ISSN 2304-120X
Концепт. Научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Косова А. В., Пелевина И. Н. Методика изложения темы «Теория пределов функций» в курсе «Математический анализ» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 5 (май). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16112.htm.

ART 16112 **УДК 378.147:517.1**

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Косова Анна Владимировна,
старший преподаватель ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
anna.v.kosova@mail.ru

Пелевина Ирина Николаевна,
старший преподаватель ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана», г. Москва
pdv62@mail.ru

Методика изложения темы «Теория пределов функций» в курсе «Математический анализ»

Аннотация. *Статья посвящена вопросам преподавания теории пределов в курсе математического анализа и проблемам, которые возникают при изложении учебного материала. Для овладения навыками записи определения предела функции по Коши на языке «$\varepsilon - \delta$» авторами предлагается таблица, в которой рассмотрены все возможные варианты стремления аргумента, расписанные через окрестности и интервалы, и даются определения предела функции для всех рассмотренных в таблице случаев, на примерах задач детально разъясняется содержание и смысл этих базовых определений. В работе также предлагается таблица, в которую сведены неопределенности и в которой указаны способы их устранения. Проиллюстрирована методика вычисления всевозможных пределов на широком спектре задач. Статья может быть интересна и полезна преподавателям для проведения семинарских занятий и студентам первого курса.*
Ключевые слова: *предел функции по Коши, окрестность конечной и бесконечной точек, раскрытие неопределенностей.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

В инженерном образовании построение математических моделей физических и механических процессов играет важнейшую роль, поскольку будущий специалист должен уметь проводить анализ инженерных задач за счет использования математических методов и давать качественную оценку полученного результата. Для этого на первых этапах обучения используется аппарат математического анализа и изучаются его основные понятия.

Для начала отметим, что предел функции – это одно из ключевых понятий математического анализа, оно вводится на первых лекциях и затем постоянно используется в дальнейшем. С помощью определения предела функции по Коши доказывается целый ряд важнейших теорем, как это видно из работ [1–5]. Поэтому студентам необходимо научиться расписывать пределы при различных стремлениях аргумента, уметь оперировать ими и находить значения пределов функции, даже если возникают неопределенности при вычислениях.

1. Теория пределов функций. Трактовка предела функции по Коши

Прежде чем дать определение предела функции по Коши, предлагается ввести понятия окрестностей конечной и бесконечной точек при различном стремлении аргумента. Для удобства восприятия сведём все эти понятия в табл. 1.

Таблица 1

Типы окрестностей

Тип стремления	***Окрестность***
$x \to a$	$\overset{\circ}{U}_\delta(a) = (a-\delta; a) \cup (a; a+\delta) = \{0 < \lvert x-a \rvert < \delta\}$
$x \to a^+ = x \to a+0$ $(x \to a, x > a)$	$\overset{\circ}{U}{}^{+}_\delta(a) = (a; a+\delta) = \{a < x < a+\delta\}$
$x \to a^- = x \to a-0$ $(x \to a, x < a)$	$\overset{\circ}{U}{}^{-}_\delta(a) = (a-\delta; a) = \{a-\delta < x < a\}$
$x \to \infty$	$\overset{\circ}{U}(\infty) = (-\infty; -M) \cup (M; +\infty) = \{\lvert x \rvert > M\}$
$x \to +\infty$	$\overset{\circ}{U}(+\infty) = (M; +\infty) = \{x > M\}$
$x \to -\infty$	$\overset{\circ}{U}(-\infty) = (-\infty; -M) = \{x < -M\}$

Используя результаты табл. 1, наглядно продемонстрируем, как будут выглядеть определения пределов функции $f(x)$ по Коши при различных стремлениях аргумента x.

Определение 1. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ (или для всех $x: 0 < \lvert x-a \rvert < \delta$) выполняется неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$.

Или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)\right) \Rightarrow \left(\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon\right).$$

Определение 2. Число A называется **правым пределом функции** $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}_\delta(a)$ (или для всех $x: a < x < a+\delta$) выполняется неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$.

Или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x\to a+0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}_\delta(a)\right) \Rightarrow \left(\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon\right).$$

Определение 3. Число A называется **левым пределом функции** $f(x)$ в точке $x=a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех $x\in\overset{\mathrm{o}}{U}{}_{\delta}^{-}(a)$ (или для всех $x: a-\delta<x<a$) выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x)=A\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x\in\overset{\mathrm{o}}{U}{}_{\delta}^{-}(a)\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right).$$

Определение 4. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ **в бесконечно удаленной точке** ($x\to\infty$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $M=M(\varepsilon)>0$, что для всех $x\in\overset{\mathrm{o}}{U}(\infty)$ (или для всех $x:|x|>M$) выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x)=A\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\ M=M(\varepsilon)>0:\forall x\in\overset{\mathrm{o}}{U}(\infty)\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right).$$

Определение 5. Число A называется **правым пределом функции** $f(x)$ **в бесконечно удаленной точке** ($x\to+\infty$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $M=M(\varepsilon)>0$, что для всех $x\in\overset{\mathrm{o}}{U}(+\infty)$ (или для всех $x:x>M$) выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\ M=M(\varepsilon)>0:\forall x\in\overset{\mathrm{o}}{U}(+\infty)\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right).$$

Определение 6. Число A называется **левым пределом функции** $f(x)$ **в бесконечно удаленной точке** ($x\to-\infty$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $M=M(\varepsilon)>0$, что для всех $x\in\overset{\mathrm{o}}{U}(-\infty)$ (или для всех $x:x<-M$) выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=A\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\ M=M(\varepsilon)>0:\forall x\in\overset{\mathrm{o}}{U}(-\infty)\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right).$$

А теперь рассмотрим определения предела функции по Коши другого вида, а именно: когда функция имеет различные стремления.

Определение 7. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, если для сколь угодно большого числа $K>0$ найдется такое $\delta=\delta(K)>0$, что для всех $x\in\overset{\mathrm{o}}{U}_{\delta}(a)$ выполняется неравенство $\left|f(x)\right|>K$.

Или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)=\infty\right)\Leftrightarrow\left(\forall K>0\ \exists\ \delta=\delta(K)>0:\forall x\in\overset{o}{U}_{\delta}(a)\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)\right|>K\right).$$

Определение 8

$$\left(\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty\right)\Leftrightarrow\left(\forall K>0\ \exists\ \delta=\delta(K)>0:\ \forall x\in\overset{o}{U}{}^{+}_{\delta}(a)\right)\Rightarrow\left(f(x)<-K\right).$$

Определение 9

$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x)=+\infty\right)\Leftrightarrow\left(\forall K>0\ \exists\ \delta=\delta(K)>0:\ \forall x\in\overset{o}{U}{}^{-}_{\delta}(a)\right)\Rightarrow\left(f(x)>K\right).$$

Определение 10

$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\right)\Leftrightarrow\left(\forall K>0\ \exists\ M=M(K)>0:\forall x\in\overset{o}{U}(\infty)\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)\right|>K\right).$$

Определение 11

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\right)\Leftrightarrow\left(\forall K>0\ \exists\ M=M(K)>0:\forall x\in\overset{o}{U}(+\infty)\right)\Rightarrow\left(f(x)<-K\right).$$

Пределы 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11 называются односторонними.

Рассмотрим ниже примеры задач, которые позволят более детально разъяснить студентам содержание и смысл базовых определений 1–11.

Задача 1. Доказать по определению: $\lim\limits_{x\to1}(2x+1)=3$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем $\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\left|2x+1-3\right|<\varepsilon\ \Leftrightarrow$ $2\left|x-1\right|<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ \left|x-1\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}=\delta(\varepsilon)$. Таким образом для $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ такое, что для $\forall x:\left|x-1\right|<\delta$ выполняется неравенство $\left|2x+1-3\right|<\varepsilon$. Например для $\varepsilon=0{,}1$ $\exists\ \delta=0{,}05$.

Задача 2. Доказать по определению: $\lim\limits_{x\to3+0}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем $\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}-6\right|<\varepsilon\ \Leftrightarrow$ $\left|x+3-6\right|<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ \left|x-3\right|<\varepsilon=\delta(\varepsilon)$. Таким образом для $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)=\varepsilon>0$ такое, что для $\forall x:3<x<3+\delta$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}-6\right|<\varepsilon$.

Задача 3. Доказать по определению: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $M = M(\varepsilon) > 0: \left|\frac{2x+1}{3x} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\left|\frac{2x+1-2x}{3x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3|x|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{3\varepsilon} = M(\varepsilon)$. Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $M = \frac{1}{3\varepsilon} > 0$ такое, что для $\forall x: |x| > M$ выполняется неравенство $\left|\frac{2x+1}{3x} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$.

Приведём теоремы, которые послужат теоретическим обоснованием при решении задач.

Теорема 1 (о единственности предела). Если предел функции в точке существует, то он единственен.

Определение 12. Функция $y = f(x)$ называется **локально ограниченной**, если она ограничена при $x \to a$: существует такое $c > 0$ и такая $\overset{\circ}{U}(a)$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| \le c$.

Пример 1. Функция $y = x^2 + 2$ локально ограничена при $x \to 0$.

Теорема 2 (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел). Если функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке $x = a$, то она локально ограничена.

Теорема 3 (о пределе промежуточной функции). Если существуют конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, конечный $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ и такая $\overset{\circ}{U}(a)$, что для любых $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) \le h(x) \le g(x)$, то существует конечный $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.

Теорема 4 (арифметические операции с функциями, имеющими конечные пределы). Если существуют конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и конечный $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то:

1) существует конечный $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$;
2) существует конечный $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$;
3) существует конечный $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \ne 0$.

Теорема 5 (о замене переменной в пределе или о пределе сложной функции). Если функция $y = f(x)$ имеет в точке a конечный предел b и не принимает значение b в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a, а функция $g(y)$ имеет в точке b конечный предел c, то сложная функция $g\left(f(x)\right)$ имеет предел в точке a и он равен c.

Ахметова Ф. Х., Косова А. В., Пелевина И. Н. Методика изложения темы «Теория пределов функций» в курсе «Математический анализ» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 5 (май). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16112.htm.

Студентам необходимо на примере разъяснить смысл этой теоремы. Поскольку предел функции – это число, то, делая замену переменной, нет необходимости возвращаться к прежней переменной.

Задача 4. Вычислим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}=\left|\begin{array}{l}\textit{замена}:\\ 1+x=y^k\\ x\to 0\Rightarrow y\to 1\end{array}\right|=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^k-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)\left(y^{k-1}+y^{k-2}+\ldots+y+1\right)}=$$

$$\left|\textit{причем}\quad y\neq 1\quad \textit{для}\quad \forall x\in \overset{o}{U}(0)\right|=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^{k-1}+y^{k-2}+\ldots+y+1}=\frac{1}{k}.$$

Если точка $x=a$ принадлежит области определения элементарной функции $f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Задача 5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin 3x=\sin\left(3\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)=1$.

2. Основные способы вычисления пределов, содержащих неопределенности

Решение любой задачи на вычисление предела функции подчиняется определенному алгоритму, а именно:

1. Подставить в выражение предельное значение аргумента.
2. Определить, есть или нет неопределенность. Если нет, дать ответ.
3. Если неопределенность есть, то по ее виду выбрать одно из правил устранения этой неопределенности.
4. Преобразовать выражение согласно выбранному правилу и к новой форме предела применить данный алгоритм, начиная с п. 1.

Многолетняя практика преподавания этой темы показывает, что основные методы вычисления пределов лучше структурировать в виде табл. 2. Это существенно поможет восприятию неопределенностей, способов их устранения и облегчит усвоение студентами приемов вычисления пределов функций.

Таблица 2

Типы неопределенностей и правила их раскрытия

Тип неопределенности	***Правило раскрытия***
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$	Необходимо в числителе и в знаменателе «главное» слагаемое (растущее быстрее всех) вынести за скобки; если слагаемое выбрано верно, то предел скобки равен константе, не равной нулю
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$	В числителе и в знаменателе необходимо выделить «критический» множитель вида (x-a), на который затем дробь сократить; если неопределенность сохраняется, действия повторить
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=[\infty-\infty]$	Необходимо разность свести к дроби; при этом тип неопределенности поменяется либо неопределенности не будет вовсе

Проиллюстрируем правила раскрытия неопределенностей, рассмотренных в табл. 2, на примерах задач.

Задача 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{x^3+3x^2+3x+1}$.

При подстановке $x=-1$ в числитель и знаменатель получаем $\left[\frac{0}{0}\right]$. Это значит, что в числителе и в знаменателе есть общий множитель $(x+1)$. Разложим на множители многочлены числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{x^3+3x^2+3x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2(x^2-2)}{(x+1)^3}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2}{x+1}=\frac{-1}{0}=\infty.$$

Задача 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Снова имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для выделения «критического» множителя в этом случае удобно использовать замену переменной, выбрав ее так, чтобы избавиться от иррациональностей в числителе и знаменателе: $\sqrt[6]{x}=t$. При $x\to64, t\to\sqrt[6]{64}=2$.

$$\lim_{x\to64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{t\to2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\lim_{t\to2}\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}=\lim_{t\to2}\frac{t^2+2t+4}{t+2}=\frac{12}{4}=3.$$

Задача 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+1}-\sqrt{4x^2-5x+1}\right)$.

В приведенном примере существует неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Чтобы раскрыть ее, необходимо свести выражение, стоящее под знаком предела, к дроби. Сделаем это, домножив на сопряженное. В результате тип неопределенности сменится на $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Раскроем эту неопределенность, вынося самые «весомые» слагаемые числителя и знаменателя за скобки:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+1}-\sqrt{4x^2-5x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+5x+1}-\sqrt{4x^2-5x+1}\right)\left(\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-5x+1}\right)}{\left(\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-5x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x+1-4x^2+5x-1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-5x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-5x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{\sqrt{4x^2}\left(\sqrt{1+\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}}\right)}=\left|\begin{array}{l}\textit{напомним, что}\\ \sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, \textit{ если } x\ge0;\\ -x, \textit{ если } x<0\end{cases}\end{array}\right|=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x}{-2x\cdot 2}=-\dfrac{5}{2}\ \textit{при}\ x\to-\infty,\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x}{2x\cdot 2}=\dfrac{5}{2}\ \textit{при}\ x\to+\infty.\end{cases}$$

Методика, которая положена в основу данной работы, позволит существенно ускорить процесс подготовки и проведения семинарских занятий по пределам функций, выполнения домашнего задания, подготовки к рубежному контролю и экзамену. Обобщен опыт изложения материала по указанной теме [6–11], предложены таблицы, которые весьма облегчат восприятие теории пределов и помогут при решении задач.

Ссылки на источники

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: учеб. для вузов: в 2 ч. Ч. 1. – 7-е изд. стереотип. (Курс высшей математики и математической физики). – М.: Физматлит, 2005. – 648 с.
2. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ: учеб. для бакалавров: в 2 ч. Ч. 1. – 4-е изд. – М.: Юрайт, 2013. – 660 с.
3. Марон И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной: учеб. пособие для вузов. – 3-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2008. – 399 с.
4. Морозова В. Д. Введение в анализ: учеб. для вузов / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. (Серия: Математика в техническом университете. Вып. I.). – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 408 с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. для втузов: в 2 т. Т. 1. – М.: Интеграл-Пресс, 2010. – 416 с.
6. Ахметова Ф. Х. и др. Введение в анализ. Теория пределов: метод. указания к выполнению домашнего задания: в 3 ч. Ч. 1. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 33 с.
7. Ахметова Ф. Х. и др. Введение в анализ. Теория пределов: метод. указания к выполнению домашнего задания: в 3 ч. Ч. 2. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 28 с.
8. Ахметова Ф. Х. и др. Введение в анализ. Теория пределов: метод. указания к выполнению домашнего задания: в 3 ч. Ч. 3. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 24 с.
9. Ахметова Ф. Х., Ласковая Т. А., Пелевина И. Н. Научно-методические проблемы преподавания теории бесконечно малых функций // Тезисы Международной научной конференции «Физико-математические проблемы создания новой техники» (PhysMathTech – 2014) (17–19 ноября 2014, МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия). – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – С. 104–105.
10. Ахметова Ф. Х., Ласковая Т. А., Пелевина И. Н. Методологические аспекты выделения главных частей бесконечно больших функций // Инженерный вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электронный журнал. – 2015. – № 4. – С. 1056–1063. – URL: http://engbul. bmstu. ru/doc/773087. html.
11. Ахметова Ф. Х., Ласковая Т. А., Пелевина И. Н. Методологические аспекты выделения главных частей бесконечно малых функций // Инженерный вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электронный журнал. – 2015. – № 5. – С. 1008–1016. – URL: http://engbul. bmstu. ru/doc/771171. html.

Faniya Akhmetova,
Candidate of Physical-mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
dobrich2@mail.ru
Anna Kosova,
Senior lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
anna.v.kosova@mail.ru
Irina Pelevina,
Senior lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
pdv62@mail.ru

Methods of topics presentation «Theory of functions limits» in the course “Mathematical analysis”

Abstract. The paper is devoted to teaching theory of limits in the course of mathematical analysis and the problems that arise in presenting educational material. To master the recording skills of the Cauchy function limit determination in the language « $\varepsilon-\delta$ », the authors propose a table that addressed all possible argument aspirations, written through the surroundings and intervals; provide definitions of the function limit for all cases

reviewed in the table and explain in detail the content and meaning of these basic definitions on the examples of tasks. The authors offer the table that summarizes the uncertainties and shows the ways of their elimination. Calculation method of all kinds of limits on a wide range of tasks is also illustrated. The paper can be useful to lecturers and first-year students.
Key words: Cauchy function limit, surrounding of finite and infinite points, disclosure of uncertainties.

References

1. Il'in, V. A. & Poznjak, Je. G. (2005). *Osnovy matematicheskogo analiza: ucheb. dlja vuzov: v 2 ch.* Ch. 1, 7-e izd. stereotip. (Kurs vysshej matematiki i matematicheskoj fiziki), Fizmatlit, Moscow, 648 p. (in Russian).
2. Il'in, V. A., Sadovnichij, V. A. & Sendov, B. H. (2013). *Matematicheskij analiz: ucheb. dlja bakalavrov: v 2 ch.* Ch. 1, 4-e izd, Jurajt, Moscow, 660 p. (in Russian).
3. Maron, I. A. (2008). *Differencial'noe i integral'noe ischislenie v primerah i zadachah. Funkcii odnoj peremennoj: ucheb. posobie dlja vuzov,* 3-e izd., stereotip, Lan', St. Petersburg, 399 p. (in Russian).
4. Morozova, V. D. (2014). *Vvedenie v analiz: ucheb. dlja vuzov,* (Serija: Matematika v tehnicheskom universitete. Vyp. I.), Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow, 408 p. (in Russian).
5. Piskunov, N. S. (2010). *Differencial'noe i integral'noe ischislenie: ucheb. dlja vtuzov: v 2 t.* T. 1, Integral-Press, Moscow, 416 p. (in Russian).
6. Ahmetova, F. H. et al. (2014). *Vvedenie v analiz. Teorija predelov: metod. ukazanija k vypolneniju domashnego zadanija: v 3 ch*. Ch. 1, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow, 33 p. (in Russian).
7. Ahmetova, F. H. et al. (2014). *Vvedenie v analiz. Teorija predelov: metod. ukazanija k vypolneniju domashnego zadanija: v 3 ch*. Ch. 2, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow, 28 p. (in Russian).
8. Ahmetova, F. H. et al. (2014). *Vvedenie v analiz. Teorija predelov: metod. ukazanija k vypolneniju domashnego zadanija: v 3 ch.* Ch. 3, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow, 24 p. (in Russian).
9. Ahmetova, F. H., Laskovaja, T. A. & Pelevina, I. N. (2014). “Nauchno-metodicheskie problemy prepodavanija teorii beskonechno malyh funkcij”, in *Tezisy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii “Fiziko-matematicheskie problemy sozdanija novoj tehniki” (PhysMathTech – 2014) (17–19 nojabrja 2014, MGTU im. N. Je. Baumana, Moskva, Rossija)*, MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow, pp. 104–105 (in Russian).
10. Ahmetova, F. H., Laskovaja, T. A. & Pelevina, I. N. (2015). “Metodologicheskie aspekty vydelenija glavnyh chastej beskonechno bol'shih funkcij”, *Inzhenernyj vestnik MGTU im. N. Je. Baumana. Jelek-tronnyj zhurnal,* № 4, pp. 1056–1063. Available at: http://engbul. bmstu. ru/doc/773087.html (in Russian).
11. Ahmetova, F. H., Laskovaja, T. A. & Pelevina, I. N. (2015). “Metodologicheskie aspekty vydelenija glavnyh chastej beskonechno malyh funkcij”, *Inzhenernyj vestnik MGTU im. N. Je. Baumana. Jelektronnyj zhurnal*, № 5, pp. 1008–1016. Available at: http://engbul. bmstu. ru/doc/771171.html (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	12.05.16	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	13.05.16
Принята к публикации *Accepted for publication*	13.05.16	Опубликована *Published*	30.05.16

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru