

Карасева Римма Борисовна,
кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВПО «Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия», г. Омск
karaseva_rb@mail.ru



Повышение уровня математической компетентности студента при введении в процесс обучения задач исследовательского характера

Аннотация. Обсуждение идей решения задач исследовательского характера повышает профессиональную компетентность будущих инженеров. В статье рассматриваются задачи о преследовании в ограниченной области, которые можно использовать при изучении математики в техническом вузе. При решении задач используются свойства числовых рядов. Рассмотрение подобных задач на практических занятиях математикой облегчит восприятие сложного теоретического материала студентами.

Ключевые слова: прикладные задачи, сходимость рядов, задачи о преследовании, математика, компетентность.

Раздел: (01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).

Признание важности фундаментального образования является традицией математического образования в России. Процесс фундаментализации образования невозможен без его высокого качества. Фундаментализация вузовского математического образования основывается на хороших знаниях студентами предмета, владении приемами исследования поставленных задач, сближении процесса обучения и научной деятельности. Организация научно-исследовательской работы студентов приобретает первостепенное значение в свете реализации стандартов высшего образования последнего поколения. Согласно образовательным стандартам, студент вуза должен овладеть научными методами познания окружающего мира, должен быть склонен к инновационной деятельности, творчеству. Первый этап в достижении этих целей – проявление заинтересованности в изучении теоретических основ дисциплины.

Введение в программу обучения задач исследовательского характера [1] вызывает у студентов интерес к изучению предмета, помогает их самообразованию [2]. Одной из таких задач может быть задача о преследовании: «Лиса убегает от собаки. Скорости лисы и собаки равны. Как должна двигаться лиса, чтобы убежать от преследователя?» В [3] рассмотрена задача о погоне в ограниченной области. Доказано, что существует ломаная, двигаясь по которой лиса сможет убежать от преследователя в круге. Можно показать, что лиса сможет убежать от одной собаки также и в сколь угодно малом секторе. При этом две собаки, двигаясь согласованно, лису поймают. При решении задач используются свойства числовых рядов. Изучение разделов «Ряды», «Числовые ряды» традиционно вызывает большие сложности у студентов. Связано это в первую очередь с тем, что учащиеся не знают, в каких областях могут пригодиться теоретические знания раздела. Введение в процесс изучения задач предлагаемого типа поможет преодолеть психологический барьер, сделает изучение математики захватывающим.

Пусть лиса бежит по ломаной $L_1L_2L_3...L_n...$, расположение звеньев которой показано на рис. 1.

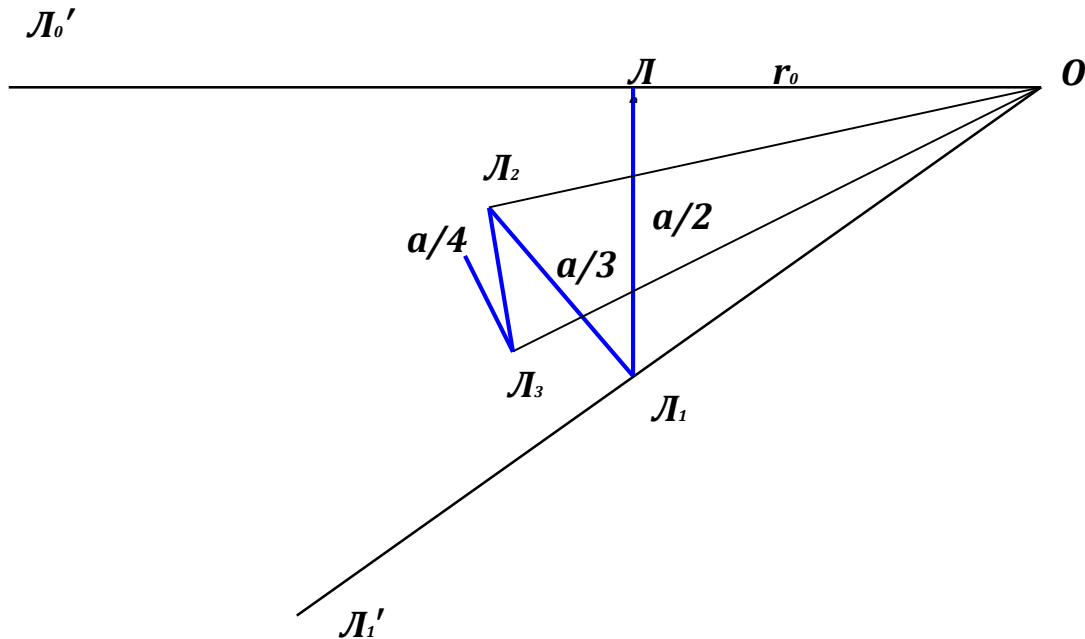


Рис. 1

Пусть длины звеньев ломаной будут $a/2$, $a/3$, $a/4$ и т. д. Расположение точек $L_1L_2L_3...L_n...$ показано на рис. 1. Точка L_2 не выходит за пределы угла L_0OL_1 . Действительно, $L_0L_1 \perp OL_1$. Следовательно, наименьшее расстояние от L_1 до прямой L_0O равно $a/2$. Так как $|L_1L_2| = a/3 < a/2$, то L_2 находится внутри угла L_0OL_1 . Далее получаем, что L_3 находится внутри угла L_2OL_1 , L_n находится внутри угла $L_{n-1}OL_{n-2}$. Все точки $L_2L_3L_4...$ не выходят за пределы угла L_0OL_1 .

В то же время для этих точек выполняется условие: $OL_n < r$. Действительно,

$$OL_n^2 = r_0^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a}{n+1}\right)^2 = r_0^2 + a^2 \cdot K_{n+1} < r_0^2 + a^2 = r^2.$$

Двигаясь по указанной ломаной, лиса избегает погони, не выходя при этом за пределы сектора $L_0'OL_1'$ в круге радиуса r .

Докажем теперь, что лиса спасается внутри сколь угодно малого сектора.

Если теперь вместо числа a взять любое сколь угодно малое число ε и строить ломаную так же, как в предыдущей части, с длинами звеньев $\varepsilon/2$, $\varepsilon/3$, $\varepsilon/4$ и так далее, то ломаная бесконечной длины будет находиться внутри сектора с центральным углом φ : $\operatorname{tg} \varphi = \varepsilon / (2r_0)$.

Уменьшая ε , сектор можно сделать сколь угодно малым, то есть, двигаясь по ломаной, лиса спасается и в сколь угодно малом секторе (см. рис. 2).

Отметим теперь некоторые свойства сумм вида $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots$, где α – любое число.

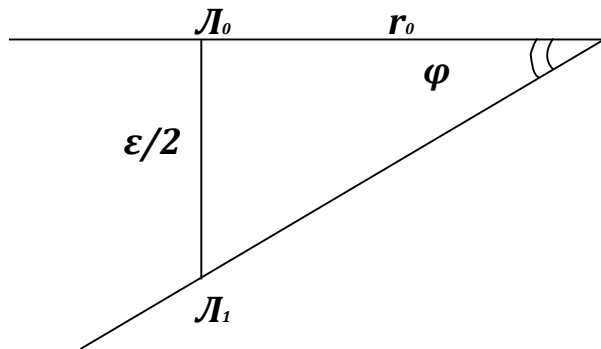


Рис. 2

Если $\alpha < 1$, то верно неравенство $1/n < 1/n^\alpha$ при $n > 1$. Каждое слагаемое суммы $1/2^\alpha + 1/3^\alpha + \dots$ больше слагаемых суммы $L_n = 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$. Так как L_n с ростом n растёт неограниченно, то и сумма $1/2^\alpha + 1/3^\alpha + \dots$ растёт неограниченно ($\alpha < 1$).

Так как ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится, то при $\alpha > 1$ сумма этого ряда остаётся конечной.

Итак, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – конечное число при $\alpha > 1$;

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – растёт неограниченно при $\alpha \leq 1$.

Этот факт даёт возможность строить ломаные с длинами звеньев вида $a/2^\alpha + a/3^\alpha + a/4^\alpha + \dots$ (при различных α). Для такой ломаной длины OL_n^2 вычисляются, как

$$\text{и ранее: } OL_n^2 = r_0^2 + \left(\frac{a}{2^\alpha}\right)^2 + \left(\frac{a}{3^\alpha}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a}{(n+1)^\alpha}\right)^2 + \dots$$

При различных α получаем:

1. Если $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, то длина ломаной растёт неограниченно. Действительно, так

как $\frac{1}{2} < \alpha$, то $2\alpha > 1$. Следовательно, $OL_n^2 = r_0^2 + a^2 \left(\frac{1}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{3^{2\alpha}} + \dots \right)$. При вычисле-

ниях мы использовали то, что $\frac{1}{n^{2\alpha}} < \frac{1}{n^\alpha}$. Отсюда $\frac{1}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{3^{2\alpha}} + \dots < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots < 1$.

Поэтому $OL_n^2 = r_0^2 + a^2$.

Итак, при $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ длина ломаной растёт неограниченно, при этом ломаная из круга не выходит. Значит, лиса спасается, двигаясь по такой ломаной.



Рис. 3

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \quad \alpha \leq \frac{1}{2} < 1$$

2. Если $\alpha \leq \frac{1}{2}$, то, так как $\alpha \leq \frac{1}{2} < 1$, длина ломаной растёт неограниченно, но при этом $2\alpha \leq 1$, т. е. сумма $1/22\alpha + 1/32\alpha + \dots$ также растёт неограниченно, и лиса выходит за пределы круга.

3. Если $\alpha > 1$, то длина ломаной $a/2\alpha + a/3\alpha + \dots$ оказывается конечной, поэтому лиса может двигаться по ней лишь конечное время и, значит, будет поймана.

Заметим, что при $\alpha \leq 1/2$ лиса спасается, двигаясь внутри неограниченного сектора со сколь угодно малым центральным углом (рис. 3).

Покажем теперь, что две собаки лису в круге ловят.

Пусть внутри круга находятся лиса L и две собаки C_1 и C_2 . Собака C_1 находится в произвольной точке, собака C_2 – на прямой, проходящей через L , перпендикулярную прямой C_1L (рис. 4).

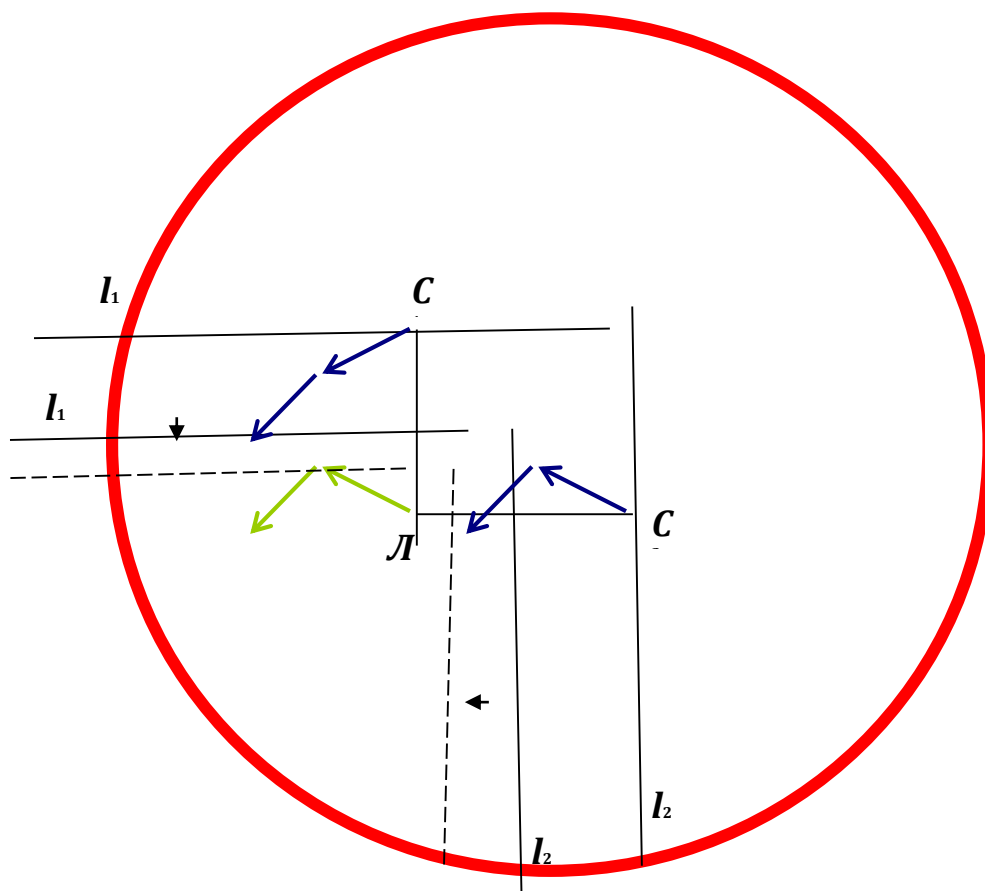


Рис. 4

Считаем, что прямые l'_1, l'_2 параллельны осям Ox, Oy . Лиса не может выйти за пределы участка, ограниченного прямыми l'_1 и l'_2 , проходящими через середины отрезков C_1L и C_2L (перпендикулярно этим отрезкам).

Допустим, что лиса будет двигаться по произвольной ломаной. Для того чтобы собаки смогли поймать лису, они должны действовать согласованно. При этом их перемещения зависят от траектории движения лисы. Собаки должны двигаться так: либо параллельно движению лисы, либо симметрично движению лисы относительно прямой, параллельной одной из осей координат и проходящей через середину отрезка, который соединяет точки C и L (положение собаки и лисы на круге). При этих действиях собаки будут смещать лису к краю круга на некоторые величины a_i и b_i . Рассмотрим движение лисы по звену l_i ломаной L , а также движение собак при этом (рис. 5).

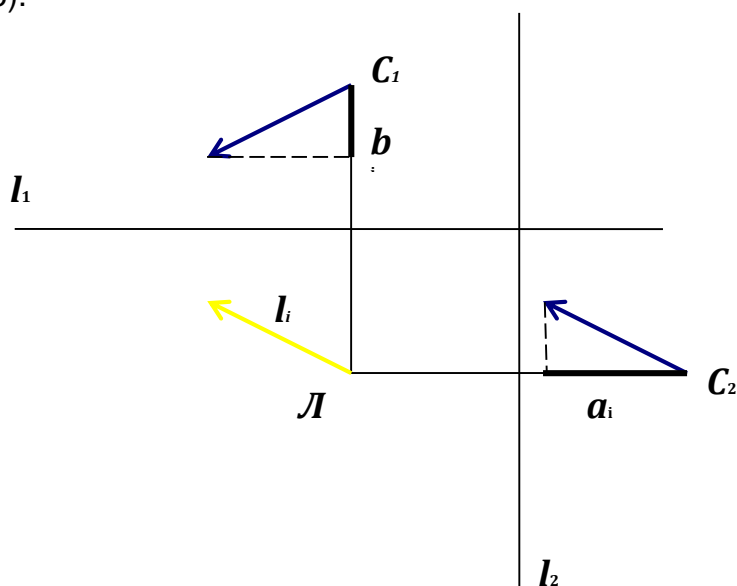


Рис. 5

Таким образом, произошло смещение собак C_1 и C_2 , а значит, и лисы на величины a_i и b_i соответственно. Из рис. 6 понятно, что $l_i < a_i + b_i$:

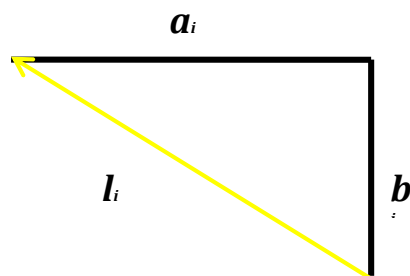


Рис. 6

Просуммируем неравенства для $i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$, получим:
 $l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n + \dots < (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots)$.

Если предположить, что $\sum l_i = \infty$, то из последнего неравенства следует, что или $\sum a_i = \infty$, или $\sum b_i = \infty$, или $\sum a_i + \sum b_i = \infty$. Ни одно из этих равенств не является верным, поскольку обе собаки находятся на конечном расстоянии от границы круга, то есть ломаная, по которой будет двигаться лиса, имеет конечную длину.

Это означает, что, двигаясь описанным способом, собаки будут смещать лису к границе круга и в конце концов ее поймают.

Упражнения по доказательству сходимости и расходимости рядов, используемому в решении, как правило, интересны студентам, выполняются с энтузиазмом, поэтому решения хорошо запоминаются. Можно переформулировать задачу для погони в 3-мерном, а также в n -мерном пространстве. Решение студентами задач исследовательского характера является одним из первых шагов в раскрытии творческого потенциала студента, который вызывает у него интерес к науке [4]. Это поможет разнообразить набор выработанных за время учебы компетенций [5].

Ссылки на источники

1. Карасева Р. Б. Тенденции современного математического образования // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2015. – № 3. – С. 45–47.
2. Карасева Р. Б. Математика в системе образования // Гуманитарные и социально-экономические проблемы развития современного общества: сб. науч. тр. (посвящ. 85-летию СибАДИ); под общ. ред. В. П. Плосконосовой. – Омск, 2015. – С. 123–127.
3. Карасева Р. Б. Применение рядов в задачах о преследовании // Вестник Ишимского государственного педагогического института им. П. П. Ершова. – Ишим, 2013. – № 4(10). – С. 34–37.
4. Карасева Р. Б. Высшее образование и наука // Развитие дорожно-транспортного и строительного комплексов и освоение стратегически важных территорий Сибири и Арктики: вклад науки: материалы междунар. науч.-практ. конф. Кн. 3. – Омск, 2014. – С. 179–181.
5. Карасева Р. Б. Оценка компетенций выпускника вуза // Вестник СибАДИ. – Омск, 2015. – Вып. 1(41). – С. 137–141.

Rimma Karaseva,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, head of the chair of higher mathematics, Siberian State Automobile and Highway Academy, Omsk

karaseva_rb@mail.ru

Increasing the level of student's mathematical competence using research tasks in learning process

Abstract. Discussion of solving research problems enhances the professional competence of future engineers. The paper considers the problem of the prosecution in a limited area that can be used when learning mathematics in technical universities. When solving problems the properties of numerical series are used. Consideration of such problems in practical mathematics helps students to understand complex theoretical material.

Key words: applied problems; convergence of series, the problem of persecution, mathematics, competence.

References

1. Karaseva, R. B. (2015). "Tendencii sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya", *Aktual'nye problemy prepodavaniya matematiki v tehničeskom vuze*, Izd-vo OmGTU, Omsk, № 3, pp. 45–47 (in Russian).
2. Karaseva, R. B. (2015). "Matematika v sisteme obrazovaniya", in Ploskonosova, V. P. (ed.) *Gumanitarnye i social'no-jekonomicheskie problemy razvitiya sovremennogo obshhestva: sb. nauch. tr. (posvjashh. 85-letiju SibADI)*, Omsk, pp. 123–127 (in Russian).
3. Karaseva, R. B. (2013). "Primenenie rjadov v zadachah o presledovanii", *Vestnik Ishimskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo instituta im. P. P. Ershova*, Ishim, № 4(10), pp. 34–37 (in Russian).
4. Karaseva, R. B. (2014). "Vysshee obrazovanie i nauka", *Razvitie dorozhno-transportnogo i stroitel'nogo kompleksov i osvoenie strategicheski vazhnyh territorij Sibiri i Arktiki: vklad nauki: materialy mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* Kн. 3, Omsk, pp. 179–181 (in Russian).
5. Karaseva, R. B. (2015). "Ocenka kompetencij vypusknika vuza", *Vestnik SibADI*, Omsk, vyp. 1(41), pp. 137–141 (in Russian).

Рекомендовано к публикации:

Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
 главным редактором журнала «Концепт»



www.e-koncept.ru

Поступила в редакцию <i>Received</i>	28.01.16	Получена положительная рецензия <i>Received a positive review</i>	30.01.16
Принята к публикации <i>Accepted for publication</i>	30.01.16	Опубликована <i>Published</i>	29.03.16

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2016

© Карасева Р. Б., 2016