ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Вергазова О. Б. Применение координатно-векторного метода решения стереометрических задач в процессе подготовки к ЕГЭ по математике (профильный уровень) // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 1 (январь). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170022.htm.

ART 170022 **УДК 372.851**

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga.aika@yandex.ru

Применение координатно-векторного метода решения стереометрических задач в процессе подготовки к ЕГЭ по математике (профильный уровень)

Аннотация. *В целях повышения уровня математической подготовки будущих студентов математических и технических специальностей необходимо как на школьных уроках геометрии, так и в процессе подготовки к сдаче Единого государственного экзамена по математике (профильный уровень) особое внимание уделять тем вопросам математики, без прочного знания которых невозможно успешное обучение в высшем учебном заведении. В данной статье на примере задач по стереометрии, предлагаемых в качестве задач повышенного уровня на ЕГЭ по математике профильного уровня, демонстрируется одна из возможностей дифференцированного подхода в подготовке будущих студентов-первокурсников технических или математических вузов, которым предстоит освоить курс высшей математики, в частности аналитической геометрии. На примере решения ряда задач по стереометрии демонстрируются преимущества применения координатно-векторного метода. Содержание статьи представляет интерес для преподавателей вузов, учителей, старшеклассников, готовящихся к поступлению в вузы на специальности технического или математического направления.*
Ключевые слова: *подготовка абитуриента математического или технического вуза, дифференцированный подход к подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня, координатно-векторный метод решения задач по стереометрии.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Применение координатно-векторного метода при решении задач по стереометрии, в частности при решении задачи 14 Единого государственного экзамена по математике (профильный уровень), позволяет сделать решение задачи более сжатым, алгоритмичным. В данном случае нет необходимости давать подробные описания с целью обосновать тот или иной шаг решения. Как правило, этот метод применяют в задачах, в которых рассматривается прямоугольный параллелепипед. Гораздо реже прямоугольные координаты и векторы используются в решении, если в задаче речь идет о других многогранниках. С целью развития и совершенствования навыка применения координатно-векторного метода у старшеклассников в статье рассматриваются задачи, которые можно использовать на занятиях по математике как вместе с педагогом, так и для самостоятельной работы. Отметим, что решение одной задачи различными способами, например координатно-векторным методом, в сочетании с другими дает возможность показать учащимся одну из эстетических граней математики.

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти косинус угла между прямыми AB и A_1C [1].

Решение

Пусть *a* – длина ребра куба. Введем прямоугольную систему координат. Направим ось *x* вдоль ребра DA, ось *y* – вдоль ребра DC и ось *z* направим вдоль DD_1 (см. рис. 1).

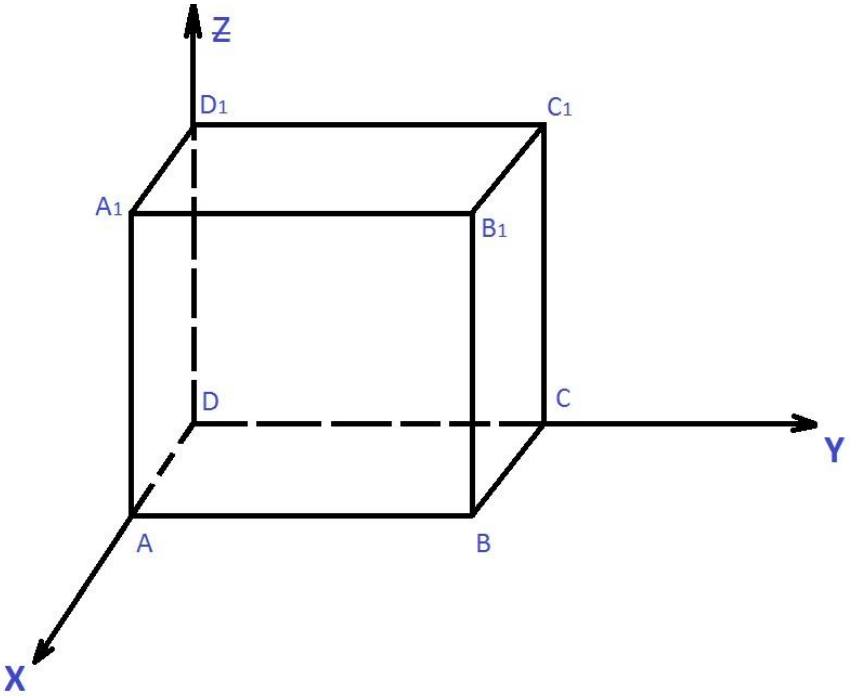

Рис. 1

Точки A, B, C и A_1 имеют следующие координаты: A(*a*;*0*;*0*), B(*a*; *a*;*0*), C(*0*; *a*; *0*), A_1(*a*; *0*; *a*).

Обозначим через *α* угол между прямыми AB и A_1C. Тогда $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{A_1C}|}$.

Вычислим координаты и модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1C}$, получим: $\overrightarrow{AB}\{0; a; 0\}$, $\overrightarrow{A_1C}\{-a; a; -a\}$, $|\overrightarrow{AB}| = a$, $|\overrightarrow{A_1C}| = a\sqrt{3}$.

Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C} = a^2$.

$\cos\alpha = \frac{a^2}{a\cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. В правильном тетраэдре ABCD точка E – середина ребра CD. Найти косинус угла между прямыми BC и AE [2].

Решение

Пусть *a* – длина ребра правильного тетраэдра ABCD. O – центр, AM – медиана основания ABC.

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке O. Направим ось *x* параллельно ребру BC, ось *y* – перпендикулярно ребру BC по направлению медианы AM, ось *z* направим вдоль высоты тетраэдра OD (см. рис. 2).

Рассмотрим ΔABC (см. рис. 3).

O – точка пересечения медиан ΔABC. Из ΔABM найдем AM = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Тогда AO = $\frac{2}{3}$AM = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; OM = $\frac{1}{3}$AM = $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

По условию точка E – середина DC. Из прямоугольного ΔDOM по теореме Пифагора найдем катет DO = $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. (см. рис. 2).

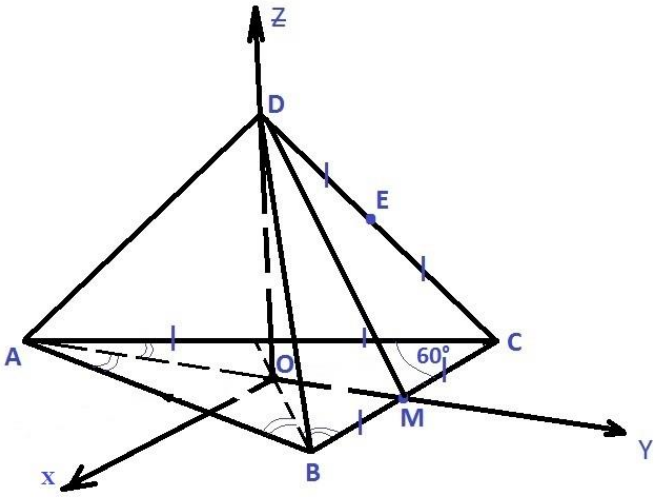

Рис. 2

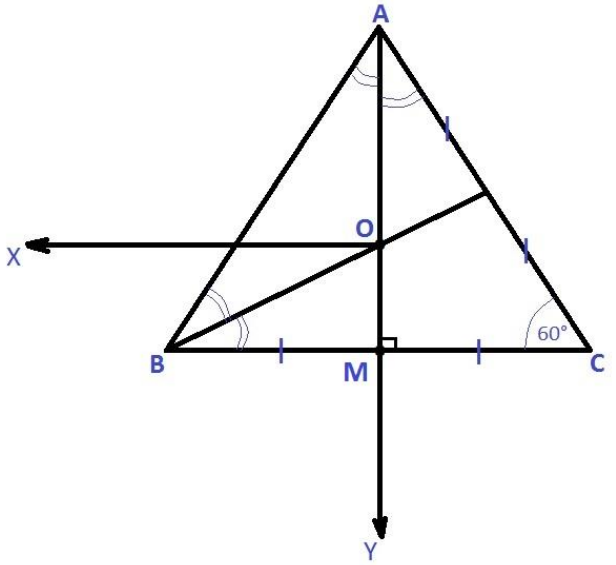

Рис. 3

Точка D имеет координаты (*0*; *0*; $a\sqrt{\frac{2}{3}}$).

Получим следующие координаты точек: A(0; - $\frac{a\sqrt{3}}{3}$;*0*), B ($\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; *0*), точка C симметрична точке B относительно оси *y*, поэтому C (-$\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; *0*). Координаты точки E вычислим как координаты середины отрезка DC, получим E (– $\frac{a}{4}$; $\frac{a\sqrt{3}}{12}$; $\frac{a\sqrt{6}}{6}$).

Обозначим через α угол между прямыми BC и AE. $cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AE}|}$.

Вычислим координаты и модули векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AE}$, получим: $\overrightarrow{BC}\{-a; 0; 0\}$, $\overrightarrow{AE}\{-\frac{a}{4}; \frac{5a\sqrt{3}}{12}; \frac{a\sqrt{6}}{6}\}$, $|\overrightarrow{BC}| = a$, $|\overrightarrow{AE}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A_1C} = \frac{a^2}{4}$. Таким образом, $\cos\alpha = \frac{\frac{a^2}{4}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1. Найти косинус угла между прямыми AB и CA_1 [3].

Решение

По условию длины всех ребер призмы равны 1. Введем прямоугольную систему координат. Направим ось *x* вдоль ребра AC, ось *z* направим вдоль CC_1, ось *y* перпендикулярно AC и CC_1 так, как показано на рис. 4.

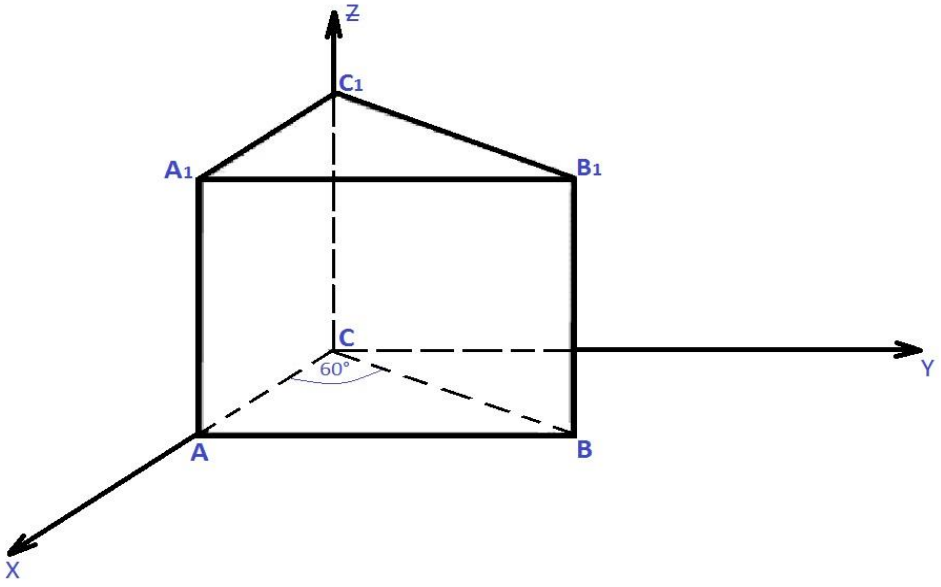

Рис. 4

Обозначим через *α* угол между прямыми AB и CA_1.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA_1}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CA_1}|}.$$

Точки A, A_1 и C имеют координаты: A(*1*; *0*; *0*), A_1 (*1*; *0*; *1*), C (*0*; *0*; *0*).

Координаты точки B определим из прямоугольных треугольников BB_xC и BB_yC, в которых острые углы равны 30° и 60°, а гипотенузы равны 1. B_x и B_y – проекции точки B на координатные оси (см. рис. 5).

Получим B ($\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *0*). Найдем координаты и модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA_1}$: $\overrightarrow{AB}\{-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\}$, $\overrightarrow{CA_1}\{1; 0; 1\}$, $|\overrightarrow{AB}| = 1$, $|\overrightarrow{CA_1}| = \sqrt{2}$.

Скалярное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA_1} = -\frac{1}{2}$.

Тогда $\cos\alpha = \frac{-\frac{1}{2}}{1 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. В ответе можно указать косинус угла *π*-α, равный $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

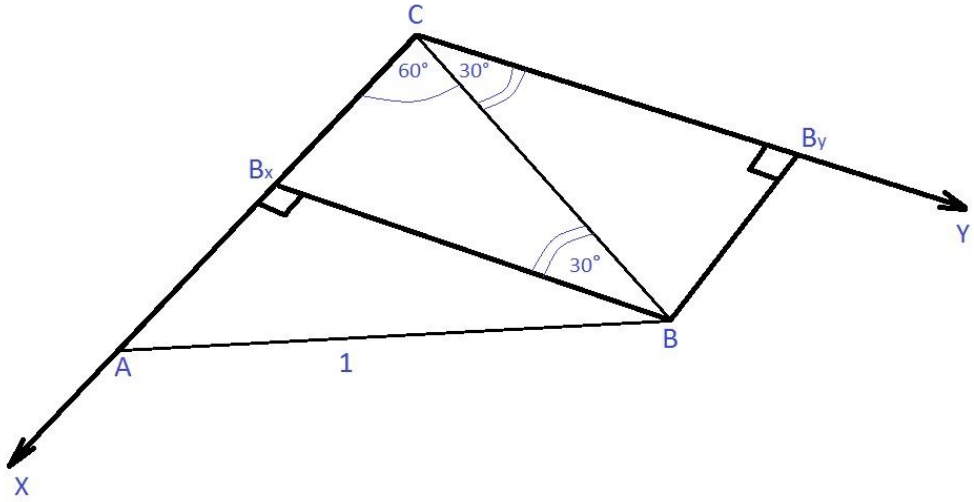

Рис. 5

4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 [4].

Решение

Пусть точка O – центр правильного шестиугольника ABCDEF (нижнее основание призмы) со стороной 1, O_1 – центр верхнего основания $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Направим ось *x* вдоль OA, ось *z* направим вдоль OO_1, ось *y* перпендикулярно AO и OO_1 так, как показано на рис. 6.

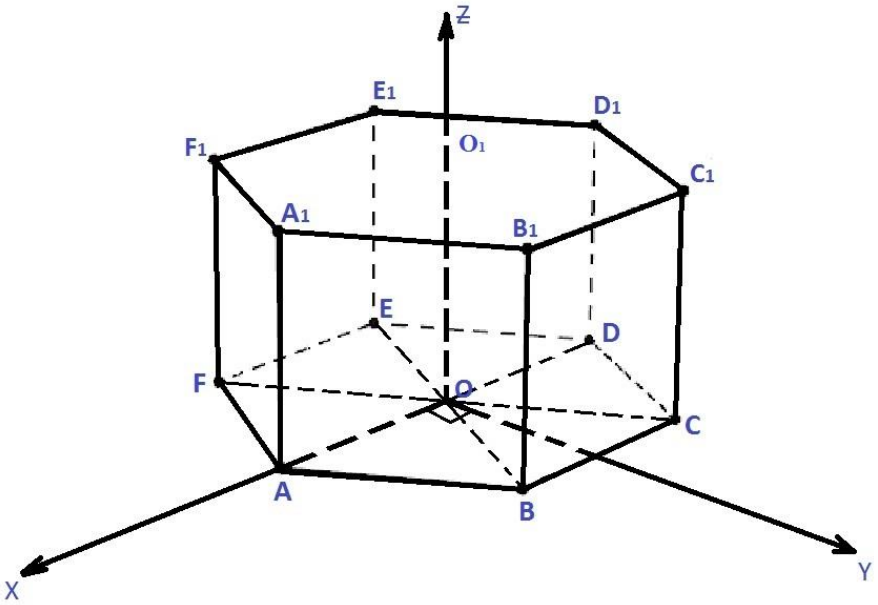

Рис. 6

Пусть *α* – угол между прямыми AB_1 и BC_1.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}|\cdot|\overrightarrow{BC_1}|}.$$

Найдем координаты точек A, B, B_1 и C_1. Для этого рассмотрим прямоугольные треугольники OB_xB и OB_yB, в которых острые углы равны 30° и 60°, а гипотенуза OB равна 1. Получим $OB_x = \frac{1}{2}$, $OB_y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 7). Отметим, что точки B и C симметричны относительно оси *y*, что следует учесть при нахождении координат точки C_1.

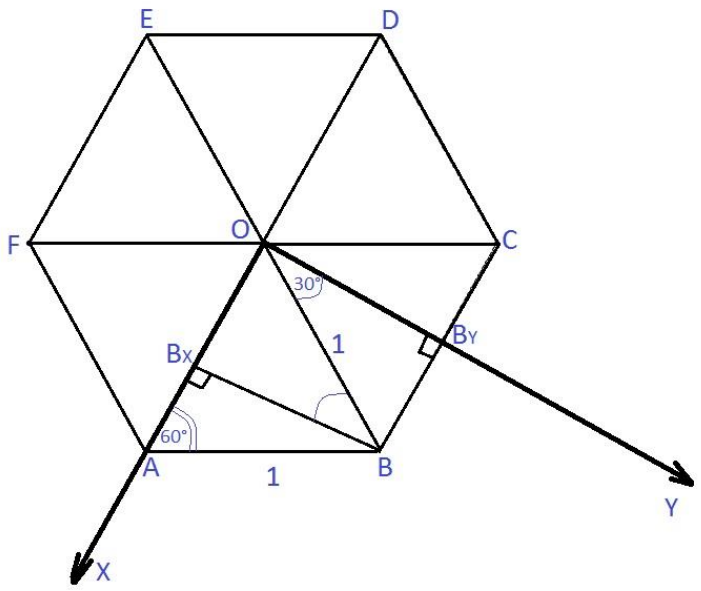

Рис. 7

Таким образом, A(*1*; *0*; *0*), B ($\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *0*), B_1 ($\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *1*), C_1 (– $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *1*).

Найдем координаты и модули векторов $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$: $\overrightarrow{AB_1}$ {-$\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *1*}, $\overrightarrow{BC_1}$ {-*1*; *0*; *1*}, $|\overrightarrow{AB_1}| = |\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{2}$. Скалярное произведение $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1} = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$.

$$\cos\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

5. Основание треугольной пирамиды DABC – равнобедренный треугольник ABC, в котором AB = BC = 13, AC = 24. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20. Найти тангенс двугранного угла при ребре AC [5].

Решение

Введем прямоугольную систему координат. Направим ось *x* вдоль ребра AB, ось *z* направим вдоль BD, ось *y* перпендикулярно AB и BD так, как показано на рис. 8.

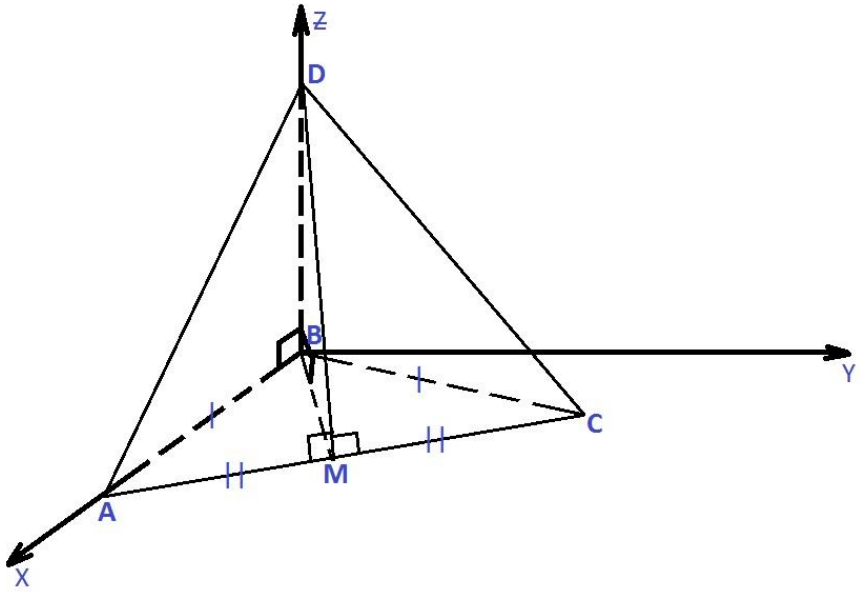

Рис. 8

Проведем в равнобедренном ΔABC медиану BM к основанию AC. BD – перпендикуляр к плоскости ΔABC, DM – наклонная, BM – проекция DM. BM перпендикулярно AC по свойству медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию. По теореме о трех перпендикулярах получим, что наклонная DM перпендикулярна AC.

Таким образом, угол DMB – линейный угол двугранного угла при ребре AC.

Рассмотрим ΔABC, по теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos ABC$, откуда получим, что $\cos ABC < 0$, то есть ΔABC тупоугольный, что необходимо учесть при изображении координатных осей на планиметрическом чертеже (см. рис. 9).

Вычислим $\cos\alpha$, а затем определим tgα, где α – угол DMB, то есть угол между векторами $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MD}$. Найдем координаты точек B, D, M. B(*0*; *0*; *0*), D (0; *0*; *20*). Из треугольников MM_xB и MM_yB найдем $MM_x = \frac{60}{13}$, $MM_y = \frac{25}{13}$, где M_x и M_y – проекции точки M на координатные оси (см. рис. 9).

Точка M $(\frac{25}{13}; \frac{60}{13}; 0)$.

Найдем координаты и модули векторов $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MD}$: $\overrightarrow{MB}\{-\frac{60}{13}; -\frac{25}{13}; 0\}$, $\overrightarrow{MD}$ $\{-\frac{60}{13}; -\frac{25}{13}; 20\}$, $|\overrightarrow{MB}| = \frac{65}{13}$, $|\overrightarrow{MD}| = 5\sqrt{17}$. Скалярное произведение $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD} = \frac{60^2}{13^2}+\frac{25^2}{13^2} = \frac{4225}{13^2}$.

$$\cos\alpha = \frac{\frac{4225}{13^2}}{\frac{65}{13}\cdot 5\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$$tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1.$$

$$tg^2\alpha = (\sqrt{17})^2 - 1 = 16.$$

$$tg\alpha = 4.$$

Ответ: 4.

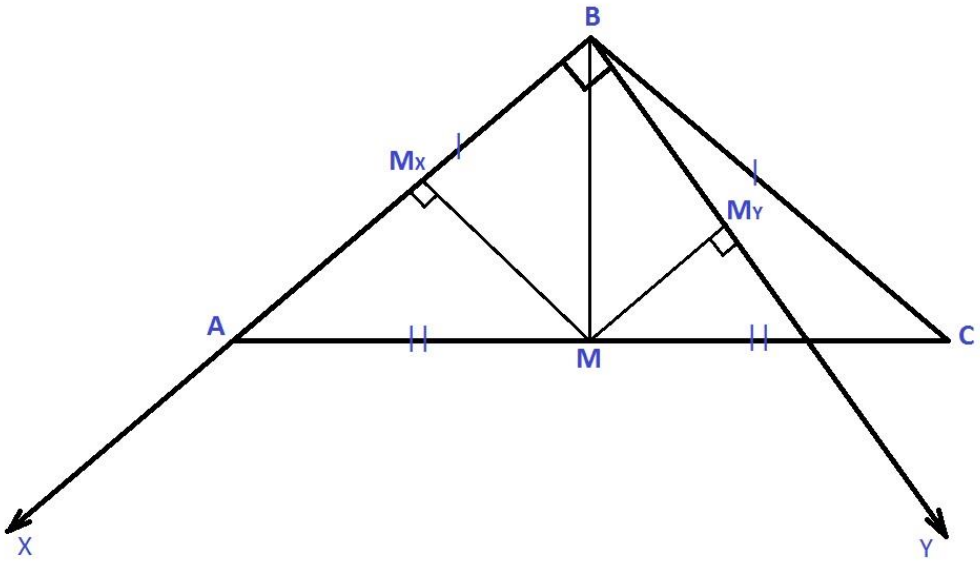

Рис. 9

В качестве дополнительных задач можно предложить учащимся следующие.

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ [6].

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти косинус угла между прямыми DA_1 и BD_1. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6}$ [7].

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми A D_1 и CE_1, где D_1 и E_1 – соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$ [8].

4. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF сторона основания AB = $\sqrt{3}$, а боковое ребро AA_1 = 11. Найти угол между прямыми SA и BC. Ответ: 30° [9].

5. Дана правильная четырехугольная пирамида PABCD с вершиной P. Отрезок BM является медианой треугольника BPD. Найти угол между прямыми BM и AC. Ответ дайте в градусах. Ответ: 90° [10].

Для итогового самостоятельного повторения теоретического материала и решения задач учащимся можно предложить следующую литературу ([11–17]) или любые другие справочные материалы.

Ссылки на источники

1. Смирнов В. А. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия / под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – С. 14.
2. Там же.
3. Там же.
4. Там же. – С. 15.
5. ЕГЭ-2013: Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий / авт.-сост. И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2013. – С. 42. – (Федеральный институт педагогических измерений).
6. Смирнов В. А. Указ. соч. – С. 5.
7. Там же.

8. Там же.
9. Семенов А. В., Трепалин А. С., Ященко И. В., Захаров П. И. Оптимальный банк заданий для подготовки учащихся. Единый государственный экзамен 2013. Математика: учеб. пособие / под ред. И. В. Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. – М.: Интеллект-Центр, 2013. – С. 64.
10. Ященко И. В. Шестаков С. А., Трепалин А. С. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2015 году. Базовый и профильный уровни: метод. указания. – М.: МЦНМО, 2015. – С. 126.
11. Смирнов В. А. Указ. соч.
12. ЕГЭ-2013: Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий / авт.-сост. И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко.
13. Семенов А. В., Трепалин А. С., Ященко И. В., Захаров П. И. Указ. соч.
14. Ященко И. В. Шестаков С. А., Трепалин А. С. Указ. соч.
15. Васильева Е. Н., Ольховая Л. С. Математика. Подготовка к ЕГЭ: секреты оценки заданий повышенного и высокого уровней сложностей. Решения и комментарии: учеб.-метод. пособие. – Изд. 2-е, перераб. – Ростов н/Д.: Легион, 2014. – 192 с.
16. Геометрия 10–11 класс / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2013. – 255 с.
17. Геометрия: учеб. для 10–11 классов / А. В. Погорелов. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 175 с.

Olga Vergazova,
Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical Bauman University, Moscow
olga.aika@yandex.ru

The use of coordinate vector method of solving stereometric problems in preparation for exam in mathematics (advanced level)

Abstract. In order to increase the level of mathematical preparation of future students of mathematical and technical specialties required at school geometry lessons, and in the process of preparation for the Unified State Examination in mathematics (advanced level) pay special attention to the math questions without a solid knowledge of which are essential for successful learning in higher education. In this article, on the example problems on solid geometry, proposed as a task of high level on the math exam profile level, demonstrates one of the possibilities of differentiated approach in the training of future first-year students in mathematical or technical Universities, who will develop a course of higher mathematics, particularly analytical geometry. On the example of solving of some problems of solid geometry demonstrates the advantages of using the coordinate-vector method. The content of the article is of interest to professors, teachers, high school students preparing for entrance to Universities to study technical or mathematical areas.

Key words: the preparation of the applicant's mathematical or technical Colleges, a differentiated approach to preparing for the math exam profile level, coordinate-vector method of solving problems in solid geometry.

References

1. Smirnov, V. A. (2011). *EGJe 2011. Matematika. Zadacha S2. Geometrija. Stereometrija,* MCNMO, Moscow, p. 14 (in Russian).
2. Ibid.
3. Ibid.
4. Ibid., p. 15.
5. Jashhenko, I. V. & Vysockij, I. R. (2013). EGJe-2013: Matematika: samoe polnoe izdanie tipovyh variantov zadanij, AST, Astrel', Moscow, p. 42 (Federal'nyj institut pedagogicheskih izmerenij) (in Russian).
6. Smirnov, V. A. (2011). Op. cit., p. 5.
7. Ibid.
8. Ibid.
9. Semenov, A. V., Trepalin, A. S., Jashhenko, I. V. & Zaharov, P. I. (2013). *Optimal'nyj bank zadanij dlja podgotovki uchashhihsja. Edinyj gosudarstvennyj jekzamen 2013. Matematika: ucheb. posobie*, Intellekt-Centr, Moscow, p. 64 (in Russian).
10. Jashhenko, I. V. Shestakov, S. A. & Trepalin, A. S. (2015). *Podgotovka k EGJe po matematike v 2015 godu. Bazovyj i profil'nyj urovni: metod. ukazanija*, MCNMO, Moscow, p. 126 (in Russian).
11. Smirnov, V. A. (2011). Op. cit.
12. Jashhenko, I. V. & Vysockij, I. R. (2013). Op. cit.
13. Semenov, A. V., Trepalin, A. S., Jashhenko, I. V. & Zaharov, P. I. (2013). Op. cit.
14. Jashhenko, I. V. Shestakov, S. A. & Trepalin, A. S. (2015). Op. cit.

15. Vasil'eva, E. N. & Ol'hovaja, L. S. (2014). *Matematika. Podgotovka k EGJe: sekrety ocenki zadanij povyshennogo i vysokogo urovnej slozhnostej. Reshenija i kommentarii: ucheb.-metod. posobie*, Izd. 2-e, pererab., Legion, Rostov n/D., 192 p. (in Russian)
16. Atanasjan, L. S., Butuzov, V. F., Kadomcev, S. B. et al. (2013). *Geometrija 10–11 klass*, Prosveshhenie, Moscow, 255 p. (in Russian)
17. Pogorelov, A. V. (2014). *Geometrija: ucheb. dlja 10–11 klassov*, 13-e izd., Prosveshhenie, Moscow, 175 p. (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru

Поступила в редакцию *Received*	05.01.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	09.01.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	09.01.17	Опубликована *Published*	11.01.17

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2017
© Вергазова О. Б., 2017