ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Карасева Р. Б. Решение задач исследовательского характера при изучении математики в вузе // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 12 (декабрь). – 0,2 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16266.htm.

ART 16266 **УДК 372.851:517.16**

Карасева Римма Борисовна,
кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики ФГБОУ ВПО «Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия», г. Омск
karaseva_rb@mail.ru

Решение задач исследовательского характера при изучении математики в вузе

Аннотация. *Умение решать задачи исследовательского характера является одной из основных компетенций современного инженера. Обсуждение на занятиях математикой идей решения прикладных задач повышает профессиональную компетентность будущих инженеров. В статье рассматриваются задачи о преследовании в ограниченной области, которые могут быть использованы при изучении математики в техническом вузе. При решении задач используются основные свойства числовых рядов. Рассмотрение подобных задач на практических занятиях математикой облегчит восприятие сложного теоретического материала студентами.*
Ключевые слова: *сходимость рядов, высшая математика, компетентность.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Введение в программу обучения задач исследовательского характера [1] вызывает у студентов интерес к изучению предмета, помогает формированию базовых математических компетенций, закладывает навыки к самообразованию [2, 3].

Фундаментальность изучения математики является давней традицией высшего образования в России. Процесс фундаментализации образования базируется на изучении теоретических основ дисциплины, что зачастую представляется обучающимся чрезвычайно сложным и непонятным. Это происходит из-за абстрактности математических понятий, использования сложных преобразований, за которыми становится уже не видна красота предмета и возможности изучаемого раздела. Введение в программу обучения занимательных задач позволяет преодолеть эти сложности [4].

В результате студент приобретает хорошие знания по математике, овладевает приемами исследования прикладных задач. Происходит сближение процесса обучения и научной деятельности. Организация научно-исследовательской работы студентов приобретает первостепенное значение в свете реализации стандартов высшего образования последнего поколения. Согласно образовательным стандартам, студент вуза должен овладеть научными методами познания окружающего мира, должен быть склонен к инновационной деятельности, творчеству.

Первый этап в достижении этих целей – проявление заинтересованности в изучении теоретических основ дисциплины. Федеральные государственные образовательные стандарты высшего образования по математике требуют введения в программу обучения задач исследовательского характера, что способствует формированию у студентов познавательной деятельности, помогает научиться применять сведения из теории математики на практике. В качестве иллюстрации приведем несколько задач, решение которых требует нестандартного применения известных фактов из теории рядов.

Зададим две точки. Обозначим их так: *Л* – лиса, *С* – собака. Задача собаки – поймать лису, задача лисы – убежать от собаки. Считаем, что собака поймает лису тогда, когда точки *С* и *Л* совместятся. Введем условие: пусть скорости собаки и лисы будут одинаковыми. Покажем, что лиса всегда сможет убежать от собаки.

Задача 1. Пусть в начальный момент собака будет находиться в центре круга *O*, лиса – в точке $Л_0$ на расстоянии r_0 от центра, где r_0 меньше радиуса круга r. Условимся, что собака побежит так, чтобы всегда быть на отрезке *ОЛ*. Покажем, что лиса может выбрать траекторию бега так, что собака не сможет ее догнать.

Для решения задачи будем строить ломаные, состоящие из бесконечного множества всё более коротких звеньев. Нам нужно, чтобы эти ломаные имели бесконечную длину, но целиком помещались внутри круга. Обозначим $a^2 = r^2 - r_0^2$. Теперь построим ломаную L (рис. 1): $Л_0Л_1 = \frac{a}{2}$; $Л_0Л_1 \perp ОЛ_0$; $Л_1Л_2 = \frac{a}{3}$; $Л_1Л_2 \perp ОЛ_1$; …; $Л_{m-1}Л_m = \frac{a}{m}$; $Л_{m-1}Л_m \perp ОЛ_{m-1}$

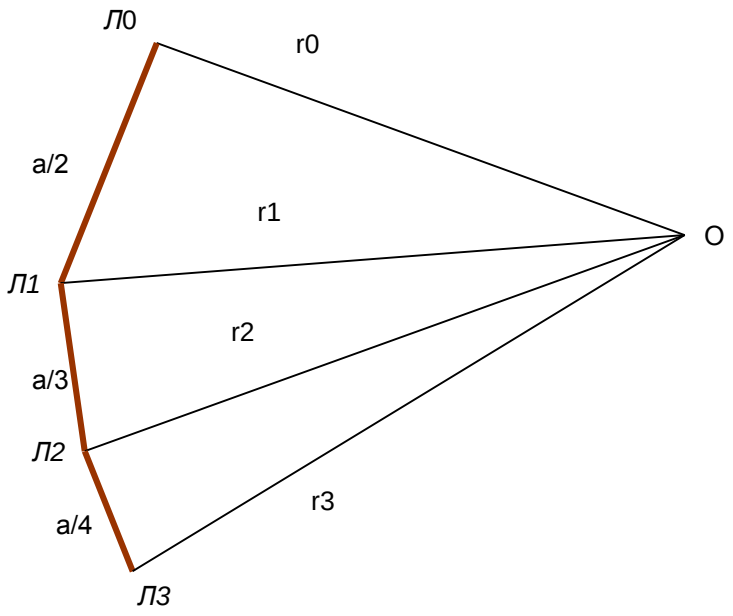

Рис. 1

Построенная ломаная обладает следующим свойствами:

1. Ломаная не выходит за пределы круга. Так как $ОЛ_m^2 = ОЛ_{m-1}^2 + Л_{m-1}Л_m^2$, то при любом *m* имеем:

$$ОЛ_m^2 = r_0^2 + \frac{a^2}{2^2} + \frac{a}{3^2} + \ldots + \frac{a^2}{(m+1)^2} = r_0^2 + a^2 \cdot \sum_{k=2}^{m+1} \frac{1}{k^2} < r_0^2 + a^2 = r^2.$$

Здесь использована оценка частичной суммы сходящегося ряда:

$$\sum_{k=2}^{m+1} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1.$$

2. Поскольку $Л_0Л_1 + Л_1Л_2 + \ldots + Л_{m-1}Л_m = \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \ldots + \frac{a}{m+1}$ и так как гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ является расходящимся, то (при больших *m*) сумма длин первых

m звеньев ломаной может быть сколь угодно велика. Таким образом, ломаная L имеет бесконечную длину.

3. По построению каждое звено ломаной L перпендикулярно радиусу.

Перейдем к решению поставленной задачи. Лиса сумеет спастись, если будет бежать по ломаной L. Так как $Л_0Л_1 \perp ОЛ_0$, то собака не может поймать лису на $Л_0Л_1$. Допустив противное, мы нашли бы на $Л_0Л_1$ такую точку *Л*, что расстояние $Л_0Л$ больше расстояния *ОЛ*, но этого не может быть, так как перпендикуляр $Л_0Л$ короче наклонной *ОЛ*.

Обозначим через C_1 точку, в которую побежит собака, когда лиса окажется в точке $Л_1$. Так как $C_1 \in ОЛ$, а $Л_1Л_2 \perp ОЛ_1$, $Л_1Л_2 \perp C_1Л_1$, то собака не может поймать лису, пока та находится и на $Л_1Л_2$. Это продолжается на каждом последующем звене ломаной: $Л_mЛ_{m+1} \perp C_mЛ_m$, и собака не может поймать лису на отрезке $Л_mЛ_{m+1}$ (ни при каком m). Так как общая длина L бесконечна, то бесконечным будет и время, которое лиса будет бежать по ней. Итак, ни за какое конечное время собака не сможет поймать лису.

Задача 2. Пусть теперь собака и лиса находятся в двух произвольных (разумеется, различных) точках C_0 и $Л_0$ внутри круга радиуса *r*. Докажем, что, как бы ни вела себя собака, лиса сможет убежать от неё.

Прежде всего, лиса «строит» описанную выше ломаную L, но бежит вдоль другой ломаной L′, зависящей от того, что делает собака. Опишем построение ломаной L′ (см. рис. 2).

Сначала выберем точку $Л_0'$. Проведём через точку $Л_0$ прямую l_0, перпендикулярную $C_0Л_0$. Пусть точка M_0 является снованием перпендикуляра, опущенного из *O* на l_0. Отложим на l_0 точку $Л_0'$ так, чтобы выполнялось равенство $M_0Л_0' = Л_0Л_1$, где $Л_0Л_1$ – первое звено ломаной L.

Поэтому $Л_0Л_0' \geq Л_0Л_1$ и $Л_0Л_0'^2 = ОM_0^2 + M_0Л_1'^2 \leq ОЛ_0^2 + Л_0Л_1^2 = ОЛ_1^2$.

Теперь выберем точку $Л_{m+1}'$. Из точки $Л_0$ лиса бежит в $Л_1'$. Так как $Л_0Л_1' \perp C_0Л_0$, то, пока лиса находится на $Л_0Л_1$, собака не сможет поймать её. Обозначим через C_1 точку, в которую прибежит собака, когда лиса достигнет точки $Л_1'$. Из $Л_1'$ лиса должна бежать в $Л_2'$. Выбор этой точки опишем сразу в общем виде. Пусть собака и лиса находятся в точках C_m и $Л_m$. Объясним, как теперь выбрать $Л_{m+1}'$ (см. рис. 3).

Проведём через $Л_m'$ прямую l_m, перпендикулярную $C_mЛ_m'$. Пусть M_m – основание перпендикуляра, опущенного из точки *O* на l_m. Точку $Л_{m+1}'$ выберем на продолжении $Л_m'M_m$ на расстоянии $Л_mЛ_{m+1}$ от точки M_m (где $Л_mЛ_{m+1}$ – (*n* + 1)-е звено ломаной L). Таким образом, $Л_m'Л_{m+1}' \geq M_mЛ_{m+1}' = Л_mЛ_{m+1}$.

Теперь оценим $ОЛ_{m+1}'$. Допустим, что точку $Л_m'$ нам удалось выбрать так, что $ОЛ_m' \leq ОЛ_m$, и выполняется неравенство

$$ОЛ_{m+1}'^2 = ОM_m^2 + M_mЛ_{m+1}'^2 \leq ОЛ_m^2 + Л_mЛ_{m+1}^2 = ОЛ_{m+1}^2.$$

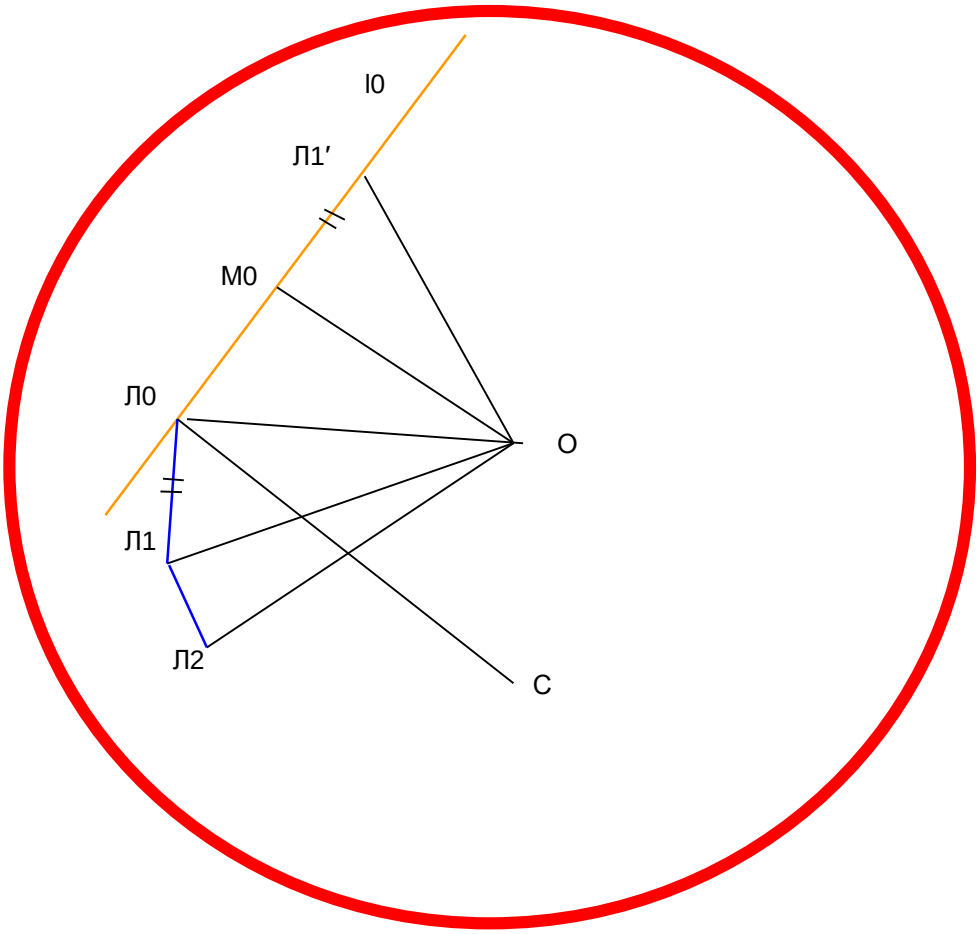

Рис. 2

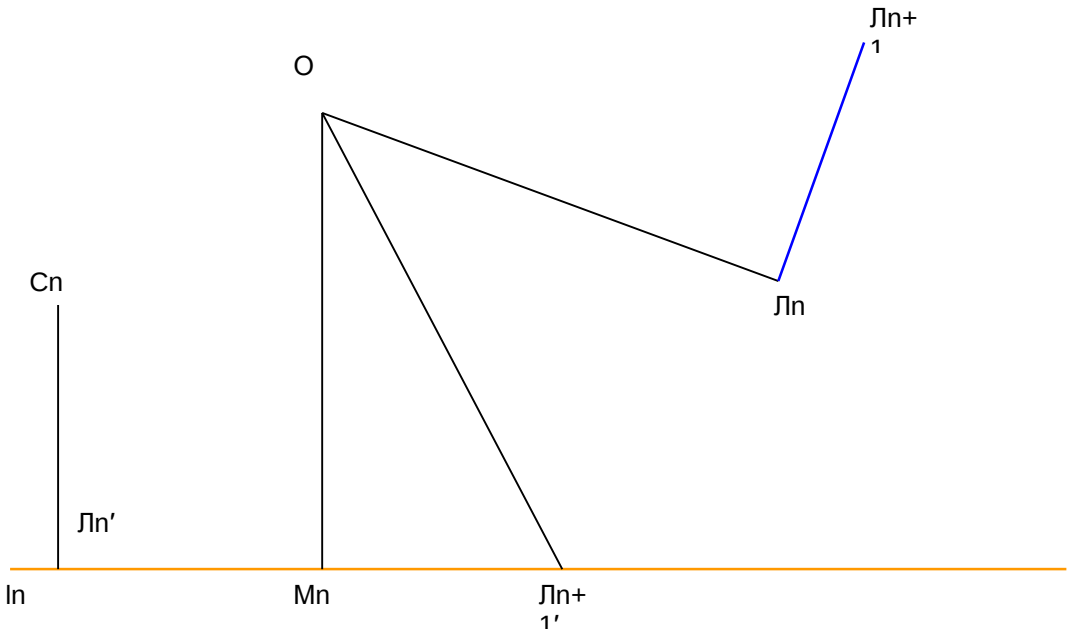

Рис. 3

Получили оценку $ОЛ'_{m+1} \le ОЛ_{m+1}$. Итак, каждое звено ломаной L′ не короче соответствующего звена L, а каждая вершина L′ расположена не дальше от центра, чем соответствующая вершина L: $Л'_m Л'_{m+1} \ge Л_m Л_{m+1}$, $ОЛ'_{m+1} \le ОЛ_{m+1}$.

Иначе говоря, ломаная L′ имеет бесконечную длину, но целиком помещается в круге . По построению $С_m Л'_m \perp Л_m Л'_{m+1}$ при любом *m*. Значит, собака по-прежнему не сможет поймать лису. Таким образом, как бы ни вела себя собака, лиса сможет убежать от неё.

Отметим, что задачи такого типа вызывают интерес у студентов. Упражнения по доказательству сходимости и расходимости рядов, используемые в решении, выполняются с энтузиазмом, поэтому решения хорошо запоминаются. Отметим, что можно доказать, что лиса убегает от собаки также в любом сколь угодно малом секторе. Доказывается, что две собаки могут согласованными действиями поймать лису [5]. Можно переформулировать задачу для погони в трехмерном, а также в *n*-мерном пространстве.

Решение студентами задач исследовательского характера является одним из первых шагов в раскрытии творческого потенциала студента, который вызывает у него интерес к науке. Это поможет разнообразить набор выработанных за время учебы компетенций [6].

Ссылки на источники

1. Карасева Р. Б. Повышение уровня математической компетентности студента при введении в процесс обучения задач исследовательского характера // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 3 (март). – С. 16–20. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16042.htm.
2. Карасева Р. Б. Тенденции современного математического образования // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2015. – № 3. – С. 45–47.
3. Карасева Р. Б. Математика в системе образования // Гуманитарные и социально-экономические проблемы развития современного общества: сб. науч. тр. (посвящ. 85-летию СибАДИ) / под общ. ред. В. П. Плосконосовой. – Омск, 2015. – С. 123–127.
4. Карасева Р. Б. Высшее образование и наука // Развитие дорожно-транспортного и строительного комплексов и освоение стратегически важных территорий Сибири и Арктики: вклад науки: Материалы междунар. науч.-практ. конф. Кн. 3. – Омск, 2014. – С. 179–181.
5. Карасева Р. Б. Применение рядов в задачах о преследовании // Вестник Ишимского государственного педагогического института им. П. П. Ершова. – Ишим, 2013. – № 4 (10). – С. 34–37.
6. Карасева Р. Б. Оценка компетенций выпускника вуза // Вестник СибАДИ. – Омск, 2015. – Вып. 1(41). – С. 137–141.

Rimma Karaseva,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, head of the chair of Higher Mathematics, Siberian State Automobile and Highway Academy, Omsk
karaseva_rb@mail.ru

Decision of research character tasks in the study of mathematics at higher education institution

Abstract. The ability to solve research character problems is one of the foundations of governmental competences of the modern engineer. Discussion the ideas of solving applied tasks at mathematics classes enhances the professional competence of future engineers. The paper considers the problem of pursuit in a limited area, which can be used in the study of mathematics at technical university. When solving problems the basic properties of numerical series are used. Consideration of such problems in practical classes helps students more easily understand complex theoretical material.

Key words: convergence of the series, higher mathematics, competence.

References

1. Karaseva, R. B. (2016). “Povyshenie urovnja matematicheskoj kompetentnosti studenta pri vvedenii v process obuchenija zadach issledovatel'skogo haraktera”, *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal “Koncept”*, № 3 (mart), pp. 16–20. Available at: http://e-koncept.ru/2016/16042.htm (in Russian).
2. Karaseva, R. B. (2015). “Tendencii sovremennogo matematicheskogo obrazovanija”, *Aktual'nye problemy prepodavanija matematiki v tehnicheskom vuze,* Izd-vo OmGTU, Omsk, № 3, pp. 45–47 (in Russian).

3. Karaseva, R. B. (2015). “Matematika v sisteme obrazovanija”, in Ploskonosova, V. P. (ed.). *Gumanitarnye i social'no-jekonomicheskie problemy razvitija sovremennogo obshhestva: sb. nauch. tr. (posvjashh. 85-letiju SibADI)*, Omsk, pp. 123–127 (in Russian).
4. Karaseva, R. B. (2014). “Vysshee obrazovanie i nauka”, *Razvitie dorozhno-transportnogo i stroitel'nogo kompleksov i osvoenie strategicheski vazhnyh territorij Sibiri i Arktiki: vklad nauki: Materialy mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* Kn. 3, Omsk, pp. 179–181 (in Russian).
5. Karaseva, R. B. (2013). “Primenenie rjadov v zadachah o presledovanii”, *Vestnik Ishimskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo instituta im. P. P. Ershova*, Ishim, № 4 (10), pp. 34–37 (in Russian).
6. Karaseva, R. B. (2015). “Ocenka kompetencij vypusknika vuza”, *Vestnik SibADI*, Omsk, vyp. 1(41), pp. 137–141 (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	11.09.16	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	15.09.16
Принята к публикации *Accepted for publication*	15.09.16	Опубликована *Published*	30.12.16

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2016
© Карасева Р. Б., 2016