ISSN 2304-120X
Концепт
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Акимова И. Я. Метод интегрируемых комбинаций решения нормальных систем дифференциальных уравнений при обучении студентов технических вузов // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16154.htm.

ART 16154 **УДК 378.147:517.913**

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Акимова Ирина Яковлевна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва
irina_akimova19@mail.ru

Метод интегрируемых комбинаций решения нормальных систем дифференциальных уравнений при обучении студентов технических вузов

Аннотация. *Статья посвящена вопросам преподавания теории решения нормальных систем в курсе «Дифференциальные уравнения» и проблемам, которые возникают при изложении материала. При изучении дисциплины студенты сталкиваются с трудностями нахождения общего решения нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Одним из методов решения систем является метод выделения интегрируемых комбинаций, то есть получения из системы таких уравнений, которые можно проинтегрировать и получить первые интегралы. Их совокупность определит общее решение или общий интеграл системы. В связи с этим в статье рассматриваются нормальные системы ОДУ и их симметричные формы записи. Разбираются основные понятия: задача Коши, теорема существования и единственности решения нормальных систем ОДУ, первые интегралы систем. Подробно иллюстрируется методика нахождения интегрируемых комбинаций, первых интегралов и общих решений всевозможных систем на широком спектре задач. Статья будет полезна студентам технических университетов и преподавателям при проведении семинарских занятий по дисциплине «Дифференциальные уравнения».*
Ключевые слова: *нормальные системы, интегрируемые комбинации, первые интегралы.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

В отличие от алгебраических уравнений, где неизвестными являются числа, обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) относятся к более широкому классу функциональных уравнений, в которых неизвестной является функция (скалярная или векторная), заданная на некотором интервале.

Теория дифференциальных уравнений дает углубленное понимание процессов разной природы и служит средством для построения их математических моделей. Во многих случаях при изучении явлений природы или решении задач из различных областей естествознания не удается сразу определить функциональную зависимость между переменными величинами, характеризующими изучаемое явление, однако удается найти уравнение, связывающее неизвестную функцию и ее производные. Именно такие уравнения и называются дифференциальными.

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Ахметова Ф. Х., Акимова И. Я. Метод интегрируемых комбинаций решения нормальных систем дифференциальных уравнений при обучении студентов технических вузов // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16154.htm.

В теории ОДУ рассматривают также системы уравнений, которые состоят из *n* обыкновенных дифференциальных уравнений и такого же числа искомых функций. Задачи, приводящие к решению систем ОДУ, виды систем и методы их решения подробно описаны в работах [1–4]. С помощью систем ОДУ можно описать целый ряд физических процессов и построить ту или иную математическую модель. Поэтому студентам необходимо научиться решать такие системы, используя при этом эффективные методы нахождения общих решений, и давать качественную оценку полученным результатам.

1. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема Коши

При решении многих задач требуется найти функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, содержащих аргумент x, искомые функции и их производные.

Рассмотрим систему уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases}$$

где $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – неизвестные функции, x – аргумент, $f_1, \dots, f_n$ – функции, определенные в (n + 1)-мерной области **D**$\subseteq \boldsymbol{R}^{n+1}$.

Такая система, в левой части уравнений которой стоят производные первого порядка, а правые части не содержат производных, называется **нормальной системой.**

Решением нормальной системы на интервале (a, b) называется совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на (a, b) и обращающих уравнение системы (1) в тождество относительно $x \in (a, b)$.

Задача Коши для нормальной системы ОДУ формулируется следующим образом: задана точка$(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in$ **D**$\subseteq \boldsymbol{R}^{n+1}$, требуется найти определенное в окрестности точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$ решение $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ нормальной системы, удовлетворяющее при $x = x_0$условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0, (2)$$

которые называются начальными условиями для данной системы ОДУ, а $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ – начальными значениями.

Сформулируем теорему существования и единственности решения нормальной системы ОДУ, связанную с именем французского математика и механика Огюстена Луи Коши.

Теорема Коши. Пусть правые части $f_1, \dots, f_n$ нормальной системы определены в (n+1) – мерной области **D**$\subseteq \boldsymbol{R}^{n+1}$ изменения переменных $x, y_1, y_2, \dots, y_n$. Если в некоторой окрестности точки $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in$ **D** функции $f_1, \dots, f_n$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(i, j = 1, \dots, n)$ по переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$, то существует интервал $(x_0 - h < x < x_0 + h)$ изменения переменной x, в котором существует, и притом единственное, решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

2. Частное и общее решения системы ОДУ. Первые интегралы нормальной системы

Общим решением системы (1) называется совокупность функций

$$y_i = y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n), i = 1,2, \dots, n (3)$$

в области **D**, обращающих в тождества уравнения системы при любых допустимых значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ и в области, в которой выполнены условия теоремы Коши, из совокупности функций (3) можно получить решение задачи Коши, то есть для любой точки$(t_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in$ **D** существует совокупность значений параметров $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$, определяемая путем решения системы уравнений $y_i^0 = y_i\,(x_0, C_1^0, \dots,\ C_n^0\,), i = 1, \dots, n$, такая, что система уравнений $y_i = y_i\,(x, C_1^0, \dots,\ C_n^0), i = 1, \dots, n$ является решением задачи Коши для нормальной системы ОДУ с начальными значениями $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$. Решение задачи Коши называют частным решением нормальной системы ОДУ.

Интегралом нормальной системы ОДУ называется функция $\Psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{d\Psi}{dx}, \frac{\partial\Psi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial\Psi}{\partial y_n}$ в области **D**$\subseteq \boldsymbol{R}^{n+1}$ изменения переменных и принимающая при любых $x \in (a, b)$ постоянное значение при подстановке в нее произвольного решения системы.
Равенство $\Psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C$, где $\Psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ – интеграл нормальной системы, а C – произвольная постоянная, называется **первым интегралом** нормальной системы ОДУ (1).

Если найдены n независимых первых интегралов системы (1)

$$\Psi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Psi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_n,$$

то их совокупность неявно определяет общее решение или общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Чтобы проверить независимость n первых интегралов в области **D**, достаточно составить матрицу Якоби

$$\left\{\frac{\partial\Psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_j}\right\}, i, j = 1, \dots, n$$

и установить, что ее определитель в области **D** будет отличен от нуля.

3. Метод выделения интегрируемых комбинаций для решения систем дифференциальных уравнений

Одним из методов интегрирования систем дифференциальных уравнений является метод выделения интегрируемых комбинаций, то есть получения из системы (1) таких уравнений, которые можно проинтегрировать и получить первые интегралы. Их совокупность неявно определит общее решение или общий интеграл системы. Для выделения интегрируемых комбинаций из системы (1) ее удобнее записать в так называемой симметричной форме

$$\frac{dy_1}{f_1\,(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2\,(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dx}{1}$$

и использовать свойство равных дробей: если $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \cdots = \frac{A_n}{B_n} = \Upsilon$, то при любых множителях $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеет место равенство

$$\frac{\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n}{\lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_n B_n} = \Upsilon \ (4)$$

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{(z - y)^2} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{(z - y)^2} \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Запишем систему в симметричной форме

$$\frac{(z-y)^2 dy}{z} = \frac{(z-y)^2 dy}{y} = \frac{dx}{1}$$

Из равенства первых двух дробей получаем интегрируемую комбинацию $ydy = zdz$. Интегрируя, получаем первый интеграл системы $y^2 - z^2 = C_1$. Для нахождения другого первого интеграла используем свойство равных дробей. Положив $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, получим

$$\frac{(z-y)^2\,(dy - dz)}{(z-y)} = \frac{dx}{1}$$

После сокращения на множитель $(z-y)$ будем иметь вторую интегрируемую комбинацию $(z-y)d(z-y) = -dx$ и второй первый интеграл $(y-z)^2 + 2x = C_2$.

Пример 2. Найти частное решение (или частный интеграл) системы

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y},$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1, z(1) = -2$.

<u>Решение</u>. Используем свойство равных дробей, положив $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$,

$$\frac{d(x+y+z)}{0} = 1, \text{ то есть } d(x+y+z) = 0.$$

Проинтегрировав, получаем первый интеграл $x+y+z = C_1$. Выбирая $\lambda_1 = 2x, \lambda_2 = 2y$, $\lambda_3 = 2z$, приходим к равенству $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, откуда получаем еще один первый интеграл $x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2$. Подставим начальные условия в общий интеграл, а именно выделим интегральную кривую, проходящую через точку (1; 1; -2). Подставляя координаты точки в первые интегралы системы, найдем искомый частный интеграл, задаваемый уравнениями:

$$x + y + z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 6.$$

Пример 3. Решить систему

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}.$$

Решение. Последние две дроби представляют интегрируемую комбинацию $2dy=dz$, откуда получаем первый интеграл системы $2y-z=C_1$. При $\lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=1$. Получаем равную дробь

$$\frac{dz-dy-dx}{2-1-1-\sqrt{z-x-y}}=dy$$

или

$$\frac{d(z-y-x)}{\sqrt{z-y-x}}=-dy.$$

Интегрируя, найдем первый интеграл

$$2\sqrt{z-y-x}+y=C_2.$$

Совокупность первых интегралов

$$\begin{gathered}2y-z=C_1\\ 2\sqrt{z-y-x}+y=C_2\end{gathered}$$

задает общий интеграл системы.

4. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений при помощи первых интегралов

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n)\\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n)\end{cases}$$

с начальными условиями

$$y_1(x_0)=y_1^0, y_2(x_0)=y_2^0,\dots,y_n(x_0)=y_n^0.$$

Пусть $\Psi(x,y_1,y_2,\dots,y_n)=C$ – известный первый интеграл. Подставим начальные значения и найдем значение константы $C=C_0$. Предположим, что уравнение

$$\Psi(x,y_1,y_2,\dots,y_n)=C_0$$

можно разрешить в некоторой области **G**⊆**D**⊆ $\boldsymbol{R}^{n+1}$. Относительно одной из переменных, например, y_n: $y_n=\varphi(x,y_1,y_2,\dots,y_{n-1},C_0)$, где φ – непрерывно дифференцируемая функция переменных $x,y_1,y_2,\dots,y_{n-1}$. Подставим функцию y_n в первые $(n-1)$ дифференциальных уравнений

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Ахметова Ф. Х., Акимова И. Я. Метод интегрируемых комбинаций решения нормальных систем дифференциальных уравнений при обучении студентов технических вузов // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16154.htm.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, C_0)\right) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2\left(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, C_0)\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f_n\left(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, C_0)\right) \end{cases}$$

с начальными условиями $y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_{n-1}(x_0) = y_{n-1}^0$.

Решение этой задачи Коши $y_1 = y_1(x, C_0),\ y_2 = y_2(x, C_0), \dots,\ y_{n-1} = y_{n-1}(x, C_0)$позволяет получить решение исходной задачи Коши

$$y_1 = y_1(x, C_0), y_2 = y_2(x, C_0), \dots, y_{n-1} = y_{n-1}(x, C_0),$$
$$y_n = \varphi(x, y_1(x, C_0), \dots, y_{n-1}(x, C_0)).$$

Таким образом, при помощи первого интеграла порядок системы удается понизить на единицу.

Пример 4. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{yz} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x}{y^2} \end{cases},$$

при условии, что $y(0) = z(0) = 1$.

Решение. Запишем систему в симметричной форме:

$$\frac{yzdy}{x} = \frac{y^2dz}{x} = \frac{dx}{1}.$$

Первые две дроби представляют интегрируемую комбинацию после сокращения на $\frac{y}{z}$. Имеем $z\,dy = y\,dz$ или $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. Интегрируя, получаем первый интеграл $\frac{y}{z} = C_1$. Выразим y: $y = C_1 z$ и подставим во вторую дробь. Тогда вторая и третья дроби задают интегрируемую комбинацию

$$\frac{C_1^2 z^2 dz}{x} = dx$$

или $C_1^2\, z^2\, dz = xdx$. Интегрируя, получаем $C_1^2 \frac{z^3}{3} - \frac{x^2}{2} = C_2$. Исключаем C_1^2 : $C_1^2 = \frac{y^2}{z^2}$ и окончательно получаем $2y^2 z - 3x^2 = C_2$. Совокупность первых интегралов $\frac{y}{z} = C_1$ и $2y^2 z - 3\,x^2 = C_2$ задает общий интеграл системы. Из начальных условий найдем $C_1 = 1, C_2 = 1$.Тогда частный интеграл задачи Коши задается системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y}{z} = 1 \\ 2\,y^2 z - 3\,x^2 = 2\,. \end{cases}$$

Алгоритм построения интегрируемых комбинаций и вычисление первых интегралов нормальной системы дифференциальных уравнений позволяют существенно ускорить процесс нахождения общих и частных решений системы. На примерах показано, что с помощью первых интегралов удается понизить порядок системы дифференциальных уравнений на единицу и найти решение.

Ссылки на источники

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 2004. – 272 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. для втузов: в 2 т. Т. 2. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
3. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2005. – 736 с.
4. Агафонов С. А., Герман А. Д., Муратова Т. В. Дифференциальные уравнения: учеб. для вузов / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2014. – 347 с. – (Серия: Математика в техническом университете. Вып. VIII).

Faniya Akhmetova,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
dobrich2@mail.ru
Irina Akimova,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
irina_akimova19@mail.ru

Method integrable combinations of normal solutions of differential equations in training of technical university students

Abstract. The paper is devoted to teaching theory of normal systems solutions in the course “Differential Equations” and to the problems that arise in the presentation of the material. In studying the discipline, students face difficulties in finding the general solution of the normal systems of ordinary differential equations (ODE). One of the methods for solving systems is the method of allocation of integrable combinations, that is getting out of the system such equations that can be integrated and thus obtain the first integrals. Their aggregate determines the general decision or the general integral of the system. In this regard, the article describes the normal system of ODE and their symmetrical forms of recording. The basic concepts are interpreted: Cauchy problem, theorem of existence and uniqueness of normal ODE systems solutions, first integrals for systems. It illustrates in detail the method of finding integrable combinations, first integrals and general solutions of various systems on a wide range of tasks. The paper will be useful for students of technical universities and lecturers during seminars on the subject “Differential equations”.

Key words: normal systems, integrated combinations, first integrals.

References

1. Arnol'd, V. I. (2004). *Obyknovennye differencial'nye uravnenija*, Nauka, Moscow, 272 p. (in Russian).
2. Piskunov, N. S. (1985). *Differencial'noe i integral'noe ischislenie: ucheb. dlja vtuzov: v 2 t.* T. 2, Nauka, Moscow, 560 p. (in Russian).
3. Bermant, A. F. & Aramanovich, I. G. (2005). *Kratkij kurs matematicheskogo analiza*, 11-e izd., ster, Lan', St. Petersburg, 736 p. (in Russian).
4. Agafonov, S. A., German, A. D. & Muratova, T. V. (2014). *Differencial'nye uravnenija: ucheb. dlja vuzov*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow, 347 p. (Serija: Matematika v tehnicheskom universitete. Vyp. VIII) (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	05.07.16	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	08.07.16
Принята к публикации *Accepted for publication*	08.07.16	Опубликована *Published*	28.07.16

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2016
© Ахметова Ф. Х., Акимова И. Я., 2016