

Горев Павел Михайлович,

кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа и методики обучения математике Вятского государственного гуманитарного университета (ВятГГУ), г. Киров

pavel-gorev@mail.ru

Кузьмина Наталья Николаевна,

учитель математики МОУ СОШ с УИОП № 3, г. Сосногорск, Республика Коми

Roumashka@yandex.ru

Модульный принцип построения элективного курса по обобщающему повторению планиметрии в 10–11-х классах

Аннотация. В статье авторы анализируют достоинства модульной технологии обучения, рассматривают некоторые ее аспекты применительно к обучению математике. Приводится модульная программа обобщающего повторения планиметрии и подробно описывается один из ее модулей.

Ключевые слова: обучение геометрии, модульная технология обучения, подготовка к ЕГЭ, самостоятельная работа учащихся.

Модульная технология возникла как альтернатива традиционным подходам к обучению и первоначально была осуществлена в сфере профессионального образования для устранения недостатков существующей профессиональной подготовки. Она приобрела большую популярность в учебных заведениях США и Западной Европы в начале 40-х годов XX века. Ее идеи берут начало в трудах Б. Ф. Скиннера и получают теоретическое обоснование и развитие в работах Б. М. Гольдшмид, К. Курха, Г. Оуенса, Дж. Расселла. В отечественной дидактике наиболее полно основы модульного обучения изучались и разрабатывались И. Б. Сенновским, П. И. Третьяковым, Т. И. Шамовой, П. А. Юцявичене и др.

Модульное обучение интегрирует в себе все то, что накоплено в педагогической теории и практике, и базируется на теории поэтапного формирования умственных действий. Идея активности ученика, четкость и определенная логика его действий, постоянное подкрепление их на основе самоконтроля, индивидуализированный темп учебно-познавательной деятельности пришли в модульное обучение из программированного. Кибернетический подход обогатил модульное обучение идеей гибкого управления деятельностью учащихся, переходящего в самоуправление. Личностно-ориентированное обучение, главная цель которого – развитие личностного отношения к миру, деятельности, себе, – обогатило модульное обучение субъективной активностью и самостоятельностью учащегося.

При модульной технологии обучения содержание состоит из системы модулей, количество которых определяется целями, глубиной, широтой познания предметной культуры. Содержание разбивается на обособленные законченные части. Сущность модульного обучения состоит в том, что ученик в процессе работы с модулем самостоятельно, с определенной долей помощи учителя решает конкретные цели учебно-познавательной деятельности, используя разнообразные формы работы и средства обучения. Учащимся предоставляется возможность самостоятельно работать с предложенной им индивидуальной учебной программой.

Особенности разных вариантов модульного обучения определяется тем, какой смысл вкладывается в понятие «модуль». Мы, следуя логике П. А. Юцявичене [1], понимаем модуль как основное средство модульного обучения, которое является

законченным блоком (банком) информации, а также включает в себя целевую программу действий и методическое руководство, обеспечивающее достижение поставленных дидактических целей.

1. Чтобы составить план (целевую программу) действий, нужно:

- выделить оптимальную модель обучения, представляющую учебный курс как систему, то есть создать первичное конструирование материала, наглядное представление по всему курсу, теме, уроку;
- составить технологическую карту модуля, что ведет к закономерности учебного процесса (этап проектирования);
- выделить основные научные идеи предмета на данном этапе его изучения;
- объединить учебное содержание в определенные блоки;
- сформулировать комплексную дидактическую цель (общую цель обучения);
- выделить из комплексной дидактической цели интегрирующие дидактические цели и сформировать модуль;
- разделить каждую интегрирующую дидактическую цель на частные дидактические цели и выделить в модуле учебные элементы.

Главный этап при составлении плана действий – разработка модульной программы. Она состоит из комплексной дидактической цели (ДЦ), из которой вытекает интегрирующая цель (ИДЦ), которая, в свою очередь, может иметь частную дидактическую цель (ЧДЦ), на основе которой выделяются частные учебные элементы (УЭ).

2. Банк информации – это учебное содержание. Оно выстраивается в соответствии с дидактическими целями и должно быть таким, чтобы ученик эффективно его усваивал. Отбор содержания модуля производится таким образом, чтобы оно составляло законченный блок информации, при этом учебный материал рассматривается не только как порция информации, которую надо усвоить, но и как источник ценностных ориентаций. Задания (групповые, дифференцированные, парные) направлены на формирование системного мышления: вводятся фундаментальные понятия, раскрывается использование этих понятий в разных разделах, в новых ситуациях. При этом уровни планируемого результата могут иметь статус базового, продвинутого и творческого.

3. Методическое руководство по усвоению учебного содержания – это письменные советы учителя ученику: как лучше выполнить задание, где найти нужный материал, как выполнить проверку и т. п.

Учителю, разрабатывающему модульные программы, необходимо опираться на следующие основные принципы.

1. *Принцип целевого назначения.* Модули можно условно разделить на три типа: познавательные (используются при изучении основ наук); операционные (для формирования и развития способов деятельности); смешанные, которые чаще всего и используются в школе.

2. *Принцип сочетания комплексных, интегрирующих и частных дидактических целей.* Совокупность ЧДЦ обеспечивает достижение ИДЦ каждого модуля, совокупность ИДЦ всех модулей обеспечивает достижение КДЦ.

3. *Принцип обратной связи.* Никакое управление невозможно без контроля, анализа и коррекции. В модульном обучении управление, осуществляемое учителем, сочетается с самоуправлением учением со стороны самих школьников. Модуль любого порядка должен включать контроль выполнения задания, усвоения знаний учащихся; он считается неполным, если отсутствует инструкция контроля.

В модульной технологии используются следующие формы контроля: самоконтроль, взаимный контроль учащихся, контроль учителя.

Для успешного применения модульных программ необходимо соблюдать некоторые правила. Начиная работать с новым модулем, нужно проводить *входной контроль* знаний и умений учащихся, чтобы иметь информацию об уровне их готовности к работе. При необходимости можно провести соответствующую *коррекцию знаний*. Важно также осуществление текущего и промежуточного контроля после изучения каждого учебного элемента. После завершения работы с модулем осуществляется *выходной контроль*. Текущий и промежуточный контроль выявляют пробелы в усвоении знаний с целью немедленного их устранения, а выходной контроль должен показать уровень усвоения всего модуля и тоже предполагает соответствующую доработку.

В модульной технологии оценивается выполнение каждого учебного элемента. Оценки накапливаются в листе контроля, на основании которой выставляется итоговая оценка за работу над модулем. Точность контроля и объективность оценки играют большую роль. Получить хорошую оценку – одна из главных мотиваций при модульной технологии. Ученик чётко знает, что его труд оценивается на каждом этапе и оценка объективно отражает его усилия и способности.

Каждый учебный элемент модульного урока – это шаг к достижению интегрирующей цели урока, без овладения содержанием которого эта цель не будет достигнута. Учебных элементов не должно быть много (не более семи), но среди них обязательно должны присутствовать следующие: УЭ-0 – определение ИДЦ по достижению результатов обучения; УЭ-1 – задания по выявлению уровня знаний по теме, задания, направленные на овладение новым материалом; УЭ-2 (и т. д.) – отработка учебного материала. Завершающий УЭ включает выходной контроль знаний, подведение итогов занятия (оценка степени достижения целей урока), выбор домашнего задания (оно должно быть дифференцированным – с учетом успешности работы учащегося на уроке), рефлексию (оценку своей работы с учетом оценки окружающих).

Введение модулей в учебный процесс осуществляется постепенно. Сначала используется традиционная система обучения с элементами модулей. В старших классах с модульным обучением может сочетаться лекционно-семинарская система обучения.

При модульном обучении ученик включается в активную и эффективную учебно-познавательную деятельность, работает с дифференцированной по содержанию и объему помощи программой. Идет индивидуализация контроля, коррекции и консультирования. Важно, что ученик имеет возможность в большей степени самореализоваться, и это способствует мотивации учения.

Существует, по крайней мере, шесть различных модулей: *организационный, повторения, изучения нового материала, закрепления, контроля, коррекции*. В зависимости от характера цели возможны многочисленные разновидности каждого из них, например, повторение может быть текущим, поддерживающим, обобщающим, итоговым. Важнейшим моментом в каждом из модулей обучения в данной системе является самостоятельная работа учащихся. Она предполагает именно самостоятельное добывание учащимися знаний по теме из доступных источников информации, а не разновидность проверочной работы, как это зачастую понимается некоторыми учителями.

1. Самостоятельные и зачетные работы, в ходе которых учитель определяет уровень усвоения материала, можно проводить следующим образом: учитель должен приготовить карточки с заданиями, которые также соответствуют разным уровням усвоения материала: базовому, продвинутому и высокому.

Учащимся предлагается список задач и упражнений, расположенных в порядке возрастания сложности. В течение нескольких уроков, отводимых на самостоятельную работу, учащиеся решают эти задачи. После решения каждой задачи учащиеся

сравнивают ответ (а при необходимости и решение) с правильным. Учитель контролирует этот процесс и отмечает все правильно решенные учеником задачи в листе контроля, на основании чего в конце практикума выставляется оценка.

2. Перед изучением нового материала необходимо организовать вводное повторение в форме беседы, в которой ученики восстанавливают в памяти знания, необходимые для изучения нового материала.

3. После освоения учениками теоретического блока нужно провести тренинг-минимум, цель которого – автоматизация умений решать стандартные задачи. Такая форма работы позволяет слабоуспевающим ученикам прослушать алгоритм решения примера или задачи. Сильный ученик также реализует возможности лучшего закрепления изученного.

4. Следующий этап в освоении темы – практикум. Успешность обучения зависит от непрерывной обратной связи, от получения своевременной информации об успешности продвижения каждого ученика. Поэтому после каждого семинара-практикума желательнее проводить срезовый контроль достижения учениками тех или иных уровней освоения материала. Перед итоговым контролем можно провести зачёт, в который входят не только задания практического содержания, но и теоретические вопросы.

5. Обобщающее повторение позволяет ученикам увидеть всю тему целиком, получить её полное системное знание.

6. Домашняя работа в данной интегральной технологии задаётся в зависимости от уровня заданий, которые может выполнить ученик, и обязательно проверяется.

7. Контрольные работы или зачеты в модульной технологии также можно организовывать в зависимости от уровня усвоения учащимся учебного материала. Например, можно делать варианты контрольной работы, соответствующие уровню усвоения материала: низкому, среднему, высокому. При таком проведении контрольной работы учащиеся сами выбирают вариант. После контрольной работы проводится практическая работа над ошибками.

Описанным выше способом можно проводить уроки и элективные курсы в школе. Но кроме этого модульную технологию можно использовать и при дистанционном обучении школьников.

Модульная технология обучения имеет ряд серьезных достоинств:

- цели обучения точно соотносятся с достигнутыми результатами ученика;
- задается индивидуальный темп учебной деятельности;
- обеспечивается высокий уровень активизации учащихся на уроке;
- формируются навыки самообразования учащихся;
- дается возможность учащимся работать самостоятельно с дифференцированной программой;
- достигается гибкость и мобильность в формировании знаний и умений обучающихся, развивается их творческое и критическое мышление;
- обеспечивается развитие личности учащегося, создаются условия для самореализации каждого ученика;
- учитывается уровень подготовленности каждого ученика, его индивидуальные особенности;
- поэтапный – модульный – контроль знаний и практических умений дает определенную гарантию эффективности обучения;
- общение учителя и ученика проходит на субъект-субъектной основе;
- разработка модулей позволяет уплотнить учебную информацию и представить ее блоками;

- приносят до 30% экономии учебного времени без ущерба для полноты и глубины изучаемого материала;
- достигается определенная «технологизация» обучения, оно в меньшей степени становится зависимым от педагогического мастерства учителя;
- позволяет включить в обучение консультирование и дозированную персональную помощь от учителя;
- позволяет определить уровень усвоения нового материала учащимися и быстро выявить пробелы в знаниях;
- используя модули, можно успешно осуществлять внутрипредметные и межпредметные связи, интегрировать учебное содержание, формируя его в логике содержания ведущего учебного предмета;
- происходит дифференциация учебного содержания; нижний уровень соответствует обязательному минимуму содержания, верхний – дополнительным сведениям;
- наблюдается структурированность деятельности ученика в логике этапов усвоения знаний: восприятие → понимание → осмысление → запоминание → применение → обобщение → систематизация.

Таким образом, теоретические и практические исследования педагогов, психологов и ученых, специализирующихся в области теории и методики обучения математике, показали, что модульная технология обучения имеет ряд существенных преимуществ перед традиционной, что, без сомнения, делает актуальным вопрос об ее внедрении в практику обучения в школе.

Изложенные выше идеи были использованы нами при организации итогового повторения планиметрии за курс основной школы, целью которого является систематизация и обобщение ранее полученных знаний по геометрии.

Приведем разработку обобщающего повторения планиметрии по модульной технологии обучения; более подробно рассмотрим построение содержательного модуля «Прямоугольный треугольник».

Разработанное обобщающее повторение планиметрии по модульной технологии предназначено для учащихся 10–11-х классов и рассчитано на 34 часа.

Основное содержание повторения соответствует современным тенденциям развития школьного курса геометрии, идеям дифференциации, углубления и расширения знаний учащихся. Данное повторение дает учащимся возможность познакомиться с определенными методами и приемами решения задач, которые либо не рассматриваются при изучении планиметрии, либо не отрабатываются на должном уровне; систематизировать свои знания по планиметрии; поможет учащимся в подготовке к выпускным и вступительным экзаменам по математике.

Целями и задачами повторения можно считать следующие положения: обобщить и систематизировать знания учащихся по основным разделам планиметрии; дополнить знания учащихся теоремами прикладного характера, областью применения которых являются задачи; расширить и углубить представления учащихся о приемах и методах решения планиметрических задач; сформировать умения применять полученные знания при решении, «нетипичных», нестандартных задач; помочь овладеть рядом технических и интеллектуальных умений на уровне их свободного использования.

Структура повторения представляет собой четыре логически законченные и взаимосвязанные темы. Основной тип занятий – практикум. Для наиболее успешного усвоения материала планируются различные формы работы с учащимися: лекционные занятия, групповые, индивидуальные формы работы.

Первая тема, с которой начинается повторение, – «Треугольник», так как треугольник является одной из основных фигур планиметрии. Повторяются метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, свойства проекций катетов, метрические соотношения в произвольном треугольнике, свойства медиан, биссектрис, высот, свойства равнобедренного треугольника, теоремы о площадях треугольника.

Второй повторяется тема «Четырехугольник». Эта тема чаще всего представлена задачами о параллелограмме (и его частных видах – ромбе, прямоугольнике и квадрате), а также задачами о трапеции. Кроме того, здесь неизбежно повторяются свойства треугольников. Также повторяются метрические соотношения в четырехугольниках, теоремы о площадях четырехугольников.

Затем повторяются свойства окружности и ее элементов, то есть метрические соотношения между длинами хорд, отрезков касательных и секущих, свойства дуг и хорд. Свойства вписанных и центральных углов, углы между хордами, касательными и секущими. Тут же повторяются свойства вписанных и описанных окружностей (окружности, вписанные и описанные около треугольников; четырехугольники, вписанные и описанные около окружностей).

Следующим рассматривается модуль, в котором представлены методы решения планиметрических задач: метод площадей и метод вспомогательной окружности. Эти методы рассматриваются как альтернативные методы решения многих задач по планиметрии. Учащимся показывается, что решение многих задач с использованием этих методов является более простым и эффективным.

Весь материал планиметрии основной школы мы разбиваем на отдельные модульные программы, целостно отображающие содержание учебного материала.

Модульная программа «Треугольник» включает три модуля: «Прямоугольный треугольник и его свойства», «Равнобедренный треугольник и его свойства», «Произвольный треугольник и его свойства». **Модульная программа «Четырехугольник»** включает два модуля: «Параллелограмм и его свойства», «Трапеция и ее свойства». **Модульная программа «Окружность»** включает три модуля: «Свойства углов, касательных, хорд и секущих», «Треугольники и окружность», «Четырехугольники и окружность». **Модульная программа «Методы решения планиметрических задач»** включает два модуля: «Метод площадей», «Метод вспомогательной окружности».

Учебно-тематический план модульных программ представлен в табл. 1.

Таблица 1

Тематический план модулей для обобщающего повторения планиметрии за курс основной школы

№	Наименование модулей	Всего часов	В том числе		
			лекция	практика	контроль*
1	Прямоугольный треугольник и его свойства	4	1	3	2
2	Равнобедренный треугольник и его свойства	3	1	2	2
3	Произвольный треугольник и его свойства	4	1	3	2
4	Параллелограмм, и его свойства	4	1	3	2
5	Трапеция и ее свойства	4	1	3	2
6	Свойства углов, касательных, хорд и секущих	3	1	2	2
7	Треугольники и окружность	3	1	2	2
8	Четырехугольники и окружность	3	1	2	2
9	Метод площадей	3	1	2	1
10	Метод вспомогательной окружности	3	1	2	1

* Контрольные работы не входят в отводимые часы для повторения.

Построение модуля «Прямоугольный треугольник» для обобщающего повторения планиметрии

Образовательные цели: овладение учащимися системой знаний о треугольнике (одной из основных фигур планиметрии) и его основных свойствах; усвоение учащимися приемов решения планиметрических задач с использованием свойств и теорем о треугольнике. **Развивающие цели:** формирование пространственного и логического мышления; развитие практического мышления учащихся в использовании геометрических знаний, коммуникативных умений. **Воспитательная цель** – формирование мировоззрения учащихся, воспитание нравственности, культуры общения, самостоятельности, активности, трудолюбия.

Комплексная дидактическая цель формулируется в терминах «знать» и «уметь» и достигается реализацией интегрирующих целей конкретных модулей.

Сформулируем **интегрирующую цель** для модуля «Прямоугольный треугольник». После изучения модуля «Прямоугольный треугольник» учащиеся

- *должны знать* метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, свойства проекций катетов, свойства медиан, биссектрис, высот, теоремы о площадях треугольника, теоремы синуса и косинуса, теорему Пифагора;
- *должны уметь* определять наиболее эффективный метод решения задачи, применять основные формулы, метрические соотношения и теоремы в прямоугольном треугольнике.

Структура модуля представлена в табл. 2.

Таблица 2

Структура модуля «Прямоугольный треугольник»

Элемент	Название учебного элемента. Цели и задачи формулируются для ребёнка	Управление обучением (содержание, формы, методы)
УЭ-0	Цели и задачи модуля. Актуализация целей	Беседа
УЭ-1	Учебный модуль. Цель: актуализация знаний и умений по теме «Прямоугольный треугольник», определение исходного уровня знаний по теме	Входной контроль
УЭ-2	Повторение и обобщение. Цель: повторить вопросы, касающиеся треугольника и более подробно – свойства прямоугольного треугольника; уметь применять теоретические знания на практике	Источники информации, методы решения задач
УЭ-3 УЭ-4 УЭ-5 УЭ-6	Отработка учебного материала. Цели: 1) проверить теоретические знания учащихся и умение решать опорные задачи; 2) отработать навыки применения формул, теорем для решения планиметрических задач и различные методы их решения	Самостоятельная работа (контроль по теории и методам решения задач). Урок-практикум по самостоятельному решению задач
УЭ-6	Учебный модуль. Цель: проверить свои знания и умения по теме модуля	Выходной контроль

Первый урок – входной контроль. Учащимся предлагается контрольная работа по теме «Прямоугольный треугольник». Задания контрольной работы содержат вопросы о свойствах прямоугольного треугольника и его элементов, а именно: теорема Пифагора; биссектрисы, медианы треугольника, высоты проведенной из вершины прямого угла; формулы синуса и косинуса острого угла, а также свойства произвольного треугольника: подобие треугольников, формулы площади треугольника. Приведем пример одного из вариантов контрольной работы (здесь и далее задачи заимствованы из [2–8]).

1. Найти радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8.
2. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC с прямым углом C , если $\angle B = 30^\circ$, $BC = 6$.

3. В прямоугольном треугольнике медианы острых углов равны 89 и 156. Найти длину гипотенузы.
4. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого на гипотенузу – 16 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.
5. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, а площадь его равна 24 см^2 . Найдите площадь описанного круга.

Второй урок посвящается повторению вопросов, касающихся треугольника, и подробному рассмотрению свойств прямоугольного треугольника, признаков равенства и подобия треугольников; неравенства треугольника; теоремы о сумме углов треугольника; теорем синусов и косинусов; свойств высот (особое внимание – на свойство высоты, проведенной из вершины прямого угла), медиан и биссектрис треугольника; теоремы Пифагора; формул синуса и косинуса острого угла; свойства катета, лежащего против угла в 30° ; формулы площади треугольника; свойств вписанных и описанных окружностей. Главной задачей этого повторения является актуализация знаний о прямоугольном треугольнике для последующего применения этих знаний для решения задач.

Все перечисленные вопросы можно повторить в форме фронтальной беседы. Повторять нужно именно свойства, формулы и определения, касающиеся прямоугольного треугольника, без повторения доказательств и выводов формул. Для того чтобы повторяемым знаниям была придана определенная структура, полученные результаты обобщения представлены в виде классификационной схемы, свободной таблицы, определенных записей [9]. Для модульной программы «Треугольник» предлагается следующий опорный конспект (см. табл. 3).

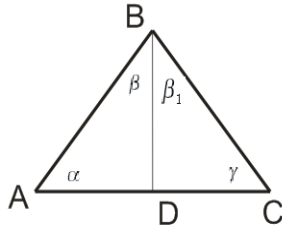
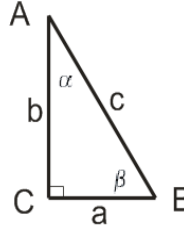
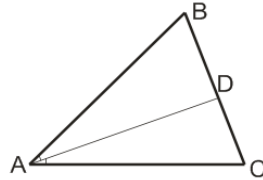
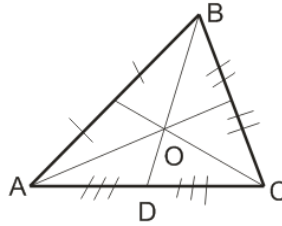
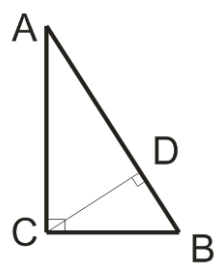
Таблица 3

Опорный конспект «Треугольник»

Классификация треугольников				Признаки равенства	Признаки подобия
	Углы все острые	Один угол прямой	Один угол тупой		
Нет равных сторон	Остроугольный	Прямоугольный	Тупоугольный	По стороне и двум прилежащим к ней углам	По двум равным углам
Две стороны равны	Равнобедренный	Прямоугольный равнобедренный	-	По двум сторонам и углу между ними	По двум пропорциональным сторонам и равным углам между ними
Все стороны равны	Равносторонний	-	-	По трем сторонам	По трем пропорциональным сторонам

	Произвольный треугольник		
	1) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$	2) $\gamma_1 = \alpha + \beta$	3) $a + b > c$
	4) Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну		
	5) В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну		
	6) Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис		
	7) Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров		
	8) Если треугольник прямоугольный, то центр описанной окружности – середина гипотенузы		
	9) Теорема синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$		
	10) Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$		

Продолжение таблицы 3

	Равнобедренный треугольник	Прямоугольный треугольник		
	1) $\alpha = \gamma$	1) Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$		
	2) Если BD – биссектриса, то $BD \perp AC, AD = DC$	2) Если $\alpha = 30^0$, то $CB = 0,5AB$		
	3) Биссектрисы, медианы и высоты, проведенные к боковым сторонам, равны	3) $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}, \cos \alpha = \frac{AC}{AB}$ 4) $a + b = 2(R + r)$; $r = 0,5(a + b - c)$		
	Биссектриса			
	1) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке			
	2) Если $\angle BAD = \angle CAD$, то $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$			
	3) Биссектриса есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла			
	4) Биссектрисы внутреннего и внешнего углов одной вершины перпендикулярны			
	Медиана			
	1) Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 2 : 1, считая от вершины			
	2) Медиана делит площадь треугольника пополам			
	3) $BD = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 - AC^2}$			
	4) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 0,75(a^2 + b^2 + c^2)$			
	Высота			
	1) Высоты треугольника пересекаются в одной точке			
	2) Высота, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному			
	3) Высота, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой: $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}; CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \frac{AC \cdot BC}{AB}; \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AD}{BD}; AC = \sqrt{AD \cdot AB},$ $BC = \sqrt{BD \cdot AB}$			
	4) Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам: $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$			
Формулы площади треугольника				
$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ah_a$	$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$	$S_{\Delta} = pr$	$S_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$
Если высоты треугольников равны, то их площади относятся как основания		Если треугольники подобны, то отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия		
Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то их площади относятся как произведение сторон, заключающих равные углы		Отношение площадей треугольников, имеющих общие основания, равно отношению высот, соответствующих этим сторонам треугольника		

Продолжение таблицы 3

Описанная окружность	Вписанная окружность
Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну	В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну
Центр описанной около произвольного треугольника окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника	Центр вписанной в произвольный треугольник окружности – точка пересечения биссектрис треугольника
Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности – середина гипотенузы	

На основе повторенного теоретического материала совместно разбираются решения пяти *опорных задач*, в которых показывается, в каких случаях и как используются данные знания, а также различные методы решения планиметрических задач. Предлагаются следующие опорные задачи.

1. Проекция катетов прямоугольного треугольника на гипотенузу равны 9 и 16. Найдите радиус вписанной окружности.
2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота BD . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD , равны соответственно 3 и 4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .
3. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, делит биссектрису острого угла в отношении 4 : 5, считая от вершины. Найдите величину этого угла.
4. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 20. Из середины гипотенузы восстановлен перпендикуляр до пересечения с большим катетом. Длина перпендикуляра 15. Найдите катеты.
5. Найдите катеты треугольника с острым углом в 15° и гипотенузой a .

Первые три задачи посвящены повторению свойств высоты, опущенной из вершины прямого угла. Очень часто учащиеся или не знают этих свойств, или знают только одно: высота, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному, но, несмотря на знание этого свойства, они не используют его при решении задач.

Третий – шестой уроки учащиеся работают самостоятельно. В начале третьего урока можно провести самостоятельную работу по проверке теоретических сведений (в виде теста) и умений решать опорные задачи. Далее учащимся предлагается набор из 21 задачи для отработки знаний и умений по теме «Прямоугольный треугольник». После того как учащийся решил задачу, он сверяет ответ и просматривает метод решения, предложенный учителем. Если задача была решена правильно, то на листе контроля, имеющемся у каждого ученика, это отмечается. Каждому ученику при необходимости оказывается индивидуальная помощь, даются советы по методу решения задачи или формулы, которой лучше воспользоваться в данном случае. Главная задача этих уроков – отработка умений использовать нужные формулы и теоремы для решения задач, нахождение оптимального способа решения.

Задания для самостоятельной работы учащихся направлены на применение теоретических знаний в практике решения задач, они представлены в трех уровнях: базовом, продвинутом и высоком.

Базовый уровень

1. Один катет прямоугольного треугольника равен 5, а проекция другого катета на гипотенузу равна 2,25. Найдите гипотенузу этого треугольника.
2. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6, а его проекция на гипотенузу равна 2. Найдите гипотенузу и второй катет.

3. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата.

4. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найдите стороны треугольника.

5. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.

6. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 24 и 18.

7. В прямоугольном треугольнике расстояние от середины гипотенузы до одного из катетов равно 5, а расстояние от середины этого катета до гипотенузы равно 4. Вычислите площадь треугольника.

Продвинутый уровень

8. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов. Найдите отношение большего катета к меньшему.

9. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника. Радиусы окружностей, вписанных в эти два треугольника, равны 1 и 2. Найдите радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.

10. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CD . Найдите гипотенузу AB , если $CD = AD - BD = \sqrt{5}$.

11. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

12. Из точки K катета AC прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр KM к гипотенузе AB . Найдите площадь треугольника AKM , если $AB = 10$, $AK = 5$, $KC = 3$.

13. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно k . Найдите отношение проекции катетов на гипотенузу.

14. В прямоугольном треугольнике ABC отношение одного катета к гипотенузе равно 0,8, а другой катет равен 4. Найдите площадь этого треугольника.

15. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной в 5 и 12 см. Найдите катеты треугольника.

16. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе треугольника. Каков радиус окружности, если длины катетов равны 5 и 12?

17. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12. Найти расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

18. Прямоугольный треугольник разделен высотой, проведенной к гипотенузе, на два треугольника с площадями 384 и 216. Найдите гипотенузу.

19. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны 2 и 5 соответственно. Найдите его площадь.

Высокий уровень

20. На катете AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) взята точка K . В каком отношении точка K делит катет AC , если известно, что $5AK = BK$?

21. В прямоугольном треугольнике заданы площадь треугольника $S = 5$ и периметр $P = 10$. Найдите гипотенузу и высоту, проведенную из вершины прямого угла.

За каждую правильно решенную задачу учащимся начисляются баллы по следующей схеме: задача базового уровня – 5 баллов, задача продвинутого уровня – 7 баллов, задача высокого уровня – 10 баллов. В результате рейтинг модуля «Прямоугольный треугольник» равен 139 баллов. Предлагается следующая схема выставления итоговой оценки: «3» – 69–96 баллов; «4» – 97–117 баллов; «5» – 118–139 баллов.

Домашнее задание представлено в виде набора задач, расположенных в порядке возрастания их сложности. Учащиеся должны решить все домашние задачи и сдать на проверку перед выходным контролем.

Седьмой урок – выходной контроль. Главная задача в проведении выходного контроля – выявление уровня усвоения учащимися знаний и умений по данной теме. Предлагается следующий набор задач.

1. Отрезок CH – высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$). $HL = 3HK$, где HL и HK – биссектрисы треугольников BCH и ACH соответственно, $AB = 2\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABC .
2. В прямоугольном треугольнике катет равен 24 см, а гипотенуза – 25 см. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины меньшего угла.
3. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 30^\circ$, из вершины прямого угла B проведена медиана BK . Найдите площадь треугольника BCK , если $AB = 4$ см.
4. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите расстояние от высоты, опущенной из вершины прямого угла до центра вписанной окружности.
5. Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 3 и 4. Найдите площадь треугольника.

По итогам изучения модуля «Прямоугольный треугольник» учащиеся получают четыре оценки: за самостоятельную работу по теории, за решение задач на уроках-практикумах, за выполнение домашнего задания и за итоговый контроль по модулю.

Ссылки на источники

1. Юцявичене П. А. Основы модульного обучения. – Вильнюс: ИПК нар. хоз-ва, 1989. – 67 с.
2. Денищева Л. О. и др. Единый государственный экзамен 2009. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. – М.: Интеллект-Центр, 2009. – 272 с.
3. Звавич Л. И., Рязановский А. Р. Геометрия в таблицах. 7–11 классы. – М.: Дрофа, 2007. – 124 с.
4. Куланин Е. Д. и др. 3000 конкурсных задач по математике. – М.: Рольф, 2000. – 624 с.
5. Математика. Задачник. ЕГЭ-2008. Вступительные испытания / Под ред. Ф. Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону: Легион, 2007. – 608 с.
6. Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С. Геометрия: Задачник к школьному курсу. – М.: АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998. – 256 с.
7. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во вузы: учеб. пособие / Под ред. М. И. Сканави. – СПб.: Водoley, 1997. – 516 с.
8. Шарыгин И. Ф. Стандарт по математике: 500 геометрических задач: кн. для учителя. – М.: Просвещение, 2005. – 205 с.
9. Звавич Л. И., Рязановский А. Р. Геометрия в таблицах. 7–11 классы.

Gorev Pavel,

Candidate of Pedagogical Sciences, associate professor at the chair of mathematical analysis and methods of teaching mathematics Vyatka State Humanities University (VyatGGU), Kirov
pavel-gorev@mail.ru

Kuzmina Natalia,

mathematics teacher in secondary school number 3, Sosnogorsk, Komi Republic
Roumashka@yandex.ru

The modular design of an elective course by generalizing the recurrence of plane geometry in the 10th and 11th grades

Abstract. In this paper the authors analyze the advantages of modular technology education, consider some of its aspects in relation to learning mathematics. Provides modular software synthesis repetition planimetry and describes in detail one of its modules.

Keywords: teaching of geometry, modular technology education, preparation for the exam, individual work of students.