ISSN 2304-120X

научно-методический электронный журнал

Гилев В. Г. Исследование функций на монотонность // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16146.htm.

ART 16146 УДК 372.851

Гилев Валерий Георгиевич,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, информатики и методики их преподавания ФГБОУ ВПО «Ишимский государственный педагогический институт им. П. П. Ершова», г. Долгопрудный
Gilev.valery@gmail.com

Исследование функций на монотонность

Аннотация. *Рассмотрены определения понятия монотонности функции с помощью наглядного, словесного, аналитического и геометрического методов. Формулируются признаки и соответствующие способы исследования функций на монотонность с использованием функции обобщения и первой производной.*

Ключевые слова: *функция, исследование, экстремумы, производная функция, функция обобщения.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

ВВЕДЕНИЕ

Исследовать функцию $y = f(x)$ – это значит установить ее свойства, опираясь на определения или признаки этих свойств. Исследовать функцию на монотонность – это значит найти промежутки, в которых функция возрастает или убывает.

При исследовании функций до знакомства с производной наиболее трудным является поиск промежутков монотонности. Учащиеся, зная определения возрастания и убывания функции, не могут найти соответствующие промежутки, так как не знают метода их нахождения. Вместе с тем программа по математике предусматривает, чтобы основные свойства функций были освоены учащимися до изучения элементов математического анализа. В настоящей работе рассматриваются методы исследования функций на монотонность: традиционный, с использованием *первой производной,* и новый, который называется *методом обобщения*. При втором методе получается функция обобщения, промежутки знакопостоянства которой определяют промежутки монотонности функции [1].

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ

Наглядное представление возрастания и убывания функции на промежутке

Пусть функция $y = f(x)$ задана графически.

Если на некотором промежутке *P* при движении карандашом по графику слева направо рука поднимается вверх, то говорят, что на этом промежутке функция *возрастает* (рис. 1, а).

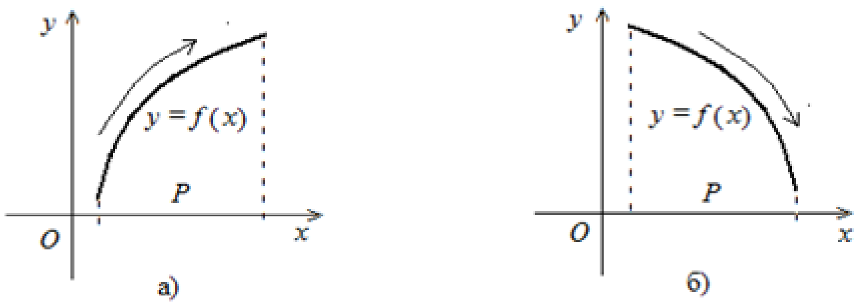

Рис. 1

ISSN 2304-120X
научно-методический электронный журнал
Гилев В. Г. Исследование функций на монотонность // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16146.htm.

Если на некотором промежутке *Р* при движении карандашом по графику слева направо рука опускается вниз, то говорят, что на этом промежутке функция *убывает* (см. рис. 1, б).

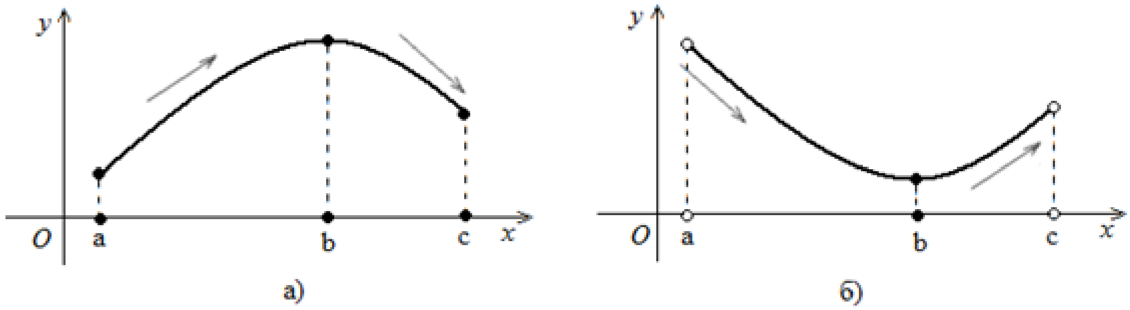

Рис. 2

На рис. 2, а) функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[a; b]$ и убывает на промежутке $[b; c]$.

Точку b называют *критической, или точкой экстремума.* При переходе через эту точку функция меняет свое поведение с возрастания на убывание. В этом случае точка b называется *точкой максимума* и записывается $x_{max} = b$. Значение функции в этой точке называется *максимумом функции* и записывается $y_{max} = f(b)$.

На рис. 2, б) функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $(a; b]$ и возрастает на промежутке $[b; c)$.

Точку b также называют *критической, или точкой экстремума.* При переходе через эту точку функция меняет свое поведение с убывания на возрастание. В этом случае точка b называется *точкой минимума* и записывается $x_{min} = b$. Значение функции в этой точке называется *минимумом функции* и записывается $y_{min} = f(b)$.

Максимум и минимум функции называются *экстремумами* функции.

Словесное определение возрастания и убывания функции на промежутке

При движении карандашом слева направо по графику возрастающей на промежутке *Р* функции $y = f(x)$ на рис. 3, а) абсциссы и ординаты точек графика увеличиваются. В этом случае с увеличением значений аргумента значения функции увеличиваются. Говорят, что функция $y = f(x)$ *возрастает* на промежутке *Р*, если с *увеличением* значений аргумента значения функции *увеличиваются*.

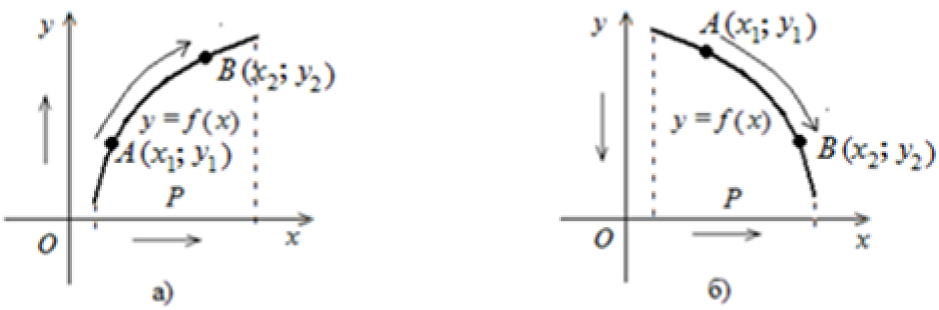

Рис. 3

При движении карандашом слева направо по графику убывающей на промежутке *Р* функции $y = f(x)$ на рис. 3,б) абсциссы точек графика увеличиваются, а ординаты – уменьшаются. В этом случае с увеличением значений аргумента значения функции уменьшаются. Говорят, что функция $y = f(x)$*убывает* на промежутке *Р*, если с *увеличением* значений аргумента значения функции *уменьшаются*.

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Гилев В. Г. Исследование функций на монотонность // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16146.htm.

Аналитическое определение возрастания и убывания функции на промежутке

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на данном числовом промежутке *P*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. для любых x_1и x_2 из промежутка *P*, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (рис. 4, а).

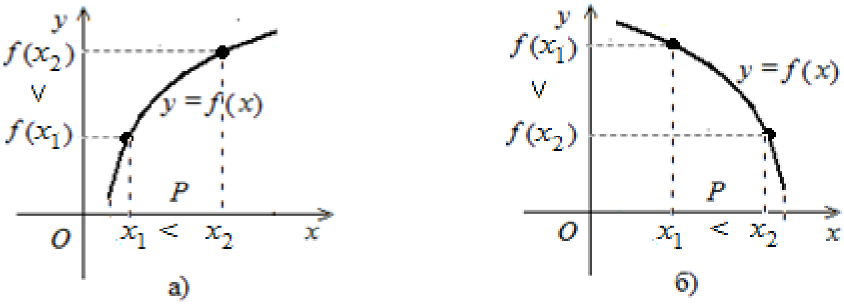

Рис. 4

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на данном числовом промежутке *P*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. для любых x_1и x_2 из промежутка *P*, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 4, б).

Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется *монотонной* на этом промежутке.

Функция $y = f(x)$ называется кусочно-монотонной на некотором множестве X, если множество X можно разбить на конечное число подмножеств так, что на каждом из них функция является монотонной.

Определение 1. Функция $\mathrm{f(x)}$ называется *возрастающей* на данном числовом промежутке P, если для любых $\mathrm{x_1}$ и $\mathrm{x_2}$ из промежутка P, таких, что при $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $\mathrm{f(x)}$ называется *убывающей* на данном числовом промежутке P, если для любых $\mathrm{x_1}$ и $\mathrm{x_2}$ из промежутка P, таких, что при $\mathrm{x_2 > x_1}$, выполняется неравенство $\mathrm{f(x_2) < f(x_1)}$.

Итак, функция $y = f(x)$*возрастает* на промежутке *P*, если для любых x_1**,** x_2 из этого промежутка выполняется: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ *убывает* на промежутке *P*, если для любых x_1**,** x_2 из этого промежутка выполняется: $x_2 > x_1 \Rightarrow\ f(x_2) < f(x_1)$.

Геометрическое определение возрастания и убывания функции на промежутке

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на данном числовом промежутке P, если касательная к графику функции образует острый угол с осьюOx (см. рис. 5, а)

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на данном числовом промежутке P, если касательная к графику функции образует тупой угол с осью Ox (см. рис. 5, б).

В случае, когда $\angle\alpha = 0$, касательная параллельна оси Ox. Имеем критические точки.

Если в критической точке функция меняет характер монотонности, то имеем экстремум. Так, на рис. 6, а) имеем максимум, так как функция меняет характер монотонности с возрастания на убывание. На рис. 6, б) имеем минимум, так как функция меняет характер монотонности с убывания на возрастание.

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Гилев В. Г. Исследование функций на монотонность // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16146.htm.

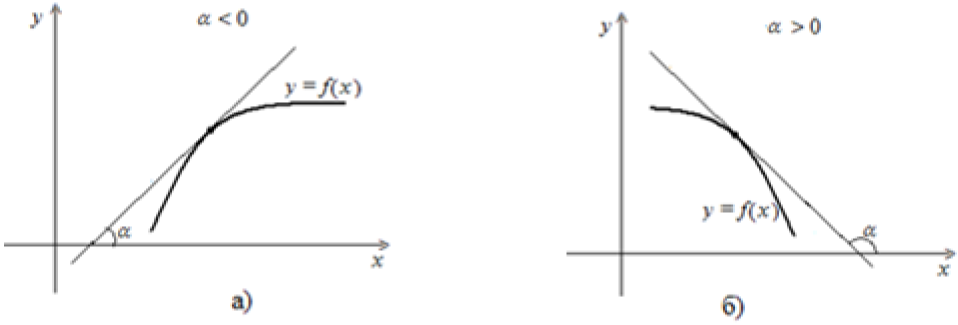

Рис. 5

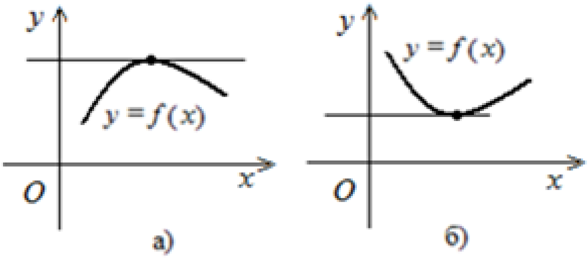

Рис. 6

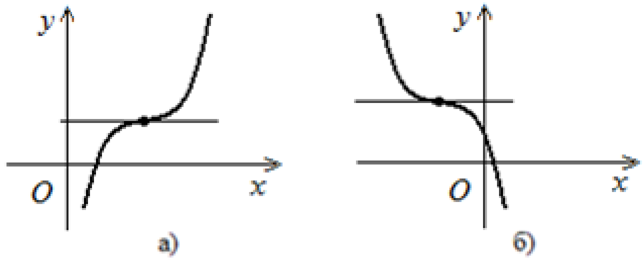

Рис. 7

Если в критической точке функция не меняет характер монотонности, то имеем перегиб. На рис. 7, а) функция возрастает, на рис. 7, б) функция убывает.

Постановка и решение проблемы

Для элементарной функции $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ запишем выражение

$$\Delta(\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_2) - \mathrm{f}(\mathrm{x}_1).$$

Очевидно, что при $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2, \Delta(\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2) = 0$, поэтому выражение $\Delta(\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2)$ можно представить в виде произведения двух множителей $\mathrm{B}(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2)$и $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2)$: $\Delta(\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_2) - \mathrm{f}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{B}(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2)\cdot \mathrm{A}(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2)$, причем при $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$, $\mathrm{B}(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2)= 0$ и $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2)\neq 0$.

Спрашивается, при каких значениях $\mathrm{x} \in \mathrm{D_f}$, $\Delta(\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2) > 0$ и когда $\Delta(\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2) < 0$?

Для определенности примем $\mathrm{x}_2 > \mathrm{x}_1$, тогда можно выделить множитель $\mathrm{B}(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2)> 0$. Знак $\Delta(\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2)$ будет зависеть только от знака множителя $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2)$.

Остается ответить, на каких промежутках $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2)$ принимает положительные значения, а на каких – отрицательные. Для этого найдем функцию $\delta(\mathrm{x})$, сделав обобщение путем замены x_1 и x_2 на x в выражении $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2)$: $\delta(\mathrm{x}) = \mathrm{A}(\mathrm{x})$. Функцию $\delta(\mathrm{x})$ назовем ***функцией обобщения.*** Переменная x принадлежит одному из устанавливаемых исследованием промежутку. Для нахождения самих промежутков необходимо решить соответственно неравенства

$$\delta(\mathrm{x}) > 0 \text{ и } \delta(\mathrm{x}) < 0.$$

Решение неравенства $\delta(\mathrm{x}) > 0$ определяет промежутки, в которых $\Delta(\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2) > 0$. Решение неравенства $\delta(\mathrm{x}) < 0$ определяет промежутки, в которых $\Delta(\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2) < 0$.

Метод, при помощи которого находится функция $\delta(\mathrm{x})$, назовем ***методом обобщения.***

Итак, замена x_1 и x_2 на x в выражении $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2)$ явилась решением проблемы знакопостоянства выражения $\Delta(\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2)$.

Замечание. Замена x_1 и x_2 на x в выражении $A(x_1; x_2)$ в математическом анализе называется операцией ***предельного перехода.***

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Гилев В. Г. Исследование функций на монотонность // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16146.htm.

2. ПРИЗНАКИ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ

Отметим, что особенностью рассматриваемого свойства функции является то, что исследовать функцию на монотонность невозможно, исходя из его определений непосредственно. С этой целью пользуются признаками монотонности функции.

Признак монотонности функции по функции обобщения

Из определений 1 и 2 следует признак выпуклости графика функции, который сформулирован в теореме 1.

Теорема 1. Если функция обобщения $y = \delta(x)$ в данном промежутке P положительна, то функция $y = f(x)$возрастает, а если отрицательна – убывает в этом промежутке.

Докажем эту теорему.

Необходимость. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает и $x_2>x_1$. Тогда:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow \Delta(x_1; x_2) > 0.$$

В связи с тем что промежутки знакопостоянства функции обобщения $\delta(x)$ и выражения $\Delta(x_1; x_2)$ совпадают, то $\delta(x) > 0$.

Достаточность. Пусть $\delta(x) > 0$. Тогда: $\Delta(x_1; x_2) > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Следовательно, имеем $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. Функция $y = f(x)$ возрастает.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы 1. Что и требовалось.

Итак, решение неравенства $\delta(x) > 0$ определяет промежутки возрастания функции. Решение неравенства $\delta(x) < 0$ определяет промежутки убывания функции. Точки, в которых функция обобщения $\delta(x) = 0$, называются критическими (точками экстремума).

При исследовании функции $y = f(x)$ на монотонность методом обобщения поступаем следующим образом.

Алгоритм исследования функции $y = f(x)$ на монотонность методом обобщения

1. Выбираем x_1 и x_2 из области определения, такие, что $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$.
2. Записываем разность $f(x_2) - f(x_1)$.
3. Представляем разность $f(x_2) - f(x_1)$ в виде произведения:

$$f(x_2) - f(x_1) = B(x_1; x_2) \cdot A(x_1;x_2),\text{ где } B(x_1; x_2) > 0.$$

4. В выражении $A(x_1; x_2)$ заменяем x_1 и x_2 на x, получаем функцию обобщения $\delta(x)$: $\delta(x) = A(x)$.
5. Находим промежутки возрастания функции $y = f(x)$ решением неравенства $\delta(x) > 0$.
6. Находим промежутки убывания функции $y = f(x)$ решением неравенства $\delta(x) < 0$.
7. Находим критические точки решением уравнения $\delta(x) = 0$.
8. Записываем промежутки монотонности с учетом критических точек.

Признак монотонности функции по первой производной

Сформулируем признак монотонности функции по первой производной.

Теорема 2. Если производная $y' = f'(x)$ в данном промежутке P положительна, то функция $y = f(x)$ возрастает, а если отрицательна – убывает в этом промежутке.

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Гилев В. Г. Исследование функций на монотонность // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16146.htm.

Доказательство теоремы 2 проведем, опираясь на геометрический смысл производной: значение производной функции $y = f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в той же точке x (рис. 8), т. е.

$$k = f^{'}(x) = tq \propto.$$

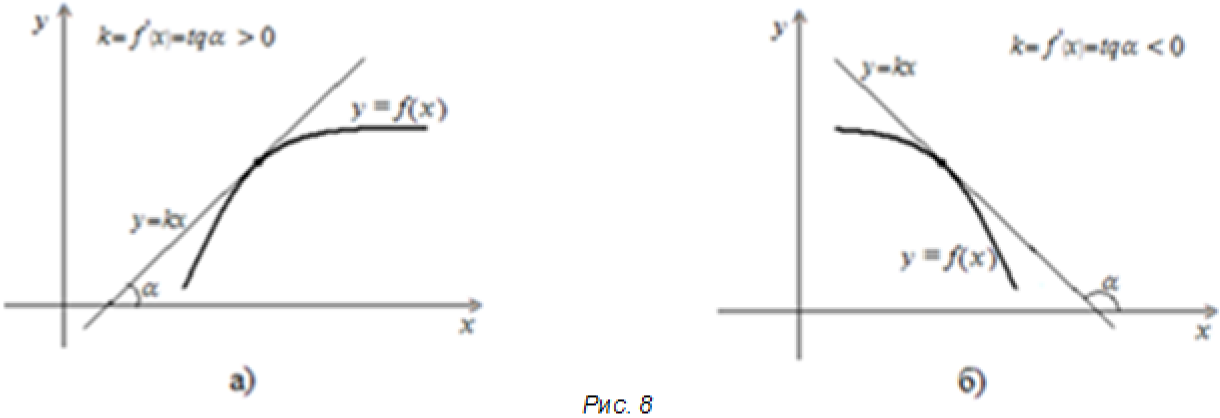

Рис. 8

На самом деле, пусть дан график функции $y = f(x)$ (рис. 9). Возьмем на кривой $y = f(x)$ точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Через точку M_1 проведем касательную K_1M_1 и секущую K_2M_2. Угол касательной с осью $0x$ обозначим через $\alpha = \angle M_1K_1N_1$. Угол секущей с осью $0x$ обозначим через $\beta = \angle M_2K_2N_2 = \angle M_2M_1E_2$.

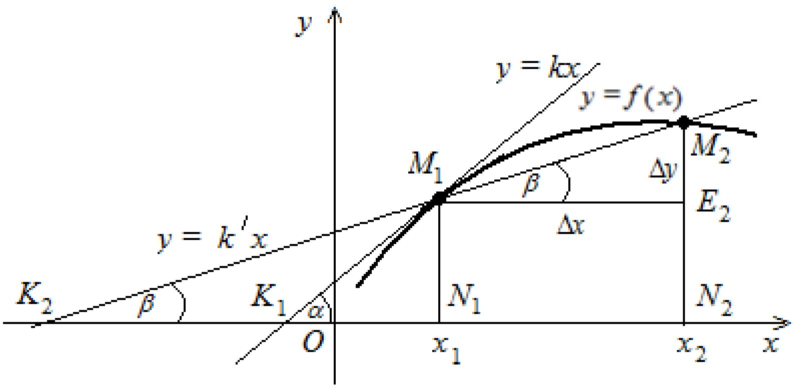

Рис. 9

Имеем: уравнение касательной K_1M_1: $y = kx$; уравнение секущей K_2M_2: $y = k^{'}x; x_2 - x_1 = \Delta x; f(x_2) - f(x_1) = \Delta y; tq\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = k^{'}; tq\alpha = k.$

Предположим, что точка M_1 остается неподвижной, а точка M_2, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к M_1. Тогда:

– секущая K_2M_2 поворачивается вокруг точки M_1, стремясь занять положение касательной;

– $x_2 \to x_1$, а следовательно, $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$;

– угол β стремится к углу $\propto$.

Тогда $k = tq\alpha = \lim\limits_{\beta\to\alpha} tq\beta = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^{'}(x)$. Итак, $tq\alpha = f^{'}(x)$.

Таким образом, пусть $f^{'}(x) > 0$, тогда $tq \propto > 0$, т. е. угол $\propto$ острый, а это возможно по определению 2 лишь при возрастании функции.

Если $f^{'}(x) < 0$, тогда $tq \propto < 0$, т. е. угол $\propto$ тупой, а это возможно лишь при убывании функции по определению 2.

Итак, возрастание или убывание функции в промежутке вполне определяется знаком производной этой функции. Решение неравенства $f^{'}(x) > 0$ определяет промежутки возрастания функции. Решение неравенства $f^{'}(x) < 0$ определяет промежутки убывания функции.

Точки, в которых производная $f^{'}(x) = 0$, называются критическими.

В связи со сказанным интересно проследить поведение функции в критических точках. С этой целью рассмотрим рис. 10–14.

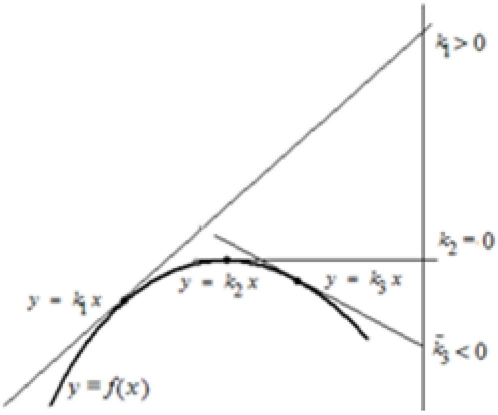

Рис. 10

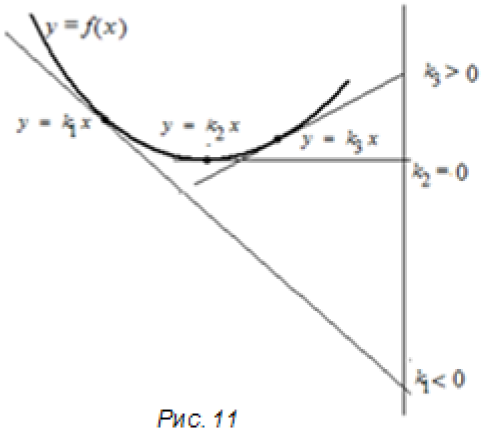

Рис. 11

На рис. 10 возрастание функции $(f^{'}(x) = k_1 > 0)$ сменяется на убывание $(f^{'}(x) = k_3 < 0)$. Решение уравнения $f^{'}(x) = k_2 = 0$ определяет точку максимума x_{max}.

На рис. 11 убывание функции $(f^{'}(x) = k_1 < 0)$ сменяется на возрастание $(f^{'}(x) = k_3 > 0)$. Решение уравнения $f^{'}(x) = k_2 = 0$ определяет точку минимума x_{min}.

На рис. 12 решение уравнения $f^{'}(x) = k_2 = 0$ определяет точку, при которой не меняется характер монотонности, функция возрастает, так как $f^{'}(x) \geq 0$ во всей области определения. В этом случае критическая точка является точкой перегиба.

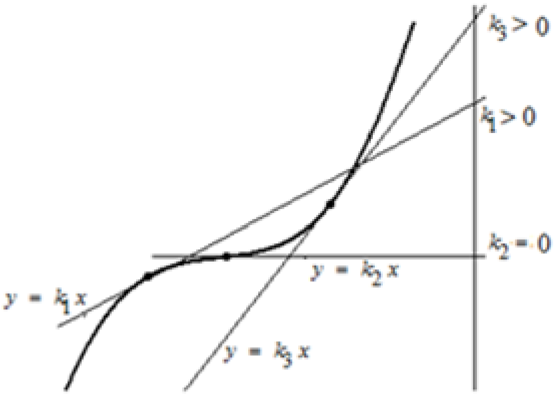

Рис. 12

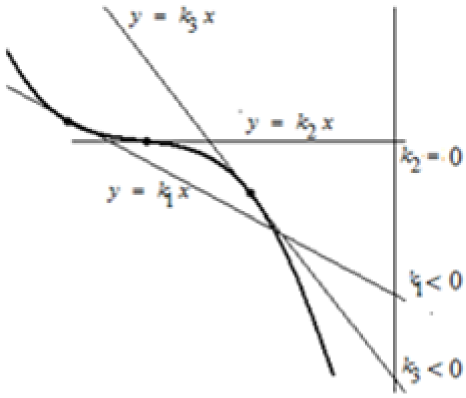

Рис. 13

На рис. 13 решение уравнения $f^{'}(x) = k_2 = 0$ определяет точку, при которой не меняется характер монотонности, функция убывает, так как $f^{'}(x) \leq 0$ во всей области определения. В этом случае критическая точка является точкой перегиба.

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Гилев В. Г. Исследование функций на монотонность // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16146.htm.

Особенностью функций на рис. 14 и 15 является то, что они монотонны на всей области определения и $f'(x) \neq 0$.

Во всех случаях на рис. 12–15 в точках перегиба меняется характер выпуклости графика функции.

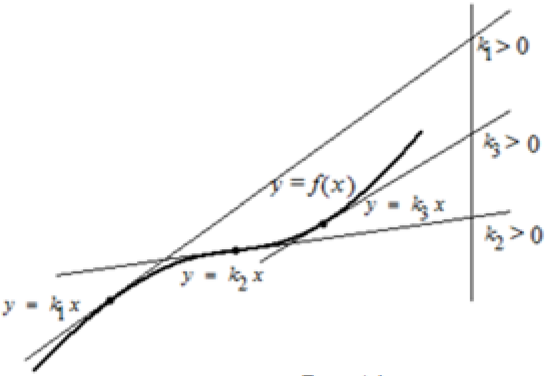

Рис. 14

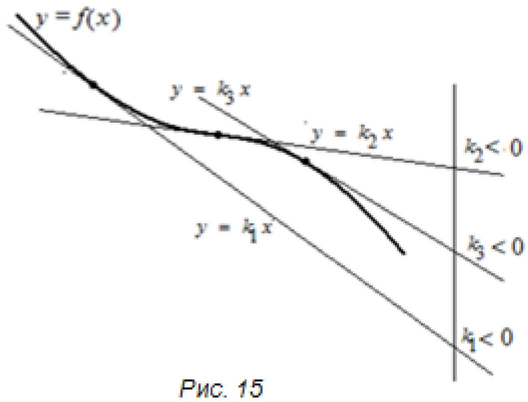

Рис. 15

Замечание. **1.** Для рациональных функций теорема 1 и теорема 2 взаимозаменяемы: функцию обобщения $\delta(x)$ можно заменить производной $f'(x)$, и наоборот.

На самом деле, пусть дана функция $y = f(x)$.

Тогда $\Delta(x_1;x_2) = f(x_2) - f(x_1) = B(x_1;x_2)\cdot A(x_1;x_2)$, где

$$B(x_1;x_2) > 0, A(x_1;x_2) \neq 0.$$

Для рациональных функций множитель $B(x_1;x_2) = x_2 - x_1 > 0$,

$$\Delta(x_1;x_2) = f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\cdot A(x_1;x_2).$$

Имеем: $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\cdot A(x_1;x_2); x_2 - x_1 = \Delta x;\ f(x_2) - f(x_1) = \Delta y$.

Таким образом, $\Delta y = \Delta x \cdot A(x_1;x_2)$. Значит, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x_1;x_2)$.Получаем:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{x_1\to x\\ x_2\to x\\ \Delta x\to 0}} A(x_1;x_2) = A(x) = \delta(x), \text{ откуда } f'(x) = \delta(x).$$

Итак, для рациональных функций функция обобщения $\delta(x)$ и производная $f'(x)$ совпадают. Существуют и нерациональные функции, для которых в разложении $\Delta(x_1;x_2)$ можно выделить множитель $B(x_1;x_2) = x_2 - x_1$. Например, $f(x) = \sqrt{x}$, тогда

$$\Delta(x_1;x_2) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})\cdot(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = (x_2 - x_1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}.$$

$$B(x_1;x_2) = (x_2 - x_1);\ A(x_1;x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}.$$

Найдем $\delta(x)$: $\delta(x) = A(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\delta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Найдем $f'(x)$:$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Итак, $\delta(x) = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Для трансцендентных функций такое представление выражения $\Delta(x_1;x_2)$ невозможно.

2. Несмотря на то что функции $\delta(x)$ и $f'(x)$ совпадают, получаются они различными способами: первая получается с использованием метода обобщения, а вторая – с использованием теории пределов. Но в основе их лежит операция предельного перехода.

При исследовании функции $y = f(x)$ на монотонность с использованием первой производной поступаем следующим образом.

Алгоритм исследования функции $y = f(x)$ на монотонность с использованием первой производной

1. Вычисляем производную $f'(x)$ данной функции.
2. Находим точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими* для функции $y = f(x)$.
3. Найденными точками область определения функции $y = f(x)$ разбивается на промежутки, на каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак.
4. Находим промежутки возрастания функции $y = f(x)$ решением неравенства $f'(x) > 0$.
5. Находим промежутки убывания функции $y = f(x)$ решением неравенства $f'(x) < 0$.
6. Находим критические точки решением уравнения $f'(x) = 0$.
7. Записываем промежутки монотонности с учетом критических точек.

3. ПРИМЕРЫ

1. Найти промежутки монотонности графика функции $f(x) = -x^3 - 3$: а) с использованием функции обобщения $\delta(x)$; б) с использованием первой производной $f'(x)$.

Решение

а) $f(x) - x^3 - 3$.

$$\Delta(x_1; x_2) = f(x_2) - f(x_1) = -x_2^3 + x_1^3 = -(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_2^2) =$$
$$= B(x_1; x_2) \cdot A(x_1; x_2), \text{ где } B(x_1; x_2) = x_2 - x_1 > 0, A(x_1; x_2) = -(x_2^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

Найдем функцию обобщения:

$$\delta(x) = A(x) = -(x^2 + x^2 + x^2) = -3x^2. \text{ Итак, } \delta(x) = -3x^2.$$
$$\delta(x) = 0 \text{ при } x = 0 - \text{критическая точка.}$$

$\delta(x) < 0$при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.Функция $f(x) = -x^3 - 3$ убывает при $x \in R$. В точке $x = 0$ нет смены монотонности: $x = 0$ – точка перегиба.

б) Определим первую производную функции $f(x) = -x^3 - 3$:

$f'(x) = -3x^2 < 0$.Функция убывает на всей области определения $x \in R$.

2. Исследовать на монотонность функцию $y = \sin x$: а) с использованием функции обобщения $\delta(x)$; б) с использованием первой производной $f'(x)$.

Решение

а) Пусть, с учетом периодичности функции $y = \sin x$,

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2} \text{ или } \frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{3\pi}{2}.$$

В силу свойств числовых неравенств в первом и во втором случаях:

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Имеем:

$$\Delta(x_1; x_2) = f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) =$$
$$= B(x_1; x_2) \cdot A(x_1; x_2), \text{ где } B(x_1; x_2) = 2\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0, A(x_1; x_2) = \cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right).$$

Найдем функцию обобщения:$\delta(x) = A(x) = \cos\left(\frac{x+x}{2}\right) = \cos\left(\frac{2x}{2}\right) = \cos x$.

Имеем, $\delta(x) = \cos x$.

$\delta(x) = 0;\ \cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ – критические точки.

$\delta(x) > 0; \cos x > 0; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ – функция $y = \sin x$ возрастает.

$\delta(x) < 0; \cos x < 0; \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ – функция $y = \sin x$ убывает.

Так как критические точки являются точками экстремума, имеем: функция синус возрастает на каждом из промежутков

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2\,\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\,\pi n\right],\ n\in Z$$

и убывает на каждом из промежутков

$$\left[\frac{\pi}{2}+2\,\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\,\pi n\right],\ n\in Z.$$

б) Определим первую производную функции $f(x)=\sin x$: $f'(x)=\cos x$.

Далее решение смотрите выше, так как $f'(x)=\delta(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен новый метод исследования функций на монотонность – метод обобщения. С помощью метода обобщения можно исследовать функции в полном объеме до изучения производной. О возможности использования метода обобщения в обучении математике в школе говорится в статье [2].

Ссылки на источники

1. Гилев В. Г. Методика исследования элементарных функций на монотонность и выпуклость графика методом обобщения // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2015. – № 04 (апрель). – URL: http://e-koncept.ru/2015/15102.htm.
2. Гилев В. Г. Об открытии метода обобщения при исследовании функций на монотонность и выпуклость графика // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2015. – Т. 6. – С. 51–55. – URL: http://e-koncept.ru/2015/65211.htm.

Valeriy Gilev,
Candidate of Pedagogic Sciences, Associate Professor at the chair of Mathematics, Informatics and Technique of Their Teaching, Ishim State Pedagogical Institute after P. P. Ershov, Dolgoprudny
Gilev.valery@gmail.com

The study of functions on monotonicity

Abstract. The paper considers the definition of monotonicity of the function using visual, verbal, analytical and geometric methods. The author formulates signs and appropriate ways to study functions on monotonicity using generalizations and first order derivative.

Key words: function, study, extrema, derivative of function, function of generalization.

References

1. Gilev, V. G. (2015). “Metodika issledovanija jelementarnyh funkcij na monoton-nost' i vypuklost' grafika metodom obobshhenija”, *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal “Koncept”,* № 04 (aprel'). Available at: http://e-koncept.ru/2015/15102.htm (in Russian).
2. Gilev, V. G. (2015). “Ob otkrytii metoda obobshhenija pri issledovanii funkcij na monotonnost' i vypuklost' grafika”, *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal “Koncept”,* t. 6, pp. 51–55. Available at: http://e-koncept.ru/2015/65211.htm (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	12.05.16	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	14.05.16
Принята к публикации *Accepted for publication*	14.05.16	Опубликована *Published*	28.07.16

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru