КОНЦЕПТ
ISSN 2304-120X
научно-методический электронный журнал

Вергазова О. Б. Функционально-графический метод решения задач в реализации дифференцированного подхода к процессу подготовки старшеклассников к Единому государственному экзамену по математике (профильный уровень) // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 5 (май). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16107.htm. – ISSN 2304-120X.

ART 16107 УДК 372.851

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga.aika@yandex.ru

Функционально-графический метод решения задач в реализации дифференцированного подхода к процессу подготовки старшеклассников к Единому государственному экзамену по математике (профильный уровень)

Аннотация. *Проблему повышения уровня математической подготовки абитуриентов технических и математических специальностей следует решать как в процессе изучения школьного уровня алгебры и начал анализа, так и в процессе подготовки к сдаче Единого государственного экзамена по математике (профильный уровень). В данной статье на примере применения функционально-графического метода для решения тригонометрических уравнений и неравенств, предлагаемых в качестве задач повышенного уровня на ЕГЭ по математике профильного уровня, демонстрируется одна из возможностей дифференцированного подхода к подготовке будущего студента-первокурсника технического или математического вуза. На примере решения задач показаны преимущества применения функционально-графического метода решения тригонометрических уравнений и неравенств в формировании и развитии навыка анализа и построения графиков элементарных функций. Содержание статьи представляет интерес для преподавателей вузов, учителей, работающих в старших классах, старшеклассников, желающих поступить в вузы на специальности технического или математического направления.*
Ключевые слова: *подготовка абитуриента математического или технического вуза, дифференцированный подход к подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня, функционально-графический метод.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

В последние годы выпускники школ при изучении школьного курса алгебры и начал анализа, а также в процессе подготовки к сдаче Единого государственного экзамена недостаточно акцентируют свое внимание на применении свойств и графиков элементарных функций, прежде всего тригонометрических, в процессе решения задач. Как результат, студенты-первокурсники в процессе обучения математике в вузе испытывают трудности или допускают ошибки при нахождении области определения функции, определении ее свойств (четность/нечетность, периодичность), при анализе поведения функции на бесконечности, при построении графика, при сравнении чисел вида ln2 и ln3 или cos1 и cos2 с помощью графика. Современные десяти- и одиннадцатиклассники на уроках математики мало применяют или совсем не применяют графический метод решения уравнений. Одна из причин этого – недостаточное использование возможностей функционально-графического метода при изучении темы «Решение тригонометрических уравнений и неравенств», так как авторы основных учебных пособий по математике, такие как А. Г. Мордкович, Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, основное внимание при изучении данной темы уделяют работе с числовой окружностью [1, 2].

Для исправления сложившейся ситуации следует дифференцированно подходить к подготовке старшеклассников, планирующих сдавать Единый государственный экзамен по математике профильного уровня. Школьники, которые планируют поступать в технические вузы или на математические специальности, должны обладать хорошо сформированным и развитым навыком применения функционально-графического метода. В процессе подготовки к Единому государственному экзамену по математике (профильный уровень) указанный навык можно приобрести и совершенствовать в процессе работы над заданиями с развернутым ответом № 13. Согласно кодификатору требований, задание № 13 проверяет умение решать уравнение или неравенство и относится к группе заданий повышенного уровня. Как определяют его методисты, задание № 13 обычно представляет собой относительно несложное уравнение или неравенство с отбором корней или решений соответственно. Такие задания могут содержать тригонометрические функции, логарифмы, степени и корни. В данных задачах обычно нужно методом замены переменной свести тригонометрическое уравнение к квадратному уравнению (часть а) и провести отбор корней, связанный с условием задачи или с ограниченностью новой переменной, наличием выражения с переменной в знаменателе алгебраической дроби, под знаками корней четной степени, логарифмов и т. д. (часть б). В большинстве случаев авторы пособий, изданных в последние годы, в случае тригонометрических уравнений и неравенств рекомендуют обращаться в пункте б) к числовой окружности [3–5]. Но, ограничиваясь применением только числовой окружности, старшеклассник не проводит систематическую работу по формированию и развитию навыка построения графиков тригонометрических функций. Как результат, не вырабатывается и не развивается навык работы с графиками в целом. В дальнейшем первокурсник при изучении математических дисциплин не сможет, мысленно представляя график той или иной функции, быстро и правильно провести анализ более сложных задач. Лишь немногие современные авторы рассматривают в пособиях все три возможных метода решения такого рода задач: 1) метод с применением числовой окружности; 2) аналитический метод; 3) функционально-графический метод. Отметим, в частности, пособие для учителей и старшеклассников авторов А. А. Прокофьева и А. Г. Корянова [6].

Продемонстрируем применение функционально-графического метода на примере решения задачи № 13 Единого государственного экзамена по математике (профильный уровень).

Задача 1. Решите уравнение $\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{cosx}}$=0 [7].

Решение

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos x > 0, \\ x^2 - 5x + 6 = 0. \end{cases}$

Корнями квадратного уравнения являются $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

Как видно из рис. 1, $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ не удовлетворяют условию $\cos x > 0$.

Следовательно, данное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

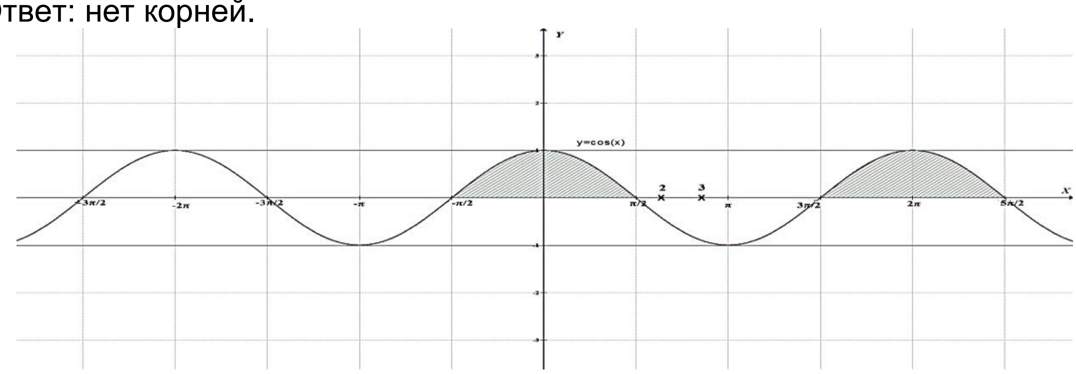

Рис. 1

Задача 2. Решите уравнение $\frac{2sinx-\sqrt{2}}{\sqrt{tgx}} = 0$ [8].

Решение

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} tgx > 0, \\ 2\sin x - \sqrt{2} = 0. \end{cases}$

Решим тригонометрическое уравнение данной системы:

$$sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$x = (-1)^n arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, \text{ где } n\epsilon\boldsymbol{Z}.$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \text{ где } n\epsilon\boldsymbol{Z}.$$

Как видно из рис. 2, с учетом условия $tgx > 0$ корнями данного уравнения являются $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n\epsilon\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n\epsilon\boldsymbol{Z}$.

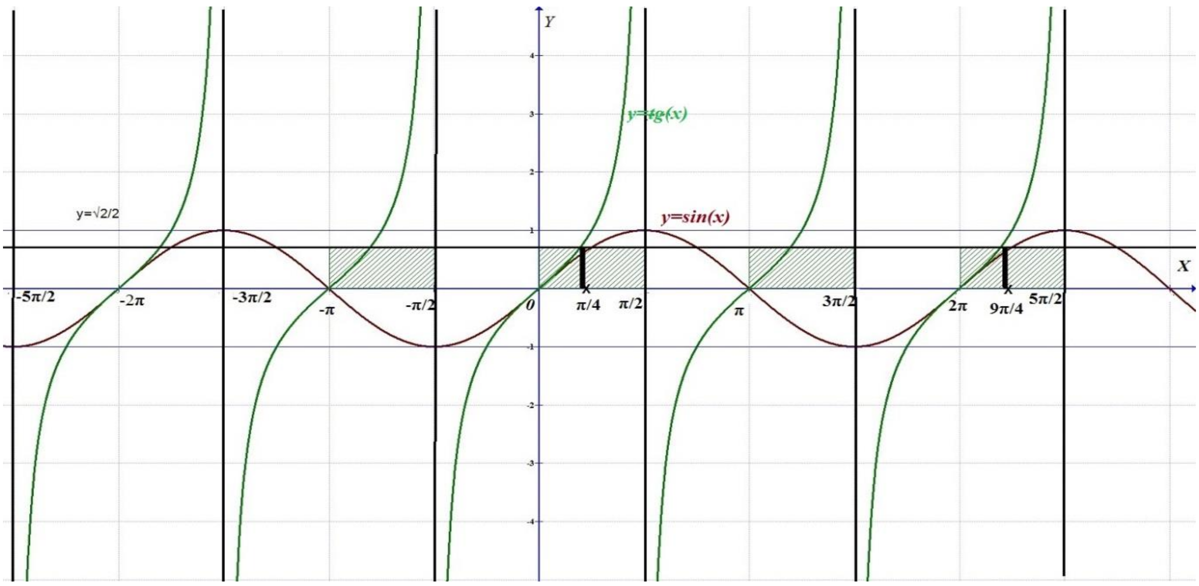

Рис. 2

Задача 3. Решите уравнение $\frac{6sin^2x+7cosx-1}{\sqrt{-sinx}} = 0$.

Решение

Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} 6sin^2x + 7cosx - 1 = 0, \\ -sinx > 0. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение и неравенство системы, получим:

$$\begin{cases} 6(1 - cos^2x) + 7cosx - 1 = 0, \\ sinx < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6cos^2x - 7cosx - 5 = 0, \\ sinx < 0. \end{cases}$$

Выполним замену переменной: $cosx = t$, где $|t| \le 1$.

Найдем корни квадратного уравнения $6t^2 - 7t - 5 = 0$, получим: $t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = \frac{5}{3} > 1$.

Рассмотрим систему условий: $\begin{cases} cosx = -\frac{1}{2}, \\ sinx < 0. \end{cases}$

Решим данную систему графически, получим: $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n\epsilon \boldsymbol{Z}$ (рис. 3).

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n\epsilon \boldsymbol{Z}$.

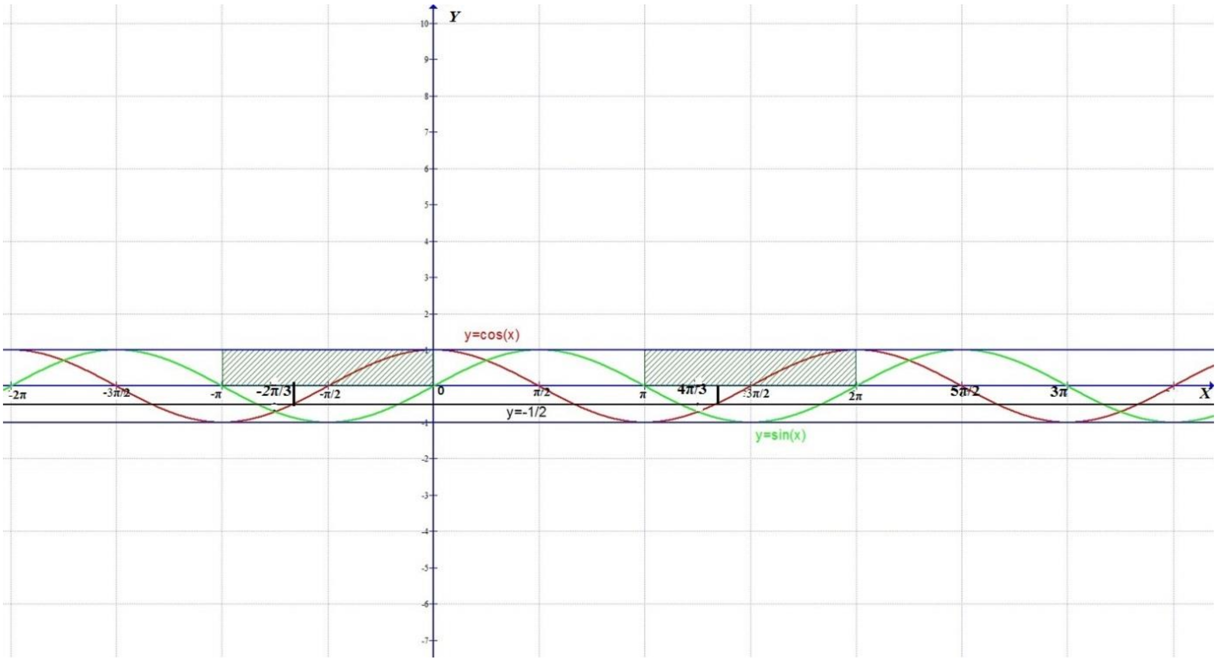

Рис. 3

Задача 4

а) Решите уравнение $4sin^2x - 4cosx - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$ [9].

Решение

а) Запишем уравнение в виде $4(1 - cos^2x) - 4cosx - 1 = 0$.

$$4cos^2x + 4cosx - 3 = 0.$$

Выполним замену переменной: $cosx = t$, где $|t| \leq 1$.

Корнями квадратного уравнения $4t^2 + 4t - 3 = 0$ являются $t_1 = -\frac{3}{2} < -1, t_2 = \frac{1}{2}$.

Значит, $cosx = \frac{1}{2}$.

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \text{ , где } n\epsilon \boldsymbol{Z}.$$

б) Найдем абсциссы точек пересечения графика функции $y = cosx$ и прямой $y = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$ (рис. 4). Получим $-\frac{7\pi}{3}$ и $-\frac{5\pi}{3}$.

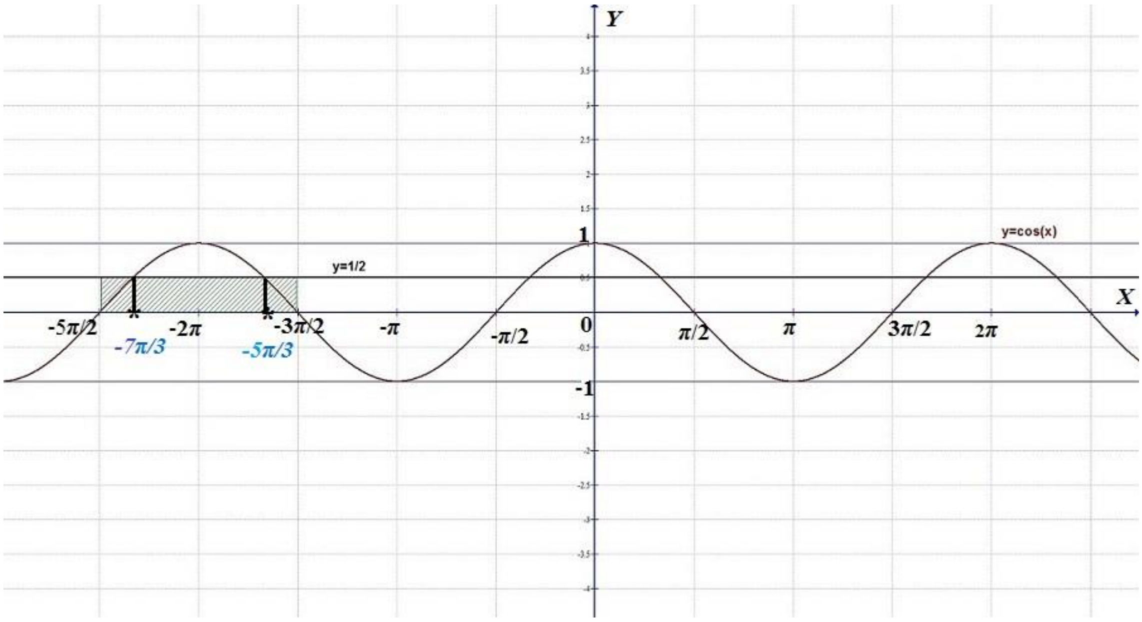

Рис. 4

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n\epsilon\boldsymbol{Z}$;

б) $-\frac{7\pi}{3}$ и $-\frac{5\pi}{3}$ – корни данного уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}\right]$.

При решении рассмотренных выше примеров использовалось схематическое построение графиков простейших тригонометрических функций. Решение в таком случае отвечает важнейшим дидактическим принципам – наглядности и простоты. В отличие от аналитического метода, не требуется проводить много вычислений. Систематическое применение данного метода акцентирует внимание старшеклассника на свойствах функций, изученных в школьном курсе алгебры и начал анализа, развивает и совершенствует навыки чтения и аккуратного построения графиков. При всех своих достоинствах использование числовой окружности не имеет всех перечисленных выше возможностей. Очевидно, владение функционально-графическим методом на отличном уровне необходимо любому студенту-первокурснику при изучении высшей математики, в частности математического анализа.

Ссылки на источники

1. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: учеб. для учащихся общеобразоват. учрежд. (базовый уровень): в 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 399 с.: ил.
2. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва и др.]. – М.: Просвещение, 2014. – 463 с.: ил.
3. Шестаков С. А., Захаров П. И. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С1 / под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 120 с.
4. Ященко И. В. и др. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2015 году. Базовый и профильный уровни. Методические указания / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, А. С. Трепалин. – М.: МЦНМО, 2015. – 288 с.
5. Васильева Е. Н., Ольховая Л. С. Математика. Подготовка к ЕГЭ: секреты оценки заданий повышенного и высокого уровней сложности. Решения и комментарии: учеб.-метод. пособие. – Изд. 2-е, перераб. – Ростов н/Д.: Легион, 2014. – 192 с.
6. Прокофьев А. А., Корянов А. Г. Математика. Подготовка к ЕГЭ. Тригонометрические уравнения: методы решения и отбор корней (типовые задания С1). – Изд. 2-е, доп. – Ростов н/Д.: Легион, 2014. – 144 с.
7. Шестаков С. А., Захаров П. И. Указ. соч. – С. 81.
8. Там же.
9. Васильева Е. Н., Ольховая Л. С. Указ. соч. – С. 98.

Olga Vergazova,
Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical Bauman University, Moscow
olga.aika@yandex.ru

Functional-graphical method of solving problems in the implementation of a differentiated approach to process of training of pupils for the Unified State Exam in mathematics (profile level)

Abstract. The problem of raising the level of mathematical preparation of students of mathematical and technical specialties should be addressed to both the course of school level algebra and analysis, and the preparation to the Unified State Examination in mathematics (profile level). The example of the application of the functional-graphical method for solving trigonometric equations and inequalities in problems of high level on the use math level profile, demonstrates one of the possibilities of differentiated approach in training future first-year student of technical or mathematical University. For example, the decision of tasks demonstrates the advantages of using functional-graphical method for solving trigonometric equations and inequalities in the formation and development of skills of analysis and graphing of elementary functions. The paper is of interest to academicians, high school teachers and students wishing to enter technical or mathematical university.

Key words: preparation of applicant to mathematical or technical University, differentiated approach to preparation for Unified State Examination in mathematics (profile level), functional-graphical method.

References

1. Mordkovich, A. G. (2009). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10–11 klassy: ucheb. dlja uchashhihsja obshheobrazovat. uchrezhd. (bazovyj uroven'): v 2 ch. Ch. 1*, 10-e izd., ster., Mnemozina, Moscow, 399 p.: il. (in Russian).
2. Alimov, Sh. A., Koljagin, Ju. M., Tkachjova, M. V. et al. (2014). *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometrija. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10–11 klassy: ucheb. dlja obshheobrazovat. organizacij: bazovyj i uglubl. urovni,* Prosveshhenie, Moscow, 463 p.: il. (in Russian).
3. Shestakov, S. A., Zaharov, P. I. & Semenov, A. L., Jashhenko, I. V. (eds.) (2011). *EGJe 2011. Matematika. Zadacha S1,* MCNMO, Moscow, 120 p. (in Russian).
4. Jashhenko, I. V. et al. (2015). *Podgotovka k EGJe po matematike v 2015 godu. Bazovyj i profil'nyj urovni. Metodicheskie ukazanija,* MCNMO, Moscow, 288 p. (in Russian).
5. Vasil'eva, E. N. & Ol'hovaja, L. S. (2014). *Matematika. Podgotovka k EGJe: sekrety ocenki zadanij povyshennogo i vysokogo urovnej slozhnosti. Reshenija i kommentarii: ucheb.-metod. posobie*, Izd. 2-e, pererab., Legion, Rostov n/D., 192 p. (in Russian).
6. Prokof'ev, A. A. & Korjanov, A. G. (2014). *Matematika. Podgotovka k EGJe. Trigonometricheskie uravnenija: metody reshenija i otbor kornej (tipovye zadanija S1),* Izd. 2-e, dop., Legion, Rostov n/D., 144 p. (in Russian).
7. Shestakov, S. A., Zaharov, P. I. & Semenov, A. L., Jashhenko, I. V. (eds.) (2011). Op. cit., p. 81.
8. Ibid.
9. Vasil'eva, E. N. & Ol'hovaja, L. S. (2014). Op. cit., p. 98.

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	25.04.16	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	04.05.16
Принята к публикации *Accepted for publication*	04.05.16	Опубликована *Published*	05.05.16

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru