ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Мугаллимова С. Р. Учим решать уравнения и неравенства с параметром // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16140.htm.
ART 16140 УДК 372.851

Мугаллимова Светлана Ринатовна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры экономических дисциплин Сургутского института экономики, управления и права ФГБОУ ВО «Тюменский государственный университет», учитель математики МАОУ «Белоярская средняя общеобразовательная школа № 1», г. Сургут
globustm@rambler.ru

Учим решать уравнения и неравенства с параметром

Аннотация. *В статье освещены элементы методики обучения решению задач с параметрами. Показан подход к введению понятия, система упражнений для формирования действий, осуществляемых в процессе решения, а также приведён перечень формулировок задач, введённых в базу заданий для проведения итоговой аттестации (ЕГЭ) в 11-м классе общеобразовательной школы, описаны некоторые эвристики к их решению.*
Ключевые слова: *обучение математике, задачи с параметром, итоговая аттестация, комплекс упражнений.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

В школьной математике есть классы задач, вызывающие особый интерес учителей и методистов, традиционно считающиеся трудными для освоения учениками: задачи на построение, решение систем алгебраических неравенств, текстовые задачи с использованием дробных и процентных соотношений... Задачи с параметром занимают в этом перечне не последнее место. Вызвано это рядом обстоятельств.

Во-первых, трудности вызывает само понятие параметра и характер задачи с параметром. Этот термин не имеет чётко сформулированного определения, подобного определениям других математических терминов. Его первичное восприятие учащимися усложнено тем, что в их субъектном опыте сложно выделить примеры использования параметров. Решение задачи с параметрами требует вместо однозначно заданного объекта рассмотреть множество объектов, добавляет в рассматриваемую ситуацию динамики, в отличие от подавляющего большинства «статичных» задач, решаемых в школьном курсе.

Во-вторых, задачи с параметрами относятся к задачам более высокого уровня сложности, не имеют однозначных алгоритмов решения, требуют уверенного владения разнородными фрагментами школьного курса математики, применения разнообразных эвристик.

Наконец, несмотря на большое количество статей и учебных пособий, методика обучения решению задач с параметрами для большинства учителей остаётся недостаточно разработанной.

Перечисленные обстоятельства создают определённые трудности в работе с детьми, испытывающими интерес к математике, ориентированными на высокие результаты итогового экзамена по предмету. Мы предлагаем коллегам материал, который может оказаться полезным в преодолении этих трудностей. Для этого считаем целесообразным рассмотреть несколько методических аспектов: введение понятия параметра и знакомство с задачами с параметром, формирование специальных умений, определение круга типовых задач, формулировка эвристик к решению этих задач.

I. Вводим понятие параметра.

Одним из фундаментальных понятий математики и её приложений в других науках, например в физике, является понятие величины, которое не определяется. Следует обсудить с учащимися тот факт, что математика среди других видов деятельности занимается измерением величин. Так, словарь С. И. Ожегова [1] трактует математику как совокупность наук, изучающих величины, количественные отношения, а также пространственные формы. Среди величин выделим постоянные и переменные.

Например, в формулах работы, совершаемой при подъёме тела вертикально вверх $A = mgh$, и объёма шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ наряду с переменными величинами A, m, h, V, R используются постоянные величины g (ускорение свободного падения) и π (отношение длины окружности к её диаметру).

Но иногда, если мы проводим эксперимент, изучаем поведение какой-либо величины при некоторых условиях, то некоторые переменные часто считаем не изменяющимися в течение всего эксперимента.

Например, путь, пройденный телом при равноускоренном движении $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, зависит в том числе от переменной a, которая обозначает ускорение, заданное и не меняющееся в рамках рассматриваемого движения.

Или в условиях адиабатического процесса при постоянной температуре имеет место соотношение между объёмом идеального газа и его давлением $pV = const$, которое получается из уравнения Менделеева – Клапейрона $pV = \upsilon RT$. Очевидно, что значение константы, связывающей давление и объём, зависит от значения температуры, которая в условиях изотермического процесса считается постоянной.

Количество корней квадратного уравнения $x^2 + kx + 1 = 0$, определяемое знаком его дискриминанта $D = k^2 - 4$, зависит от того, какое значение примет переменная k. Очевидно, подставляя вместо k то или иное число, каждый раз получим новое уравнение со своим множеством корней.

Ещё пример. Построим окружность, проведём её диаметр и построим на нём всевозможные треугольники. Тогда образовавшиеся отрезки a и b связаны соотношением $a^2 + b^2 = d^2$, а величина площади треугольника зависит от длины перпендикуляра, опущенного на диаметр $S = \frac{dh}{2}$ (рис. 1).

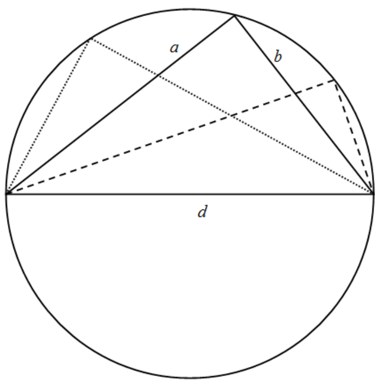


Рис. 1

Таким образом, понятие параметра вполне определённо, хотя дать ему чёткую дефиницию достаточно сложно. Мы выделяем следующие признаки этого понятия.

Параметр – это переменная величина, позволяющая рассмотреть множество объектов. Отдельные значения параметра задают отдельный объект множества, некоторые его значения приводят к частным случаям связей и отношений.

Рассмотрим разные подходы к определению термина «параметр» (от греческого παραμετρου – отмеривающий):

– величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой [2];

– величина, входящая в формулы и выражения, значение которой является постоянным в пределах рассматриваемой задачи, но в другой меняет свои значения [3];

– независимая переменная, значение которой в данной задаче считается фиксированным [4];

– постоянная величина, являющаяся характеристикой какого-либо процесса или предмета, может при разных аналогичных рассмотрениях принимать различные значения и даже быть переменной [5].

Приведённые примеры показывают, что ***параметром*** считается переменная величина, значение которой зафиксировано в рамках данной ситуации или данного процесса, и изменение её значения ведёт к изменению связей между другими величинами, характеристик протекающего процесса, приводит к изменению ситуации.

В математике для ***решения задачи с параметром*** требуется выполнить следующие действия:

1. Рассмотреть ситуацию так, как если бы вместо параметра было задано конкретное число.
2. Показать, как меняется ситуация, если изменить это число.
3. Зафиксировать особые случаи, найти, при каких значениях параметра они получаются.
4. Составить список всех возможных случаев с указанием того, каким значениям параметра они соответствуют.

II. Формируем необходимые умения.

Для успешного решения уравнения или неравенства с параметром необходимо уверенное владение следующими ***компонентами*****:**

– владеть понятием координатной прямой; уметь переходить от соотношений между числами (сравнение) к соотношениям между точками (расположение) и наоборот; записывать промежутки, соответствующие заданному неравенству и наоборот, производить объединение или пересечение промежутков в процессе решения задачи;

– владеть понятием декартовой системы координат на плоскости; уметь описывать положение графика функции (расположение, пересечение, преобразование);

– владеть алгоритмами решения основных классов уравнений и неравенств; владеть графическим методом решения уравнений, неравенств и их систем;

– уметь строить графики основных классов функций и некоторых уравнений с двумя переменными, знать их особенности, а также владеть алгоритмами преобразования графиков;

– владеть исследовательскими навыками, уметь перечислять возможные варианты и выявлять условия, способствующие тому или иному решению.

Особо отметим, что для успешного решения задач с параметром, входящих в банк заданий ЕГЭ, необходимо ещё и владение понятием модуля числа, умение преобразовывать выражения, решать уравнения и неравенства, строить графики функций, содержащих знак модуля.

ISSN 2304-120X
Мугаллимова С. Р. Учим решать уравнения и неравенства с параметром // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16140.htm.

Для формирования специальных умений, необходимых в решении уравнений и неравенств с параметром, следует выполнить ***комплекс упражнений*.**

1) Сравнение чисел и значений выражений

Упражнение 1. Что больше: а) a *или* $2a$, б) a *или* $-a$, в) a *или* $|a|$, г) a *или* $\frac{1}{a}$, д) a *или* a^2, е) a *или* $\sqrt{a}$, ж) 2^a *или* 2^{-a}, з) a^2 *или* a^{-2}, и) $log_a 2$ или $log_a 3$?

Рекомендации к выполнению упражнения

При выполнении этого упражнения рекомендуем придерживаться следующей схемы: 1) выявить «особые» значения параметра; 2) объяснить свой выбор; 3) разбить множество всех действительных чисел на промежутки и решить задачу на каждом из полученных промежутков.

Например, при выполнении упражнения г) нетрудно заметить, что «особыми» значениями параметра являются 0, 1 и –1. При $a = 0$ сравнение не имеет смысла. При $a = 1$ и $a = -1$ значения сравниваемых выражений совпадают. Разобьем числовую прямую на промежутки и определим знак неравенства на каждом из них, выбирая в качестве значения a какое-либо число (рис. 2).

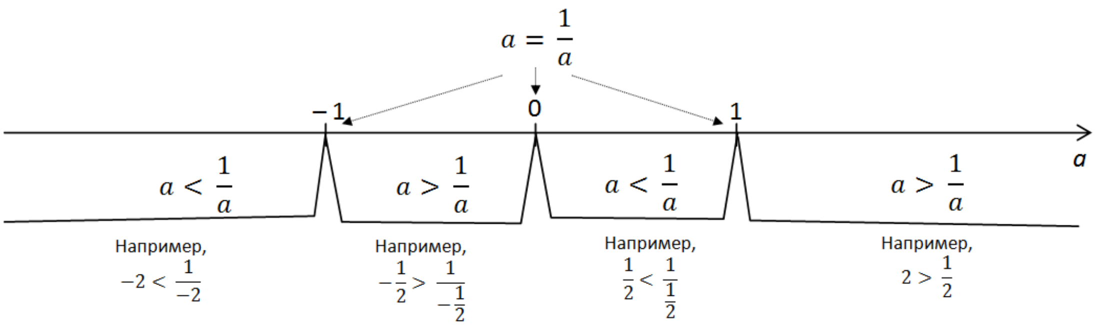


Рис. 2

Таким образом, при $a = -1$ *или* 1 имеем $a = \frac{1}{a}$;

при $a \in (-1; 0) \cup (1;\ +\infty)$ имеем $a > \frac{1}{a}$;

при $a \in (-\infty;\ -1) \cup (0;\ 1)$ имеем $a < \frac{1}{a}$.

2) Определение решений системы линейных неравенств

Упражнение 2. Может ли система $\begin{cases} x \le 2, \\ x > a \end{cases}$ не иметь решений?

Упражнение 3. Изобразите числовые промежутки, соответствующие решениям системы $\begin{cases} x \le 2, \\ x > a, \end{cases}$ такие, в которых было бы а) ровно два целых числа; б) ровно одно целое число. Выясните, при каких a они получаются.

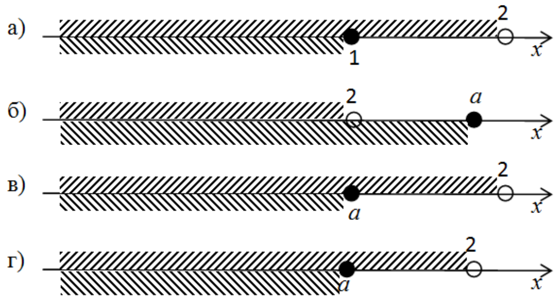
Ответ: а) при $a \in [0; 1)$; б) при $a \in [1;2)$.

Упражнение 4. При каких значениях a решением системы $\begin{cases} x < 2, \\ x \le a \end{cases}$ является промежуток а) $(-\infty;1]$; б)$(-\infty; 2)$; в) $(-\infty;a]$; г) $(-\infty; a)$?

Рекомендации к выполнению упражнения

Изобразим требуемые решения на координатной прямой и определим соответствующие значения параметра (см. рис. 3).

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Мугаллимова С. Р. Учим решать уравнения и неравенства с параметром // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16140.htm.



Ответ: $a = 1$.

Ответ: $a \in [2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 2)$.

Ответ: $a = 2$.

Рис. 3

При выполнении этого упражнения рекомендуем строго придерживаться следующего правила: *x* – это переменная, *a* – это число.

3) Нахождение корней простейшего уравнения, содержащего параметр

Упражнение 5. Выбрав некоторые значения параметра a, решите уравнения:

а) $2a(a-2)x = a-2$ [6];

б) $(x-a)(x-3) = 0$;

в) $\frac{x^2-9}{x-a} = 0$;

г) $\frac{a+x}{x^2-5x+6} = 0$.

Выявите «особые» значения параметра. Перечислите все возможные случаи решения, указав, при каких значениях a они получаются.

Рекомендации к выполнению упражнения

Решение предложенных уравнений предполагает следующую последовательность рассуждений: 1) выбрать некоторое число – значение параметра – и подставить его в заданное уравнение; 2) определить тип полученного уравнения; 3) решить полученное уравнение в соответствии с алгоритмом решения определённого класса уравнений; 4) повторить процедуру несколько раз. После проведённых проб можно обобщить решение и провести полное исследование его корней. Например, решение уравнения а) может быть оформлено в следующем виде.

Пусть $a = 5$. Тогда имеем уравнение $30x = 3$, откуда $x = \frac{1}{10}$.

Пусть$a = -3$. Тогда имеем уравнение $-30x = -5$, откуда $x = -\frac{1}{6}$.

Если $a = 0$, то получим уравнение $0 \cdot x = -2$, которое корней не имеет.

Если $a = 2$, то получим равенство $0 \cdot x = 0$, верное при любом x.

Ответ: при $a = 0$ уравнение корней не имеет;

при $a = 2$ корнем уравнения является любое число;

в остальных случаях уравнение имеет один корень $x = \frac{1}{2a}$.

Примечание. В процессе решения уравнений с параметром следует обращать внимание на формулировку задания. В одних случаях требуется указать количество корней уравнения в зависимости от параметра, в других – решить уравнение, т. е. найти формулы, выражающие корни этого уравнения.

4) Выполнение условия для количества корней уравнения

Упражнение 6. Сколько корней может иметь уравнение [7]:

а) $(a+4)x^2 + 6x - 1 = 0$;

б) $(2a+8)x^2 - (a+4)x + 3 = 0$?

Рекомендации к выполнению упражнения

Важно обсудить с учащимися следующий факт: рациональное уравнение может при некоторых значениях параметра привести к уравнению степени ниже, чем степень заданного уравнения. Так, решая уравнение а), при $a = -4$ получим линейное уравнение, имеющее один корень. В других случаях получим квадратное уравнение, дискриминант которого равен $D = 40 + 4a$. Тогда при $a = -10$ уравнение также имеет один корень, при $a > -10, a \neq -4$ уравнение имеет два корня, при $a < -10$ действительных корней нет.

Последовательные рассуждения в решении уравнения б) приводят к следующему ответу: при $a \in [-4;20)$ уравнение не имеет (действительных) корней;
при $a = 20$ уравнение имеет один корень;
в остальных случаях уравнение имеет два корня.

Упражнение 7. Найдите все значения a, при которых уравнение имеет единственный корень [8]:

а) $(x-3)\log_2 a = 0$; ответ: при $a \in (0;1) \cup (1;\ +\infty)$.
б) $(x-1)\arccos a = 0$; ответ: при $a \epsilon [-1;1)$.
в) $(x-a)\log_2 x = 0$; ответ: при $a \epsilon (-\infty;\ 0] \cup \{1\}$.
г) $(x-a)\left(\sqrt{x}-9\right) = 0$; ответ: при $a \epsilon (-\infty;\ 0) \cup \{81\}$.

5) Решение неравенств простейшего вида, содержащих параметр

Упражнение 8. Перечислите все возможные случаи решения неравенства, указав, при каких значениях a они получаются:

а) $ax > 1$.

Ответ: при $a = 0$ нет решений; если $a > 0$, то $x > \frac{1}{a}$; если $a < 0$, то $x < \frac{1}{a}$.

б) $(x-a)(x-2) < 0$.

Ответ: при $a = 2$ нет решений; если $a > 2$, то $x \in (2;a)$; если $a < 2$, то $x \in (a;2)$.

в) $\frac{x+1}{x+a} < 0$.

Ответ: при $a = 1$ нет решений; если $a \in (-\infty;1)$, то $x \in (-1;-a)$; если $a \in (1;\ +\infty)$, то $x \in (-a;-1)$.

г) $\frac{a+x}{x^2-5x+6} \geq 0$.

Ответ: если $a = -2$, то $x \in (3;\ +\infty)$;
если $a = -3$, то $x \in (2;3) \cup (3;\ +\infty)$;
если $a \in (-\infty;\ -3)$, то $x \in (2;\ 3) \cup [-a;\ +\infty)$;
если $a \in (-3;\ -2)$, то $x \in (2;-a] \cup (3;\ +\infty)$;
если $a \in (-2;\ +\infty)$, то $x \in [-a;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$.

6) Построение семейства кривых и выявление особых случаев расположения графиков

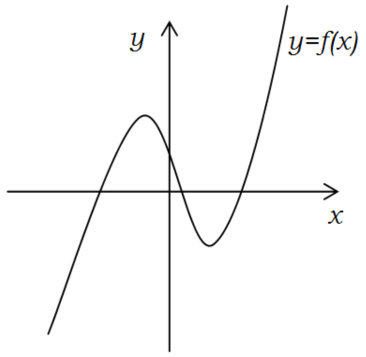
Упражнение 9. Постройте графики функций: $y = a - x^2$; $y = |x+a|$; $y = \sqrt{a-x}$; $y = log_2(a-x)$; $y = e^x + a$. Какие из этих графиков проходят через точку (0; 1)?

Упражнение 10. Постройте геометрическое место точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими уравнению:

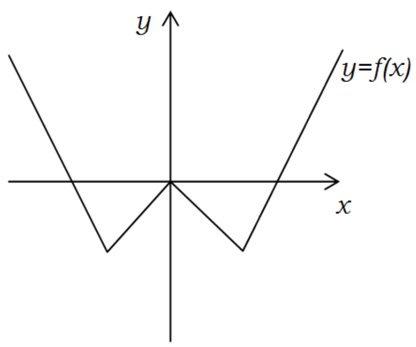
а) $|x| + |y| = a$;
б) $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$;
в) $|x| + |y| \leq a$;
г) $x^2 + y^2 \geq a$.

7) Определение количества корней уравнения $f(x) = a$ при заданном графике функции $f(x)$

Упражнение 11. Задан график функции $f(x)$ (см. рис. 4 а, б). Как определить количество корней уравнения $f(x) = a$?



а)



б)

Рис. 4

Упражнение 12. Построить чертёж для графического решения неравенства $ax \geq |x+1|$. Перечислить все случаи взаимного расположения графиков.

8) Нахождение значения параметра, соответствующего касанию кривой и прямой

Упражнение 13. Какие условия должны выполняться для того, чтобы прямая $y = ax - 1$ являлась касательной к параболе $y = x^2$? Как найти соответствующие значения a?

Рекомендации к выполнению упражнения

В точке касания прямой и кривой выполняются условия, описываемые системой $\begin{cases} ax - 1 = x^2 \\ (ax-1)' = (x^2)' \end{cases}$. Поэтому касание может произойти в точке с абсциссой $x = 1$ при $a = 2$ или в точке с абсциссой $x = -1$ при $a = -2$.

III. Определяем круг задач с типовыми формулировками. Формируем эвристики.

Проанализировав банк задач для подготовки к ЕГЭ по математике [9], мы выделили несколько типов задач с параметром.

1. Для данного уравнения требуется найти значения параметра, при которых выполняется заданное условие.

1.1. Задано требование на количество корней уравнения (имеет единственный корень, имеет более двух корней, не имеет корней и т. п.).

1.2. Задан промежуток, которому принадлежат корни уравнения (все, несколько, хотя бы один).

Другие варианты формулировок:

– график функции пересекает ось абсцисс в трёх точках;
– функция имеет более двух точек экстремума и т. п.

2. Для данного неравенства требуется найти значения параметра, при которых выполняется заданное условие.

2.1. Решениями неравенства являются все действительные числа.

2.2. Неравенство не имеет решений.

2.3. Множество решений неравенства задано или ограничено дополнительным условием.

Другие варианты формулировок:

– неравенство имеет три целых решения;
– решением неравенства является отрезок;

– наибольшее значение функции меньше заданного числа и т. п.

3. Для данной системы уравнений (неравенств) требуется найти значения параметра, при которых выполняется заданное условие.

3.1. Система имеет бесконечно много решений.

3.2. Система не имеет решений.

3.3. Система имеет решения.

3.4. Система имеет заданное количество решений (единственное, два или, например, четыре).

4. Другие задачи:

4.1. Решить уравнение, неравенство или систему при каждом значении параметра.

4.2. Найти значения параметра, при которых уравнения (неравенства или системы) равносильны.

4.3. Решить задачу с дополнительными ограничениями на параметр (например, решить при всех положительных значениях параметра).

Решение задач с параметром не имеет однозначного алгоритма, однако есть ряд соображений, которые так или иначе возникают вместе с приобретаемым опытом. Сформулируем ряд эвристик, владение которыми существенно облегчит решение уравнений, неравенств с параметром и их систем.

1. Большинство алгебраических уравнений, неравенств с параметром и их систем успешно решается графически.

2. В некоторых задачах сложное и многоэтапное исследование можно свести к решению рационального неравенства или системы рациональных неравенств [10, 11].

– Например, вместо неравенства $\sqrt{x}-\sqrt{a}>0$ можно решить неравенство $x-a>0$ при дополнительных ограничениях.

– Решая неравенства $a^x-a^n>0$, можно рассмотреть случаи $x-n>0$, где $a>1$ и $x-n<0$, где $0<a<1$.

– Неравенство $|f(x)|>|g(x)|$ в некоторых случаях целесообразно заменить неравенством $[f(x)]^2>[g(x)]^2$.

– Если неравенство можно привести к виду $\log_{g(x)}[f(x)]>0$, то его решения можно найти, решив неравенство $(g(x)-1)(f(x)-1)>0$.

3. Решение многих уравнений и неравенств с параметром, содержащих квадратный трёхчлен, можно свести к использованию соотношений, аналогичных следующей теореме. Для того чтобы оба корня квадратного трёхчлена $\mathrm{f(x)=ax^2+bx+c}$ лежали по разные стороны от заданного числа M, необходимо и достаточно выполнения условия $\mathrm{a\cdot f(M)<0}$ [12].

4. Во многих задачах, как можно видеть выше, требуется найти те значения параметра, при которых число корней уравнения наперёд задано. Тогда могут помочь следующие соображения (см. упражнение 7):

– если требуется, чтобы рациональное уравнение имело единственный корень, необходимо рассмотреть те значения параметра, при которых оно становится линейным;

– если требуется, чтобы уравнение имело единственный корень, то необходимо рассмотреть те значения параметра, при которых все корни уравнения совпадают;

– если требуется, чтобы уравнение имело единственный корень, необходимо рассмотреть те значения параметра, при которых все найденные корни, кроме одного, являются посторонними;

– в уравнениях, содержащих чётные функции, можно отдельно рассмотреть случай, когда переменная принимает значение равное нулю; это позволит выяснить, может ли количество решений быть чётным или нечётным.

5. Требование равносильности уравнений, неравенств или систем можно свести к исследованию области определения или области значения функции.

Конечно, приведённые эвристики не исчерпывают разнообразие приёмов, используемых в решении задач с параметрами. Мы не останавливаемся подробно на рассмотрении задач, требующих применения этих эвристик, предоставляя читателю возможность более детально поработать с книгами, посвящёнными решению задач с параметром [13–16].

В качестве резюме отметим несколько моментов:

1. Задачи с параметрами относятся к категории достаточно сложных задач, требующих применения разнообразных знаний, синтеза различных фрагментов изученного ранее материала.
2. Это задачи, в которых проявляется творческая составляющая процесса обучения, деятельность учащихся носит эвристический характер.
3. Существует ряд методических соображений, использование которых облегчает процесс приобщения учащихся к решению задач с параметром. Эти соображения учитывают специфику параметра как понятия и специфику задач с параметром как отдельного вида задач.
4. Приобретение опыта решения указанного вида задач должно сопровождаться формулировкой специальных и частных эвристик.

Приведенные рекомендации могут оказаться полезными для учителей, работающих над подготовкой учащихся к итоговой аттестации, а также для работы в рамках элективных курсов и в других формах работы с учащимися, проявляющими интерес к изучению математики.

Ссылки на источники

1. Ожегов С. И. Словарь русского языка: ок. 53000 слов / под общ. ред. проф. Л. И. Скворцова. – 24-е изд., испр. – М.: ООО Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2004. – 896 с.
2. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров; ред. кол.: С. И. Адян, Н. С. Бахвалов, В. И. Битюцков, А. П. Ершов, Л. Д. Кдрявцев, А. Л. Онищик, А. П. Юшкевич. – М.: Сов. энцикл., 1988. – 847 с.
3. Толковый словарь математических терминов / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. И. Соркин, Н. Г. Федин. – М.: Просвещение, 1965. – 540 с.
4. Голубев В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. – М.: ИЛЕКСА, 2007. – 252 с.
5. Картавов С. А. Математические термины: справ.-библиогр. словарь. – Киев: Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 295 с.
6. Крамор В. С. Задачи с параметрами и методы их решения. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2007. – 416 с.
7. Алгебраический тренажер: пособие для школьников и абитуриентов / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М.: Илекса, 2007. – 320 с.
8. Там же.
9. Образовательный портал «Решу ЕГЭ». – URL: http://reshuege.ru/
10. Голубев В. И. Указ. соч.
11. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014: решаем задачи методом рационализации: учеб.-метод. пособие / под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов н/Д.: Легион, 2013. – 32 с.
12. Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика: справочник для старшеклассников и поступающих в вузы. – М.: АСТ-ПРЕСС, 2001. – 576 с.
13. Крамор В. С. Указ. соч.
14. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014: решаем задачи методом рационализации.

15. Севрюков П. Ф., Смоляков А. Н. Школа решения задач с параметрами: учеб.-метод. пособие. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2009. – 212 с.
16. Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Указ. соч.

Svetlana Mugallimova,
Candidate of Pedagogic Sciences, Associate Professor at the chair of Economical Disciplines, Surgut brunch of Tumen State University; teacher of mathematics, Secondary school No 1, Bely Yar, Surgut district of the Khanty-Mansiysk Autonomous region, Surgut
globustm@rambler.ru

Training students to solve equations and inequalities with parameters

Abstract. The paper presents the elements of teaching problems with parameters. The approach to the introduction of the concept «parameter» is discussed. The base of exercises, different types of problems and some heuristics are described.

Key words: mathematical education, problems with parameters, final examination, a set of exercises.

References

1. Ozhegov, S. I. (2004). *Slovar' russkogo jazyka: ok. 53000 slov*, 24-e izd., ispr., OOO Izdatel'skij dom “ONIKS 21 vek”: OOO “Izdatel'stvo “Mir i obrazovanie”, Moscow, 896 p. (in Russian).
2. Prohorov, Ju. V. et al. (eds.) (1988). *Matematicheskij jenciklopedicheskij slovar'*, Sov. jencikl., Moscow, 847 p. (in Russian).
3. Manturov, O. V., Solncev, Ju. K., Sorkin, Ju. I. & Fedin, N. G. (1965). *Tolkovyj slovar' matematicheskih terminov,* Prosveshhenie, Moscow, 540 p. (in Russian).
4. Golubev, V. I. (2007). *Reshenie slozhnyh i nestandartnyh zadach po matematike*, ILEKSA, Moscow, 252 p. (in Russian).
5. Kartavov, S. A. (1988). Matematicheskie terminy: sprav.-bibliogr. slovar', Vyshha shk. Golovnoe izd-vo, Kiev, 295 p. (in Russian).
6. Kramor, V. S. (2007). *Zadachi s parametrami i metody ih reshenija*, OOO “Izdatel'stvo Oniks”: OOO “Izdatel'stvo “Mir i obrazovanie”, Moscow, 416 p. (in Russian).
7. Merzljak, A. G., Polonskij, V. B. & Jakir, M. S. (2007). Algebraicheskij trenazher: posobie dlja shkol'nikov i abiturientov, Ileksa, Moscow, 320 p. (in Russian).
8. Ibid.
9. Obrazovatel'nyj portal “Reshu EGJe”. Available at: http://reshuege.ru/ (in Russian).
10. Golubev, V. I. (2007). Op. cit.
11. Lysenko, F. F. & Kulabuhov, S. Ju. (eds.) (2013). *Matematika. Podgotovka k EGJe-2014: reshaem zadachi metodom racionalizacii: ucheb.-metod. posobie,* Legion, Rostov n/D., 32 p. (in Russian).
12. Cherkasov, O. Ju. & Jakushev, A. G. (2001). *Matematika: spravochnik dlja starsheklassnikov i postupajushhih v vuzy,* AST-PRESS, Moscow, 576 p. (in Russian).
13. Kramor, V. S. (2007). Op. cit.
14. Lysenko, F. F. & Kulabuhov, S. Ju. (eds.) (2013). Op. cit.
15. Sevrjukov, P. F. & Smoljakov, A. N. (2009). *Shkola reshenija zadach s parametrami: ucheb.-metod. posobie*, Izd. 2-e, ispr. i dop., Ileksa; Narodnoe obrazovanie; Stavropol': Servisshkola, Moscow, 212 p. (in Russian).
16. Cherkasov, O. Ju. & Jakushev, A. G. (2001). Op. cit.

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	10.05.16	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	12.05.16
Принята к публикации *Accepted for publication*	12.05.16	Опубликована *Published*	28.07.16

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru