ISSN 2304-120X
научно-методический электронный журнал
Ситникова И. В. Прикладная направленность курса математики на экономических специальностях // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 4 (апрель). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16086.htm. – ISSN 2304-120X.

ART 16086 УДК 378.147:372.851

***Ситникова Ирина Викторовна,***
*кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров*
i.sitn@mail.ru

# Прикладная направленность курса математики на экономических специальностях

***Аннотация.*** *Статья посвящена рассмотрению принципа прикладной направленности при изучении математики на экономических специальностях в высших учебных заведениях. С этой целью выявлено, что понимают под прикладной направленностью обучения математике. На примере изучения некоторых разделов курса линейной алгебры показано, как можно реализовать данный принцип на лекционных и семинарских занятиях.*
***Ключевые слова:*** *прикладная направленность, прикладные задачи, математическое моделирование, этапы построения математической модели.*
***Раздел:*** *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Под прикладной направленностью изучения научной дисциплины понимают, как правило, связь обучения с жизнью, теории с практикой. Только в рамках прикладной математики можно продемонстрировать студентам важность математических методов как универсального инструмента, предназначенного для познания мира и для решения задач, в частности экономических.

Прикладной аспект имеет и немалое воспитательное значение, так как повышает культурный уровень учащихся, развивает их интеллект, расширяет кругозор, формирует научное мировоззрение.

Методика прикладной направленности преподавания математики основывается на психолого-педагогическом принципе деятельностного подхода, который не навязывает обучаемым готового решения, а активизирует их поиск способов построения математических моделей и создает мотивы для изучения математики.

Наряду с общими целями математического образования обучение математике на экономических специальностях имеет специальную цель – формирование у учащихся стиля мышления, близкого к прикладному. Данный стиль предполагает формирование умения моделировать реальные процессы, а также выбирать нужный для решения конкретной задачи алгоритм или математический метод.

Важным видом учебной деятельности, в процессе которой студентами усваивается математическая теория, развиваются их творческие способности, формируется математическое мышление, является решение математических задач. Эффективность обучения во многом зависит от их отбора, конструирования и организации.

Прикладные задачи должны стать обязательной частью системы упражнений по каждому изучаемому разделу математики. Включение таких задач в систему упражнений, с одной стороны, показывает, как используется математический аппарат при построении теории в других науках, а с другой стороны, наполняет абстрактную математическую теорию содержанием, связанным со всеми сферами человеческой деятельности. Прикладное содержание упражнений повышает научность обучения и его доступность. С помощью прикладных задач перед учащимися раскрывается практическая значимость математики, универсальность ее методов.

Другим аспектом прикладной направленности является обучение студентов методу математического моделирования, основному методу решения прикладных задач. Для формирования навыков математического моделирования важно владеть общими умениями составлять модели. Для этого необходимо понимать суть математического моделирования, знать его основные этапы, требования к моделям, их общие характеристики.

На начальном этапе изучения курса математики в вузе достаточно, чтобы студенты понимали, из каких этапов состоит процесс математического моделирования и как реализуются эти этапы при решении конкретных прикладных задач.

Из методической литературы известно, что процесс математического моделирования состоит из трех этапов: 1) формализации, перевода предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов (построение математической модели); 2) решение задачи внутри модели; 3) интерпретация полученного результата в рамках исходной задачи (перевод результата на естественный язык задачи).

Предполагается, что выпускники школ уже обладают некоторыми знаниями и навыками в математическом моделировании, например, умеют определить тип задачи и составить уравнение или системы уравнений при решении текстовых задач. Однако этих знаний и умений недостаточно для создания математических моделей при решении прикладных задач в вузе.

Практика показывает, что наибольшие трудности у студентов возникают на первом этапе. В вузе же основное внимание уделяется второму этапу, так как основная масса решаемых на занятиях по математике задач уже представлена в формализованном виде, т. е. сформулирована на математическом языке. Поэтому имеет смысл выделить последовательность основных действий, которые позволяют построить математическую модель. Данная последовательность определяется типом задачи, следовательно, необходимо знакомить учащихся с алгоритмом построения математической модели при разборе каждого нового типа задач.

Студенты экономических специальностей начинают изучение курса математики с раздела «Линейная алгебра». Это довольно формализованный раздел, в котором много аксиоматических определений понятий, трудно усваиваемых учащимися. Для повышения познавательного интереса к изучению дисциплины, облегчения усвоения, а также мотивации учебной деятельности необходимо включать в лекционно-семинарские занятия прикладные задачи, в которых используются рассмотренные теоретические факты. Стоит также отметить, что одной из основных целей данной дисциплины является формирование знаний по линейной алгебре, необходимых для решения задач, возникающих в практической экономической деятельности.

Приведем примеры прикладных задач, которые могут быть решены при изучении некоторых разделов курса «Линейная алгебра», и опишем методику работы с данными задачами.

При изучении темы «Матрицы, действия над матрицами» можно рассмотреть задачи, приводящие к необходимости составления матриц. Это могут быть, например, задачи на составление платежных матриц. Включение таких задач в лекционный материал, а также в семинарские занятия поможет студентам понять, где на практике встречаются рассматриваемые понятия.

*Пример 1*. В конфликтной ситуации участвует две стороны: А – государственная налоговая инспекция, В – налогоплательщик с определенным годовым доходом, налог с которого составляет 5000 у. д. е.

У стороны А возможны два способа поведения: $A_1$ – контролирование дохода налогоплательщика В и взимание с него: налога 5000, если доход заявлен и соответствует действительному; налог в размере 5000 и штраф в размере 2500, если заявленный в декларации доход меньше действительного или в случае сокрытия дохода. Второй способ поведения $A_2$ – не контролировать доход налогоплательщика вовсе.

У стороны В три стратегии поведения: $B_1$ – заявить о действительном доходе; $B_2$ – заявить доход меньше действительного, и, следовательно, налог с заявленного дохода будет меньше и составит 3000 у. д. е.; $B_3$ – скрыть доход, тогда не надо будет платить налог.

Формализовать данную ситуацию [1].

*Решение*

Для формализации ситуации, описанной в задаче, удобно использовать матрицу, элементами которой являются денежные суммы, уплаченные в налоговую инспекцию. Так как результат выигрыша зависит от действий налоговой инспекции (два варианта) и того, какой линии поведения будет придерживаться налогоплательщик (три варианта), то полученная матрица будет иметь размер 2 на 3. Элементы матрицы – это суммы выплат налогоплательщиком, легко просчитываемые в каждой из ситуаций. В результате получаем матрицу, которую назовем матрицей выигрыша игрока А.

$$P = \begin{pmatrix} 5000 & 7500 & 7500 \\ 5000 & 3000 & 0 \end{pmatrix}$$

Данная задача может быть решена на лекции, на практическом занятии по этой теме можно предложить более сложную задачу.

*Пример 2.* Ежемесячно страховая компания страхует 100 объектов фирмы В. Каждый объект страхуется на 1000 руб. Страховщик забирает себе 10% от страховой суммы при заключении контракта. В следующем году страховщик намерен увеличить свой доход путем повышения ставки на 1, 2 и 3%.

Страхующая фирма не намерена увеличивать расходы на страхование, поэтому готова уменьшить количество страхующихся объектов на 5, 10 или 15 штук.

Смоделируйте дальнейшее сотрудничество страховой компании со страхователем, построив матрицу ее выигрышей, определите, при каких условиях оно остается выгодным для страховщика [2].

*Решение*

Для построения матрицы выигрышей страховой компании перечислим возможные действия (стратегии) страховой компании и страхующей свои объекты фирмы В.

У страховой компании три стратегии:

– увеличить ставку на 1% (ставка станет 11%);
– увеличить ставку на 2% (ставка станет 12%);
– увеличить ставку на 3% (ставка станет 13%).

У фирмы-страхователя также три варианта поведения:

– уменьшить количество страхуемых объектов на 5 штук (будет 95);
– уменьшить количество страхуемых объектов на 10 штук (будет 90);
– уменьшить количество страхуемых объектов на 15 штук (будет 85).

Выигрыши страховой фирмы в каждой из описанных ситуаций равны разности первоначальной прибыли и той суммы, которую получает фирма в изменившихся условиях. Первоначальная прибыль составляла 10 000 руб. (1000 руб. × 0,1 × 100 шт.). Покажем для примера, как найти элемент $p_{11}$: $p_{11} = 1000 \times 0{,}11 \times 95 - 10000 = 450$.

Аналогично можно найти все остальные элементы матрицы, которая в итоге будет иметь следующий вид:

$$P=\begin{pmatrix} 450 & -100 & -650 \\ 1400 & 800 & 200 \\ 2350 & 1700 & 1050 \end{pmatrix}$$

Анализ полученной матрицы позволяет сделать вывод, что сотрудничество с фирмой-страхователем остается выгодным для страховой фирмы во всех случаях, кроме двух, когда число страхуемых объектов будет уменьшено на 10 и 15 штук, а ставка фирмы будет увеличена только на 1%.

Рассмотрим примеры задач, в которых требуется не только составить математическую модель, но и решить задачу, а также интерпретировать полученный результат.

*Пример 3.* Предприятие производит три типа продукции, используя четыре вида ресурсов. Норма затрат ресурсов задана матрицей затрат $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Пусть за определенный промежуток времени предприятие выпустило 100 ед. продукции первого типа, 80 ед. продукции второго типа и 110 ед. продукции третьего типа. Стоимость единицы ресурса первого вида составляет 10 у. д. е., для ресурсов второго, третьего и четвертого видов она составляет соответственно 20, 10, 10 у. д. е.

Определить: а) матрицу S – полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени; б) полную стоимость всех затраченных за данный промежуток времени ресурсов [3].

*Решение*

При решении задачи следует обсудить с учащимися, что показывают элементы матрицы A. Так, элементы первой строки показывают, сколько ресурсов данного вида расходуется на производство единицы продукции каждого из трех типов. Аналогично можно интерпретировать каждое из чисел второй, третьей и четвертой строк. Это позволит осознанно найти способ решения, который сводится к умножению матриц. По условию задачи можно составить матрицу X, элементы которой соответствуют количеству произведенной за указанное время продукции. Так как производится три типа продукции, матрица состоит из трех элементов и имеет вид $X=\begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}$. Матрицу полных затрат ресурсов получим, умножив матрицу A на X.

$$S=A\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 960 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix}.$$

Чтобы ответить на второй вопрос, составим матрицу стоимости ресурсов. Так как ресурсов четыре вида, матрица состоит из четырех элементов, обозначим ее P: $P=(10 \quad 20 \quad 10 \quad 10)$. Для подсчета полной стоимости затраченных на производство всей продукции ресурсов умножим матрицу S и P. Получим $S \cdot X = \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix} \cdot (10 \quad 20 \quad 10 \quad 10) = 39900$. Таким образом, полная стоимость затраченных за указанный промежуток времени ресурсов составит 39 900 у. д. е.

Следующая тема, которая изучается в разделе «Линейная алгебра», – это «Системы линейных уравнений и методы их решения». Студенты первого курса знакомы с задачами, решаемыми с помощью модели, приводящей к системе уравнений. В школьном курсе алгебры рассматриваются задачи, решаемые с помощью систем как линейных, так и нелинейных уравнений. Поэтому при разборе прикладных задач на семинарских занятиях необходимо опереться на опыт и знания, полученные в школе. Особенностью решения подобных задач в вузе является решение систем линейных уравнений, содержащих более двух неизвестных. От студента требуется не только составить систему, отражающую задачную ситуацию, но еще и выбрать наиболее простой для решения полученной системы метод.

*Пример 4.* Швейная фабрика в течение трех дней производила костюмы, плащи и куртки. Объемы выпуска продукции и затраты на производство за эти дни заданы в таблице (в у. е.).

| ***День*** | ***Костюмы*** | ***Плащи*** | ***Куртки*** | ***Затраты*** |
|---|---|---|---|---|
| Первый | 50 | 10 | 30 | 176 |
| Второй | 35 | 25 | 20 | 168 |
| Третий | 40 | 20 | 30 | 184 |

Найти себестоимость единицы продукции каждого вида [4].

*Решение*

Первый этап решения задачи, как правило, не вызывает затруднений у учащихся. Введя в качестве неизвестных себестоимость (в у. е.) костюма, плаща и куртки, получаем систему уравнений: $\begin{cases} 50x_1 + 10x_2 + 30x_3 = 176 \\ 35x_1 + 25x_2 + 20x_3 = 168. \\ 40x_1 + 20x_2 + 30x_3 = 184 \end{cases}$

Далее следует обсудить, какой из изученных методов решения СЛУ дает наиболее простое решение. Коэффициенты перед неизвестными и свободные члены таковы, что самое простое решение получится, если применить метод Гаусса. При этом данная система легко сводится к ступенчатой, если первое уравнение поделить на 10. Покажем процесс преобразований расширенной матрицы системы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 3 & 17{,}6 \\ 35 & 25 & 20 & 168 \\ 40 & 20 & 30 & 184 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -7\mathrm{I} \\ -8\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 3 & 17{,}6 \\ 0 & 18 & -1 & 44{,}8 \\ 0 & 12 & 6 & 43{,}2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :6 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 3 & 17{,}6 \\ 0 & 2 & 1 & 7{,}2 \\ 0 & 18 & -1 & 44{,}8 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -9\cdot\mathrm{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 3 & 17{,}6 \\ 0 & 2 & 1 & 7{,}2 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \end{array}\right).$$

Составим систему, соответствующую последней матрице, и обратным ходом Гаусса найдем ее решение.

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ситникова И. В. Прикладная направленность курса математики на экономических специальностях // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 4 (апрель). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16086.htm. – ISSN 2304-120X.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 17{,}6 \\ 2x_2 + x_3 = 7{,}2 \\ -10x_3 = -20 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 1{,}8 \\ x_3 = 2{,}6. \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Так как полученные значения положительны, т. е. являются допустимыми, остается выписать ответ.

Ответ: 1,8 у. е. стоит один костюм, 2,6 у. е. стоит один плащ и 2 у. е. стоит одна куртка.

В рамках программы линейной алгебры при изучении темы «Системы линейных уравнений» предусматривается рассмотрение прикладной задачи, приводящей к модели, называемой моделью Леонтьева многоотраслевой экономики. На лекции подробно разбирается построение модели и решение задачи внутри построенной модели в общем виде. Данная задача хорошо иллюстрирует применение всего изученного ранее теоретического материала. На практике полезно решить задачу с конкретными числовыми данными. В этой задаче важно уделить внимание третьему этапу моделирования – интерпретации полученного результата.

*Пример 5.* Имеются данные о работе системы двух отраслей (промышленности и сельского хозяйства) в прошлом периоде и план выпуска продукции $У_1$ в будущем периоде:

| ***Отрасль*** | ***1*** | ***2*** | ***Валовый продукт*** | ***План $У_1$*** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 80 | 120 | 500 | 350 |
| 2 | 70 | 30 | 300 | 300 |

Найти валовый продукт в плановом периоде, обеспечивающий выпуск продукции $У_1$ [5].

*Решение*

Используя таблицу, найдем элементы матрицы прямых затрат по формуле $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$. Получим: $a_{11} = \frac{80}{500} = 0{,}16$; $a_{12} = \frac{120}{300} = 0{,}4$ : $a_{21} = \frac{70}{500} = 0{,}14$; $a_{22} = \frac{30}{300} = 0{,}1$.

Составим матрицу прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}4 \\ 0{,}14 & 0{,}1 \end{pmatrix}$. Полученная матрица состоит из неотрицательных элементов и удовлетворяет критерию продуктивности: максимум суммы элементов ее столбцов равен 0,5 и не превосходит единицы. Найдем матрицу полных затрат $S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}7}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}14 & 0{,}84 \end{pmatrix}$. Вектор конечного продукта равен $Y_1 = \begin{pmatrix} 350 \\ 300 \end{pmatrix}$. Найдем валовый продукт, обеспечивающий эти значения, по формуле $X = S \cdot Y_1 = \frac{1}{0{,}7}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}14 & 0{,}84 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 350 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 621{,}4 \\ 430 \end{pmatrix}$.

Переведем полученные данные на язык задачи. Для получения требуемого объема продукции необходимо увеличить объем валового продукта в промышленности до 621,4 у. е., а в сельском хозяйстве – до 430 у. е.

В следующем разделе курса «Элементы векторного анализа» традиционно рассматривается прикладная задача линейная модель обмена или модель международной торговли. Это математическая модель экономической задачи, основанная на понятиях собственного вектора и собственного значения матрицы. Разбор данной задачи позволяет наполнить экономическим смыслом достаточно сложное для усвоения понятие собственного вектора.

В процессе решения задачи делается вывод: для сбалансированности торговли требуется, чтобы вектор национальных доходов x был собственным вектором структурной матрицы торговли A, соответствующим собственному значению $\lambda = 1$.

При работе с этой задачей следует обратить внимание на экономический смысл элементов матрицы A: элементы столбцов показывают, какая доля национального дохода страны расходуется на закупку товаров у страны-партнера. Поэтому сумма элементов столбцов матрицы равна 1.

*Пример 6.* Структурная матрица торговли трех стран имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,7 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$. Найти равновесный вектор национальных доходов этих стран, если известно, что суммарный доход стран равен 402 у. д. е. [6]

*Решение*. Находим собственный вектор *x*, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$. Для этого решаем систему $\begin{cases} (0,3-1)x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_3 = 0 \\ 0,4x_1 + (0,5-1)x_2 + 0,7x_3 = 0 \\ 0,3x_1 + 0,1x_2 + (0,1-1)x_3 = 0 \end{cases}$ методом Гаусса.

Общее решение системы имеет вид: $(2x_3; 3x_3; x_3)$. Полученный результат означает, что сбалансированность торговли данных трех стран достигается при соотношении их национальных доходов $x_1 : x_2 : x_3 = 2:3:1$. Учитывая, что суммарный доход стран равен 402 у. д. е., получим, что национальные доходы стран при сбалансированной торговле должны составлять соответственно 134, 201 и 67 у. д. е.

В заключение отметим, что прикладные задачи необходимо включать в систему упражнений при изучении математики и на других специальностях. В большинстве задачников по математике для вузов таких задач нет, поэтому от преподавателя требуется дополнять систему упражнений задачами, показывающими, где могут быть применены полученные на занятиях по математике знания. Источником прикладных задач могут служить специальные сборники практических упражнений для разных специальностей. К сожалению, их не так много, поэтому имеется необходимость в разработке подобных задачников.

## Ссылки на источники

1. Лабскер Л. Г., Ященко Н. А. Теория игр в экономике (практикум с решениями задач): учеб. пособие / под ред. Л. Г. Лабскера. – 3-е изд., перераб. – М.: КНОРУС, 2014. – 264 с.
2. Там же.
3. Кремер Н. Ш., Тришин И. М., Путко Б. А. и др. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 480 с.
4. Кремер Н. Ш., Тришин И. М., Путко Б. А. и др. Практикум по высшей математике для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 480 с.
5. Кремер Н. Ш., Тришин И. М., Путко Б. А. и др. Высшая математика для экономистов.
6. Кремер Н. Ш., Тришин И. М., Путко Б. А. и др. Практикум по высшей математике для экономистов.

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ситникова И. В. Прикладная направленность курса математики на экономических специальностях // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 4 (апрель). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16086.htm. – ISSN 2304-120X.

***Irina Sitnikova,***
*Candidate of Pedagogic Sciences, Associate Professor at the chair of Fundamental Informatics and Applied Mathematics, Vyatka State University, Kirov*
i.sitn@mail.ru

**The applied focus of the course mathematics on economic specialties**

**Abstract.** The paper is devoted to the principle of applied-ness in the study of mathematics on economic specialties in higher educational institutions. To this end, it is revealed what is meant by a focus on practical application of teaching mathematics. On the example of studying some crystals of linear algebra shows how this principle can be implemented on lectures and seminars.

**Key words:** applied orientation, applied task, mathematical-mechanical modeling, stages of construction of mathematical models.

**References**

1. Labsker, L. G. & Jashhenko, N. A. (2014). *Teorija igr v jekonomike (praktikum s reshenijami zadach): ucheb. posobie,* 3-e izd., pererab., KNORUS, Moscow, 264 p. (in Russian).
2. Ibid.
3. Kremer, N. Sh., Trishin, I. M., Putko, B. A. et al. (2010). *Vysshaja matematika dlja jekonomistov,* JuNITI-DANA, Moscow, 480 p. (in Russian).
4. Kremer, N. Sh., Trishin, I. M., Putko, B. A. et al. (2010). *Praktikum po vysshej matematike dlja jekonomistov,* JuNITI-DANA, Moscow, 480 p. (in Russian).
5. Kremer, N. Sh., Trishin, I. M., Putko, B. A. et al. (2010). *Vysshaja matematika dlja jekonomistov.*
6. Kremer, N. Sh., Trishin, I. M., Putko, B. A. et al. (2010). *Praktikum po vysshej matematike dlja jekonomistov.*

***Рекомендовано к публикации:***
*Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,*
*главным редактором журнала «Концепт»*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Поступила в редакцию *Received* | 26.04.16 | Получена положительная рецензия *Received a positive review* | 27.04.16 |
| Принята к публикации *Accepted for publication* | 27.04.16 | Опубликована *Published* | 28.04.16 |

ISSN 2304-120X

www.e-koncept.ru