ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ласковая Т. А., Пелевина И. Н., Попова Е. М. Методика изложения темы «Многомерные случайные величины» в курсе «Теория вероятностей» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 12 (декабрь). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16273.htm.

ART 16273 **УДК 378.147:519**

Ласковая Татьяна Алексеевна,
старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
talaskovy@mail.ru

Пелевина Ирина Николаевна,
старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
pdv62@mail.ru

Попова Елена Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
elmipo@yandex.ru

Методика изложения темы «Многомерные случайные величины» в курсе «Теория вероятностей»

Аннотация. *В работе предлагается методика изложения темы «Многомерные случайные величины» в курсе «Теория вероятностей». Статья написана на основе многолетнего опыта преподавания теории вероятностей и будет полезна как студентам, так и преподавателям при проведении практических занятий. В ней отсутствуют доказательства теоретических фактов, однако приведен список литературы, к которому можно обратиться за более подробным объяснением. В работе разобраны два примера: один для дискретного случайного вектора, другой для непрерывного случайного вектора. В этих примерах найдены законы распределения и основные числовые характеристики, изучаемые в курсе теории вероятностей. Структурированный подход к изложению материала, сочетающий основные теоретические сведения и разбор типовых задач, поможет студентам в самостоятельной работе и при выполнении домашних заданий.*
Ключевые слова: *многомерные случайные величины, дискретный двумерный случайный вектор, непрерывный двумерный случайный вектор, закон распределения.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Теория вероятностей является важной частью образования выпускника любого технического университета. В природе нет ни одного физического явления, в котором бы не присутствовали в той или иной степени элементы случайности. Как бы точно и подробно ни были зафиксированы условия опыта, невозможно достигнуть того, чтобы при повторении опыта результаты полностью и в точности совпали. Результаты любых измерений и наблюдений – это случайные величины, так как измерительные приборы всегда дают погрешность. Контролируемые параметры выпускаемых изделий также случайные величины, так как станки и автоматы не могут выпускать абсолютно одинаковые изделия. Поэтому теория вероятностей, изучающая случайные величины, является методологией всех эмпирических наук.

В [1] была предложена методика изложения темы «Одномерные случайные величины». В настоящей статье приводится методика изложения темы «Многомерные случайные величины». Многомерные случайные величины возникают тогда, когда в опыте наблюдается не одна случайная величина, а несколько [2, 3].

Случайные векторы

Часто в эксперименте наблюдают не одну, а сразу несколько случайных величин. При этом с каждым элементарным исходом $\omega \in \mathbf{\Omega}$ связан набор числовых значений некоторых количественных параметров, то есть каждому элементарному исходу ω поставлен в соответствие некоторый числовой вектор.

Определение 1. Отображение $X(\omega) = (X_1(\omega), ..., X_n(\omega)) : \mathbf{\Omega} \to \mathbf{R}^n$ называется *n*-мерной случайной величиной, или *n*-мерным случайным вектором.

В случае двумерных или трехмерных случайных величин часто используют обозначение (*X,Y*) или (*X,Y,Z*) .

Например, результат измерения четырехугольного земельного участка ABCD (рис. 1) – это четырехмерный случайный вектор $X(\omega) = (X_1, X_2, X_3, X_4)$, где

X_1 – результат измерения стороны AB,

X_2 – результат измерения стороны BC,

X_3 – результат измерения стороны CD,

X_4 – результат измерения стороны AD.

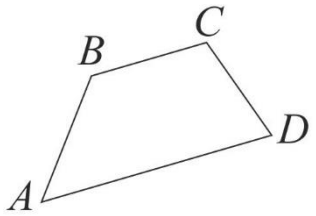

рис.1

Определение 2. Функцией распределения *n*-мерного случайного вектора $(X_1, ..., X_n)$ называется неслучайная функция *n* действительных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, определяемая как вероятность совместного выполнения *n* неравенств:

$$F(x) = F(x_1, ..., x_n) = P(X_1 < x_1, ..., X_n < x_n).$$

В частности, для двумерного случайного вектора (*X,Y*) имеем $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$.

Значение двумерной функции распределения в точке (a_1, a_2) согласно определению представляет собой не что иное, как вероятность попадания точки (X_1, X_2) в заштрихованный квадрат с вершиной в точке (a_1, a_2), представленный на рис. 2.

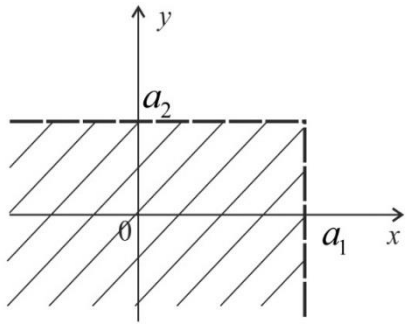

рис. 2

Теорема 1. Двумерная функция распределения $F(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.
2. $F(x, y)$ – неубывающая функция своих аргументов.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$.
4. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$.
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to +\infty} F(x, y) = 0$.

6. Вероятность попадания случайной точки (*X*,*Y*) в прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, может быть вычислена по формуле: $P\left(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2\right) = F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_2, y_1\right) - F\left(x_1, y_2\right) + F\left(x_1, y_1\right)$.

7. Функция $F\left(x, y\right)$ непрерывна слева по каждому из аргументов.

Дискретные двумерные случайные величины

Определение 3. Двумерный случайный вектор (*X*,*Y*) называется дискретным, если каждая его компонента является дискретной случайной величиной.

Перечень возможных пар $\left(x_i, y_j\right)$ значений компонент случайного вектора и соответствующих каждой такой паре вероятностей $p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$, удовлетворяющих условию $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$, называется законом распределения дискретного случайного вектора.

Закон распределения дискретного случайного вектора удобнее всего представить в виде табл. 1.

Таблица 1

X	Y				$P\left(X = x_i\right)$
	y_1	y_2	…	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	$P\left(X = x_1\right)$
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	$P\left(X = x_2\right)$
…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	$P\left(X = x_n\right)$
$P\left(Y = y_j\right)$	$P\left(Y = y_1\right)$	$P\left(Y = y_2\right)$	…	$P\left(Y = y_m\right)$	1

В последней строке таблицы стоят вероятности событий $\left(Y = y_j\right)$, равные сумме элементов *j*-го столбца: $P\left(Y = y_j\right) = p_{1j} + p_{2j} + \ldots p_{nj}$. В последнем столбце таблицы стоят вероятности событий $\left(X = x_i\right)$, равные сумме элементов *i*-й строки: $P\left(X = x_i\right) = p_{i1} + p_{i2} + \ldots p_{im}$.

Таким образом, первый и последний столбцы таблицы задают закон распределения случайной величины *X*, а первая и последняя строки – закон распределения случайной величины *Y*.

Условным законом распределения случайной компоненты *X* при условии, что компонента *Y* приняла значение y_j, называется совокупность значений компоненты *X* и соответствующих этим значениям условных вероятностей

$$P\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(Y = y_j\right)}.$$

Зададим условный закон распределения *X* при условии, что $Y = y_j$, в виде следующей табл. 2:

Таблица 2

X	x_1	…	x_n
$P(X \mid Y = y_j)$	$\dfrac{p_{1j}}{P(Y = y_j)}$	…	$\dfrac{p_{nj}}{P(Y = y_j)}$

Дискретные случайные величины *X* и *Y*, принимающие значения $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_m$ соответственно, называются независимыми, если $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)\cdot P(Y = y_j)$.

В противном случае дискретные случайные величины называются зависимыми.

Пример 1. Дважды бросается игральная кость. Случайная величина *X* – число появлений тройки, *Y* – число появлений грани с номером, кратным 3. Требуется:

1) описать закон распределения случайного вектора (*X*,*Y*);
2) описать закон распределения компонент *X* и *Y*;
3) описать условный закон распределения *X* при условии, что *Y* = 1;
4) установить, зависимы или независимы и X и Y;
5) описать функцию распределения вектора (*X*,*Y*) .

Решение:

1) Закон распределения случайного вектора (*X*,*Y*) удобно задать табл. 3:

Таблица 3

X	Y			$P(X = i)$
	0	1	2	
0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{10}{36}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(Y = j)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

Нетрудно заметить, что $p_{10} = p_{20} = p_{21} = 0$.

2) В данной задаче проще найти одномерные законы распределения компонент случайного вектора.

Событию $(X = i), i = 0,1,2$, соответствует вероятность того, что в двух опытах будет *i* успехов, вычисленная по формуле Бернулли, при этом $p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}$. Итак,

$$P(X = 0) = C_2^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36},\ P(X = 1) = C_2^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{10}{36},\ P(X = 2) = C_2^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{36}.$$

Событию $(\mathrm{Y}=j)$, $j=0,1,2$, соответствует вероятность того, что в двух опытах будет *j* успехов, вычисленная по формуле Бернулли, при этом $p=\frac{1}{3}, q=\frac{2}{3}$, то есть $P(Y=0)=C_2^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$, $P(Y=1)=C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$, $P(Y=2)=C_2^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{9}$.

Заполняем последнюю строку и последний столбец таблицы. Учитывая, что $P(y=0)=p_{00}+p_{10}+p_{20}$, получаем $\frac{4}{9}=p_{00}+0+0$, т. е. $p_{00}=\frac{4}{9}$. Далее, $P(y=2)=p_{20}+p_{21}+p_{22}$, т. е. $p_{22}=\frac{1}{36}$. Нетрудно увидеть, что достаточно вычислить какую-нибудь вероятность p_{ij} из четырех оставшихся. Вычислим, например, p_{11}. Очевидно, что общее число исходов в данном опыте равно $N=36$. Событию $(X=1, Y=1)$ благоприятствуют исходы: (3;1), (3;2), (3;4), (3;5), (1;3), (2;3), (4;3), (5;3), причем $p_{11}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$. Оставшиеся клетки заполняем следующим образом: $p_{01}=\frac{4}{9}-\frac{2}{9}=\frac{2}{9}$; $p_{12}=\frac{10}{36}-\frac{2}{9}=\frac{1}{18}$; $p_{02}=\frac{1}{9}-\frac{1}{36}-\frac{1}{18}=\frac{1}{36}$.

3) Условный закон распределения *X*, при условии, что *Y* = 1, задается табл. 4:

Таблица 4

$X\|Y=1$	0	1	2
$P(X=i\|Y=1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

4) Случайные величины X и Y зависимы, так как, например, $p_{21}=P(X=2,Y=1)=0\neq P(X=2)\cdot P(Y=1)=\frac{1}{36}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{81}$.

5) Как уже отмечалось, значение функции распределения в каждой фиксированной точке (*x,y*) равно вероятности попадания в область $\{(\mathrm{X},\mathrm{Y}):\mathrm{X}<x,\mathrm{Y}<y\}$. Таким образом, значение функции распределения $F(x,y)$ равно сумме вероятностей тех возможных значений вектора (x_i,y_j), которые попадают внутрь указанной области. Итак, функция распределения имеет вид:

1) если $x\leq 0$ или $y\leq 0$, то $F(x,y)=0$;

2) если $x>0$ и $0<y\leq 1$, то $F(x,y)=\frac{4}{9}$;

3) если $0<x\leq 1$ и $1<y\leq 2$, то $F(x,y)=\frac{2}{3}$;

4) если $0<x\leq 1$ и $y>2$, то $F(x,y)=\frac{25}{36}$;

5) если $x>1$ и $1<y\le 2$, то $F(x,y)=\frac{8}{9}$;

6) если $0<x\le 2$ и $y>2$, то $F(x,y)=\frac{35}{36}$;

7) если $x>2$ и $y>2$, то $F(x,y)=1$.

Непрерывные двумерные случайные векторы

Определение 4. Двумерный случайный вектор (*X, Y*) называется непрерывным, если функция распределения $F(x,y)$ непрерывна в $\mathbf{R}^2$ и существует такая неотрицательная интегрируемая по Риману в $\mathbf{R}^2$ функция $f(x,y)$, называемая плотностью распределения вероятностей случайного вектора (*X,Y*), что

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x} ds \int_{-\infty}^{y} f(s,t)dt .$$

Плотность распределения вероятностей обладает следующими свойствами:

1. $f(x,y)\ge 0,\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)dt=1$.
3. Если *(x,y)* – точка непрерывности плотности $f(x,y)$, то $f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$.
4. Если (*X,Y*) – непрерывный случайный вектор, то вероятность попадания случайной точки (*X,Y*) в область $D\subset\mathbf{R}^2$ определяется формулой $P\big((x,y)\in D\big)=\iint_D f(x,y)dxdy$.
5. Плотности распределения вероятностей компонент случайного вектора представляются в виде интегралов от совместной плотности:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx .$$

Определение 5. Условной плотностью распределения компоненты *X*, при условии, что компонента *Y* приняла определенное значение *y*, называется функция $f(x|y)$ действительной переменной *x*, определенная для всех $x\in\mathbf{R}$ следующей формулой:

$$f_X(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Аналогично: $f_Y(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ для всех $y\in\mathbf{R}$ и всех $x\in\mathbf{R}$.

Определение 6. Непрерывные случайные величины *X* и *Y* называются независимыми, если совместная плотность распределения является произведением одномерных плотностей, то есть $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ для всех *x* и *y*.

Определение 7. Случайный вектор (*X*,*Y*) называется равномерно распределенным в области $D \subset \mathbf{R}^2$, если двумерная плотность распределения имеет вид $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$, где S_D – площадь области *D*.

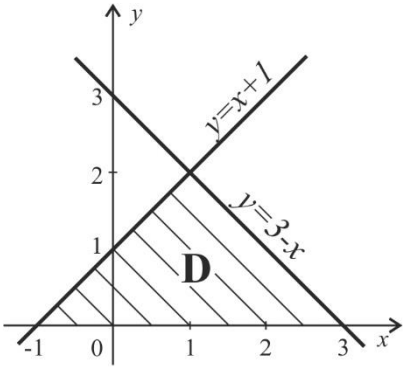

рис.3

Пример 2. Случайный вектор (*X*,*Y*) равномерно распределен в области *D*, ограниченной прямыми $y=x+1$, $y=3-x$ и $y=0$.

Найти: 1) двумерную плотность распределения; 2) одномерные плотности распределения; 3) определить, зависимы или нет случайные компоненты *X* и *Y*.

Решение:

1) Площадь области *D* (рис. 3) равна $S_D=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4$. Двумерная плотность распределения имеет вид $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$.

2) Найдем одномерные плотности распределения. По свойству 5 плотность распределения $f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$. Если $x<-1$ или $x>3$, то $f_X(x)=0$. Если $-1\le x<1$, то $f_X(x)=\int\limits_0^{x+1}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}(x+1)$. Если $1\le x<3$, то $f_X(x)=\int\limits_0^{3-x}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}(3-x)$. Аналогично, $f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$. Если $y<0$ или $y\ge 2$, то $f_Y(y)=0$. Если $0\le y<2$, то

$$f_Y(y)=\int\limits_{y-1}^{3-y}\frac{1}{4}dy=\frac{1}{4}(3-y-y+1)=\frac{1}{4}(4-2y)=\frac{1}{2}(2-y).$$

3) Нетрудно увидеть, что $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$, то есть *X* и *Y* зависимы.

Числовые характеристики случайных векторов

Определение 8. Начальным моментом порядка *k*+*s* случайного вектора (*X*,*Y*) называется действительное число

$$\nu_{k,s}=M\left(x^k\cdot y^s\right)=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j x_i^k\cdot x_j^s\cdot p_{ij} & \text{,если } (X,Y) \text{ - дискретный случайный вектор}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k\cdot y^s\cdot f(x,y)dxdy & \text{,если } (X,Y) \text{ - непрерывный случайный вектор}\end{cases}$$

В частности, $\nu_{1,0}=M(X)$, $\nu_{0,1}=M(Y)$.

Определение 9. Числовой вектор $(\nu_{1,0};\nu_{0,1})=(M(X);M(Y))$ называется математическим ожиданием, или центром рассеивания случайного вектора (*X*,*Y*).

Определение 10. Центральным моментом порядка *k*+*s* случайного вектора (*X*,*Y*) называется действительное число

$$\mu_{k,s}=M\left(x^k\cdot y^s\right)=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j\left(x_i-M(X)\right)^k\left(y_i-M(\mathrm{Y})\right)^s p_{ij}, \\ \qquad \text{если } (X,Y) \text{ - дискретный случайный вектор} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x-M(X)\right)^k\left(y-M(\mathrm{Y})\right)^s f(x,y)\,dxdy\ , \\ \qquad \text{если } (X,Y) \text{ - непрерывный случайный вектор}\end{cases}$$

Заметим, что $\mu_{2,0}=D(X)$, $\mu_{0,2}=D(Y)$.

Определение 11. Центральный момент $\mu_{1,1}$ называется ковариацией, или корреляционным моментом, и обозначается $\operatorname{cov}(X,Y)$ или $k_{X,Y}$. Итак, $\operatorname{cov}(X,Y)=M\left[\left(X-M(\mathrm{X})\right)\left(Y-M(Y)\right)\right]=M(X\cdot Y)-M(\mathrm{X})M(Y)$.

Ковариация – это число, которое характеризует степень зависимости между случайными величинами *X* и *Y* , а именно линейной зависимости.

Определение 12. Ковариационной матрицей случайного вектора (*X*,*Y*) называется матрица $\begin{pmatrix} D(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(X,Y) & D(Y)\end{pmatrix}$.

Определение 13. Коэффициентом корреляции случайных величин *X* и *Y* называется действительное число $r_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$.

Свойства коэффициента корреляции:

1) $|r_{XY}|\le 1$;
2) $r_{XY}=1$, если и только если $Y=aX+b,\ a>0$;
   $r_{XY}=-1$, если и только если $Y=aX+b,\ a<0$.

Пример 3. Дважды бросается монета. Найти r_{XY}, где *X* – число выпадений герба, а *Y* – число выпадений цифры.

Решение: Нетрудно видеть, что $Y=2-X$. Следовательно, по свойству 2) коэффициент корреляции $r_{XY}=-1$.

Найдем ковариационную матрицу и коэффициент корреляции для случайных величин *X*, *Y* из примеров 1 и 2. Продолжая пример 1, получим:

$$M(X)=0\cdot\frac{25}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+2\cdot\frac{1}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}\ ;$$

$$M(Y)=0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\ ;$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=0\cdot\frac{25}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+4\cdot\frac{1}{36}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{14}{36}-\frac{1}{9}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}\ ;$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+4\cdot\frac{1}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\ ;$$

$$M(X\cdot Y)=\sum_i\sum_j x_i\cdot x_j\cdot p_{ij}=0\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{36}\right)+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{1}{18}+4\cdot\frac{1}{36}=\frac{4}{9}\ ;$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(X\cdot Y)-M(\mathrm{X})M(Y)=\frac{4}{9}-\frac{2}{9}=\frac{2}{9}.$$

Ковариационная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} D(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(X,Y) & D(Y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}.$

Коэффициент корреляции: $r_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\dfrac{2/9}{\sqrt{5/18}\sqrt{4/9}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}.$

Продолжая пример 2, получим:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)dx=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{4}(x+1)dx+\int_{1}^{3}x\cdot\frac{1}{4}(3-x)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\frac{1}{4}\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{3}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{10}{3}\right)=1.$$

Этот факт следует также из геометрических соображений.

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f_Y(y)dx=\int_{0}^{2}y\cdot\frac{1}{4}(4-2y)dy=\frac{1}{4}\left(2y^2-\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{1}{4}\left(8-\frac{16}{3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}=\frac{2}{3}.$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{4}(x+1)dx+\int_{1}^{3}x^2\cdot\frac{1}{4}(3-x)dx-1^2=\frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\frac{1}{4}\left(x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{1}^{3}-1=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{3}{2}-1=\frac{2}{3}.$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=\int_{0}^{2}y^2\cdot\frac{1}{4}(4-2y)dy-\frac{4}{9}=\frac{1}{4}\left(\frac{4y^3}{3}-\frac{2y^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2}-\frac{4}{9}=\frac{8}{3}-2-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}.$$

$$M(X\cdot Y)=\iint_D xy\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^2 dy\int_{y-1}^{3-y}xy\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\int_0^2 y\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{y-1}^{3-y}dy=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2 y\left((3-y)^2-(y-1)^2\right)dy=\frac{1}{8}\int_0^2 y(8-4y)dy=\frac{1}{8}\left(4y^2-\frac{4y^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{1}{8}\left(16-\frac{32}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(X\cdot Y)-M(\mathrm{X})M(Y)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0.$$

Коэффициент корреляции $r_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=0.$

Таким образом, *X* и *Y* зависимы, но не коррелированы.

Методика, предложенная в статье, позволит достаточно быстро сформировать прочные навыки решения задач по теме «Многомерные случайные величины» и поможет преподавателям и студентам при подготовке к практическим занятиям.

ISSN 2304-120X
Концепт
научно-методический электронный журнал

Ласковая Т. А., Пелевина И. Н., Попова Е. М. Методика изложения темы «Многомерные случайные величины» в курсе «Теория вероятностей» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 12 (декабрь). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16273.htm.

Ссылки на источники

1. Косова А. В., Пелевина И. Н., Попова Е. М. Методика изложения темы «Случайные величины» в курсе «Теория вероятностей» // Электронный научно-технический журнал «Инженерный вестник» / МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 2015. – № 6. – URL: http://engbul.bmstu.ru/doc/777361.html.
2. Печинкин А. В., Тескин О. И., Цветкова Г. М. и др. Теория вероятностей: учеб. для вузов / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана, 2004. – Вып. XVI. – 456 с. – (Сер. Математика в техническом университете).
3. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / под ред. А. В. Ефимова. – М.: Наука, 1990. – 428 с.

Tatiana Laskovaya,
Senior lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
talaskovy@mail.ru
Irina Pelevina,
Senior lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
pdv62@mail.ru
Elena Popova,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
elmipo@yandex.ru

The method of the theme "Multivariate random variable" presentation in the course "Probability theory"

Abstract. The paper deals with the method of the theme "Multivariate random variable" presentation in the course "Probability theory". The paper is based on experience of teaching probability theory and it will be useful for both students and teachers for conducting practical classes. It lacks proof of theoretical facts, however, has a list of references that can be consulted for more detailed explanation. The work covers two examples: one for a discrete random vector, the other for a continuous random vector. These examples found the laws of distribution and main numerical characteristics studied in the course of probability theory. A structured approach to the material combining basic theoretical information and analysis of typical tasks will help students in independent and homework work.

Key words: multivariate random variables, discrete two-dimensional random vector, continuous two-dimensional random vector, distribution law.

References

1. Kosova, A. V., Pelevina, I. N. & Popova, E. M. (2015). "Metodika izlozhenija temy "Sluchajnye velichiny" v kurse "Teorija verojatnostej", *Jelektronnyj nauchno-tehnicheskij zhurnal "Inzhenernyj vestnik",* MGTU im. N. Je. Baumana, № 6. Available at: http://engbul.bmstu.ru/doc/777361.html (in Russian).
2. Pechinkin, A. V., Teskin, O. I., Cvetkova, G. M. et al. (2004). *Teorija verojatnostej: ucheb. dlja vuzov,* Izd-vo MGTU im N. Je. Baumana, vyp. HVI, Moscow 456 p. (Ser. Matematika v tehnicheskom universitete) (in Russian).
3. Efimov, A. V. (ed.) (1990). *Sbornik zadach po matematike dlja vtuzov. Ch. 3. Teorija verojatnostej i matematicheskaja statistika: ucheb. posobie,* Nauka, Moscow, 428 p. (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	14.12.16	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	16.12.16
Принята к публикации *Accepted for publication*	16.12.16	Опубликована *Published*	30.12.16

ISSN 2304-120X
12
9 772304 120166
www.e-koncept.ru

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2016
© Ласковая Т. А., Пелевина И. Н., Попова Е. М., 2016