицателен, а другой – не больше –1?

Решение. Найдем область допустимых значений для параметра a. При этом решение каждого из неравенств системы изобразим штриховкой на числовой оси (рис. 2).

$$\begin{cases} 22a-4a^2-24 \ge 0, \\ 36a-9a^2 > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

По рис. 2 видно, что $a \in \left[\frac{3}{2};\ 4\right)$.

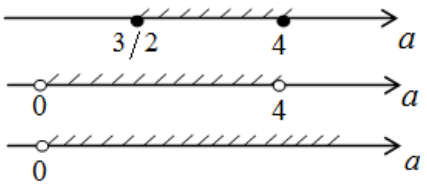

Рис. 2. Область допустимых значений для параметра a

а) При условии, что $\lg\frac{36a-9a^2}{35}=0$, любое x удовлетворяет исходному уравнению, поэтому оно имеет корни, о которых говорится в условии задачи.

$$9a^2-36a+35=0\Rightarrow a_1=\frac{5}{3},a_2=\frac{7}{3},\ a_1,a_2\in\left[\frac{3}{2};4\right);$$

б) при условии, что $(2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2(x^2+x)\lg a=0$, исследуем квадратный трехчлен левой части полученного уравнения:

$$f(x)=(-2\lg a)x^2-2\left(\lg a-\sqrt{22a-4a^2-24}\right)x+a\sqrt{22a-4a^2-24}.$$

Графическая интерпретация расположения корней квадратного трехчлена $f(x)=kx^2+bx+c$ в случае, если корни удовлетворяют условиям $x_1\le A, x_2\ge B$, представлена на рис. 3. По рисунку видно, что заданное расположение корней при $k>0$ обеспечивают условия $\begin{cases}f(A)\le 0\\ f(B)\le 0\end{cases}$, а при $k<0$ – условия $\begin{cases}f(A)\ge 0\\ f(B)\ge 0\end{cases}$.

В нашем случае $k=-2\lg a$, значит, $k<0$ при $a\in\left[\frac{3}{2};4\right)$. По условию задачи корни квадратного трехчлена должны удовлетворять неравенствам $x_1\ge 0, x_2\le -1$. В результате получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases}f(0)\ge 0,\\ f(-1)\ge 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\sqrt{22a-4a^2-24}\ge 0,\\ (a-2)\sqrt{22a-4a^2-24}\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 0,\\ a-2\ge 0\end{cases}$$

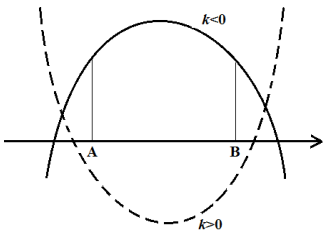

Рис. 3. Графическая интерпретация расположения корней квадратного трехчлена $f(x)=kx^2+bx+c$

Решение последней системы: $a\ge 2$. Учитывая область допустимых значений для параметра, получим $a\in[2;\ 4)$. Объединяя полученные в а) и б) решения, запишем ответ. Ответ: $a\in\left\{\frac{5}{3}\right\}\cup[2;4)$.

Задача 4. При каких значениях параметра a уравнение $\left|3-x\left|x+2\right|\right|=a$ имеет не менее трех решений?

Решение. Построим график функции $y_1(x)=3-x|x+2|$.

При $x \in (-\infty; -2)$ получим часть параболы $y_1(x) = 3 + x^2 + 2x$, у которой $x_в = -1$, $y_в = 2$, $y_1(0) = 3$, $D < 0$.

При $x \in [-2; \infty)$ получим часть параболы $y_1(x) = 3 - x^2 - 2x$, у которой $x_в = -1$, $y_в = 4$, $y_1(0) = 3$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

График $y_1(x) = |3 - x|x + 2||$ получим, отображая относительно оси Ox часть графика $y_1(x)$, расположенную ниже оси Ox. Из рис. 4 следует, что график функции $y_1(x)$ имеет не менее трех точек с семейством прямых $y_2(x) = a$, параллельных оси Ox, при условии, что $a \in [3; 4]$. Ответ: $a \in [3; 4]$.

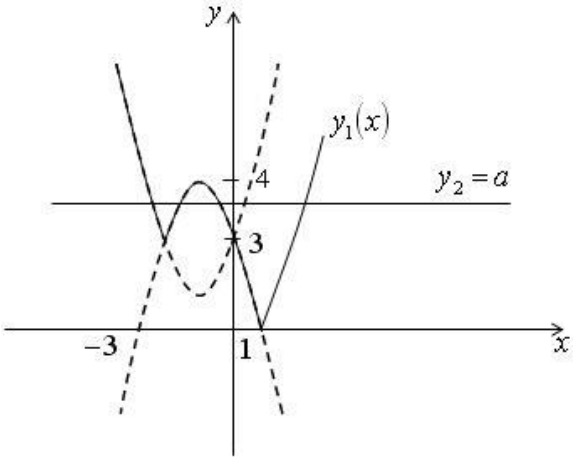

Рис. 4. Графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x) = a$

Таким образом, при изучении методов решения задач с параметрами в рамках подготовки к ЕГЭ следует обратить внимание учащегося на классификацию и основные подходы к решению каждого класса задач. Изучение должно быть организовано по принципу от простого к сложному, и материал должен излагаться максимально доступно для учащихся.

Ссылки на источники

1. Самуйлов С. В., Самуйлова С. В. Использование активных методов обучения в начальной школе // Наука и образование: проблемы и тенденции развития: материалы Междунар. науч.-практ. конф.: в 3 ч. – Уфа, 2013. – С. 223–226.
2. Васюнина О. Б., Самуйлова С. В. Задачи с параметрами на вступительных испытаниях и ЕГЭ по математике: учеб. пособие. – 5-е изд., перераб. и доп. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009.
3. Там же.
4. Васюнина О. Б., Самуйлова С. В. Методика решения некоторых типов задач с параметрами // Университетское образование: XVIII Междунар. науч.-метод. конф., посвящ. 200-летию со дня рождения М. Ю. Лермонтова / под ред. А. Д. Гулякова, Р. М. Печерской. – Пенза, 2014. – С. 552–555.
5. Васюнина О. Б., Самуйлова С. В. Задачи с параметрами на вступительных испытаниях и ЕГЭ по математике.

Olga Vasunina,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor at the chair of Higher and Applied Mathematics, Penza State University, Penza
jcolga@mail.ru
Svetlana Samuylova,
Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor at the chair of Higher and Applied Mathematics, Penza State University, Penza
swetlanaval@gmail.com
Sergey Samuylov,
Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor at the chair of Informatics, Mathematics and Humanities, Financial University under the Government of the Russian Federation, Penza branch, Penza
sws_p@mail.ru

Some methodological aspects of students' training for the Unified State Exam in Mathematics

Abstract. The paper is devoted to some issues of preparing high school students for the Unified State Exam in Mathematics. The authors have defined the most important points to place an emphasis on when solving problems of high complexity, containing parameters. The researchers note the importance of training students to solve such problems in terms of formation of students' logical thinking.

Key words: preparation for the Unified State Exam in Mathematics, problem with parameters, analytical and graphical approach.

References

1. Samujlov, S. V. & Samujlova, S. V. (2013). "Ispol'zovanie aktivnyh metodov obuchenija v nachal'noj shkole", *Nauka i obrazovanie: problemy i tendencii razvitija: materialy Mezhdunar. nauch.-prakt. konf.: v 3 ch*., Ufa, pp. 223–226 (in Russian).
2. Vasjunina, O. B. & Samujlova, S. V. (2009). *Zadachi s parametrami na vstupitel'nyh ispytanijah i EGJe po matematike: ucheb. posobie,* 5-e izd., pererab. i dop., Izd-vo Penz. gos. un-ta, Penza (in Russian).
3. Ibid.
4. Vasjunina, O. B. & Samujlova, S. V. (2014). "Metodika reshenija nekotoryh tipov zadach s parametrami", in Guljakov, A. D. & Pecherskaya, R. M. (eds.). *Universitetskoe obrazovanie: XVIII Mezhdunar. nauch.-metod. konf., posvjashh. 200-letiju so dnja rozhdenija M. Ju. Lermontova,* Penza, pp. 552–555 (in Russian).
5. Vasjunina, O. B. & Samujlova, S. V. (2009). Op. cit.

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	19.01.16	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	20.01.16
Принята к публикации *Accepted for publication*	20.01.16	Опубликована *Published*	28.01.16

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2016
© Васюнина О. Б., Самуйлова С. В., Самуйлов С. В., 2016