ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Чигирёва О. Ю. Методика изложения темы «Применение операционного исчисления к решению задачи Коши» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 2 (февраль). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170047.htm.

ART 170047 УДК 378.147:517.4

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Чигирёва Ольга Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва
mkfn12@yandex.ru

Методика изложения темы «Применение операционного исчисления к решению задачи Коши»

Аннотация. *В работе рассмотрены краткие теоретические сведения, связанные с применением операционного исчисления. Оригиналы и изображения, основные теоремы и типовые примеры нахождения изображения для данного оригинала сведены в таблицы. Описаны способы восстановления оригинала по известному изображению. Поскольку классические методы решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью в виде составной функции являются в значительной степени трудоемкими, наглядно показана эффективность применения операционного исчисления и методы решения таких задач. Разобрано решение задачи Коши по формуле Дюамеля.*
Ключевые слова: *оригиналы и изображения, преобразование Лапласа, задача Коши, формула Дюамеля.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Введение

Основное достоинство операционного исчисления заключается в том, что решение дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений сводится к решению обычных алгебраических уравнений, не представляющих большой сложности. При использовании теории решения дифференциальных уравнений для нахождения частного решения необходимо предварительно найти общее решение однородного дифференциального уравнения, затем его частное решение неоднородного уравнения, после чего, используя начальные условия, находится частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. При использовании операционного подхода сразу находится требуемое решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям [1, 2].

Основные теоремы операционного исчисления

Определение. Функцией-оригиналом $f(t)$ называют любую, в общем случае комплекснозначную функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) $f(t)$ кусочно-непрерывна на действительной оси, то есть она может иметь лишь точки разрыва 1-го рода, причем на любом конечном интервале их число конечно;

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Ахметова Ф. Х., Чигирёва О. Ю. Методика изложения темы «Применение операционного исчисления к решению задачи Коши» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 2 (февраль). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170047.htm.

3) $f(t)$ при $t \to +\infty$ имеет ограниченный показательный рост, то есть $\exists M > 0, \sigma : |f(t)| \le M e^{\sigma t} \quad \forall t > 0$.

Отметим, что параметр σ в условии (3) определяется неоднозначно. Число σ_0, являющееся точной нижней гранью всех таких σ, называют ***порядком роста*** функции $f(t)$.

Определение. Преобразованием Лапласа называют интегральное преобразование, которое определяется соотношением

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-pt} dt, \quad p \in \mathrm{C}.$$

Несобственный интеграл, стоящий в правой части этого равенства, зависящий от комплексного параметра p, называют ***интегралом Лапласа***. При этом функцию $F(p)$ называют ***изображением*** функции-оригинала $f(t)$.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ обозначают следующим образом: $f(t) \doteqdot F(p)$.

Функция $F(p)$, являющаяся изображением оригинала $f(t)$, аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

Таблица 1

Оригиналы и изображения

1. Функция Хевисайда: $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$ $\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}$.	4. $\cos \alpha t \doteqdot \frac{p}{p^2 + \alpha^2}$.
2. $\mathrm{e}^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p - \alpha}$.	5. $\sin \alpha t \doteqdot \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$.
3. $t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad n \in \mathrm{N}$.	6. $\operatorname{ch} \alpha t \doteqdot \frac{p}{p^2 - \alpha^2}$.
	7. $\operatorname{sh} \alpha t \doteqdot \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$.

Комментарий к табл. 1. При записи функций-оригиналов указывают, например, функцию $\mathrm{e}^{\alpha t}$, подразумевая при этом функцию $e^{\alpha t} \eta(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Чигирёва О. Ю. Методика изложения темы «Применение операционного исчисления к решению задачи Коши» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 2 (февраль). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170047.htm.

Таблица 2

Основные теоремы операционного исчисления

Название и краткая формулировка теоремы	***Типовой пример: найти изображение для данного оригинала***
1. Линейность $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(t)\doteqdot\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k F_k(p)$, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathrm{C}$	$f(t)=\cos^2 t$. • $f(t)=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$, $f(t)\doteqdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+4}\right)=\frac{p^2+2}{p^3+4p}$ •
2. Теорема подобия $f(\alpha t)\doteqdot\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right),\quad\alpha>0$	$g(t)=\cos^2 3t$. • $g(t)\doteqdot\frac{1}{3}\frac{\left(\frac{p}{3}\right)^2+2}{\left(\frac{p}{3}\right)^3+4\frac{p}{3}}=\frac{p^2+18}{p^3+36p}$ •
3. Теорема смещения $\mathrm{e}^{\alpha t}f(t)\doteqdot F(p-\alpha),\quad\alpha\in\mathrm{C}$	$g(t)=\mathrm{e}^t\cos^2 t$. • $g(t)\doteqdot\frac{(p-1)^2+2}{(p-1)^3+4(p-1)}=$ $=\frac{p^2-2p+3}{p^3-3p^2+7p-5}$ •
4. Дифференцирование оригинала Если $f^{(n-1)}(t)$ непрерывна при $t>0$, а $f^{(n)}(t)$ существует всюду, кроме, возможно, некоторого дискретного множества точек, и если все производные до $n-$го порядка включительно являются оригиналами, то $f^{(n)}(t)\doteqdot p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-\ldots$ $-f^{(n-1)}(+0)$	$f(t)=t\sin t$. • $f'(t)=\sin t+t\cos t$, $f''(t)=2\cos t-f(t)$; $\left.\begin{array}{l}f''(t)\doteqdot 2\frac{p}{p^2+1}-F(p)\\ f''(t)\doteqdot p^2F(p)\end{array}\right\}\Rightarrow$ $\frac{2p}{p^2+1}-F(p)=p^2F(p)$, $F(p)=\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}$ •

Название и краткая формулировка теоремы	***Типовой пример: найти изображение для данного оригинала***
5. Интегрирование оригинала $g(t)=\int_0^t f(u)du \doteqdot \frac{1}{p}F(p)$	$g(t)=\int_0^t \operatorname{ch}(2u)du$. • $g(t)\doteqdot \frac{1}{p}\left(\frac{p}{p^2-4}\right)=\frac{1}{p^2-4}$ •
6. Дифференцирование изображения $t^n f(t)\doteqdot(-1)^n F^{(n)}(p)$	$g(t)=t\sin t$. • $g(t)\doteqdot -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'=\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}$ •
7. Интегрирование изображения Если $f(t)$ – оригинал и функция $\frac{f(t)}{t}$ ограничена в окрестности нуля, то $\frac{f(t)}{t}\doteqdot\int_p^\infty F(q)dq$	$g(t)=\frac{\sin t}{t}$. • $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1$ ($g(t)$ ограничена в окрестности нуля), $g(t)\doteqdot\int_p^\infty\frac{dq}{q^2+1}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p$ •
8. Теорема запаздывания $f(t-a)\eta(t-a)\doteqdot e^{-ap}F(p), a>0$	$g(t)=\sin(t-a)\eta(t-a)$. • $g(t)\doteqdot e^{-ap}\frac{1}{p^2+1}$ •

Способы восстановления оригинала по известному изображению

При решении задачи о восстановлении оригинала по известному изображению используют следующие способы:

– разложение изображения на сумму простых дробей с последующим применением таблицы оригиналов и изображений;

– применение теоремы о свертке;

– применение теорем разложения.

Определение. Сверткой двух функций-оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ называют функцию

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Теорема о свертке. Если $f(t)\doteqdot F(p)$ и $g(t)\doteqdot G(p)$, то $(f*g)(t)\doteqdot F(p)G(p)$.

Первая теорема разложения. Если функция $F(p)$ аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки (∞), имеет в ∞ нуль, то она является изображением. При этом если $F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{p^n}$ – ее разложение в ряд Лорана в окрестности ∞, то $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$.

Вторая теорема разложения. Каждая рациональная функция $F(p)$, у которой степень числителя меньше степени знаменателя, является изображением. При этом

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\mu_k}A_{jk}\frac{t^{\mu_k-j}}{(\mu_k-j)!}\right)e^{p_k t},$$

где $p_1,\ldots,p_n$ – полюсы функции $F(p)$ с кратностями $\mu_1,\ldots,\mu_n$, а коэффициенты A_{jk} вычисляются по формуле

$$A_{jk}=\frac{1}{(j-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}}\left[(p-p_k)^{\mu_k}F(p)\right].$$

Следствие. Если $F(p)$ – рациональная функция с простыми полюсами $p_1,\ldots,p_n$, обращающаяся в нуль в точке ∞, и $F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$ – несократимая дробь, то $f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}$.

Третья теорема разложения. Пусть $F(p)$ аналитична всюду на комплексной плоскости, кроме некоторой конечной или счетной последовательности точек $p_1, p_2\ldots,$ являющихся ее изолированными особыми точками, причем все эти точки расположены в некоторой левой полуплоскости $\operatorname{Re}p\le\sigma_0$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) существует такая последовательность радиусов $\{R_n\}$, $\lim_{n\to\infty}R_n=\infty$, что $\lim_{n\to\infty}\max\{|F(p)|, |p|=R_n\}=0$;

2) $F(p)$ абсолютно интегрируема вдоль любой вертикальной прямой $\operatorname{Re}p=\sigma,\quad \sigma>\sigma_0$.

Тогда $F(p)$ является изображением и $f(t)=\sum_{k}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[F(p)e^{pt}\right]$.

Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение $n-$го порядка

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t)$$

и найдем его частное решение при заданных начальных условиях

$$x(0)=x_0^0,\ x'(0)=x_0^1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{n-1}.$$

Операционный метод решения данной задачи состоит в следующем. Искомую функцию $x(t)$ и ее производные до $n-$го порядка включительно, а также правую часть $f(t)$ считают функциями-оригиналами и переходят от дифференциального уравнения, связывающего функции-оригиналы, к алгебраическому уравнению относительно изображения неизвестной функции-оригинала $x(t)$.

Обозначим $x(t)\risingdotseq X(p)$, $f(t)\risingdotseq F(p)$ и применим теорему о дифференцировании оригинала:

$$x^{(k)}(t)\risingdotseq p^k X(p)-p^{k-1}x_0^0-\ldots-px_0^{k-2}-x_0^{k-1},\ k=\overline{1,n}.$$

Тогда уравнение в изображениях примет вид

$$\left(p^n X(p)-p^{n-1}x_0^0-p^{n-2}x_0^1-\ldots-px_0^{n-2}-x_0^{n-1}\right)+$$
$$+a_1\left(p^{n-1}X(p)-p^{n-2}x_0^0-\ldots-px_0^{n-3}-x_0^{n-2}\right)+\ldots+$$
$$+a_{n-1}\left(pX(p)-x_0^0\right)+a_nX(p)=F(p).$$

После преобразований приходим к линейному алгебраическому уравнению относительно неизвестного изображения:

$$A_n(p)X(p)=A_{n-1}(p)+F(p),$$

где

$$A_n(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n,$$
$$A_{n-1}(p)=x_0^0p^{n-1}+\left(x_0^1+a_1x_0^0\right)p^{n-2}+\ldots+\left(x_0^{n-2}+a_1x_0^{n-3}+\ldots+a_{n-2}x_0^0\right)p+$$
$$+x_0^{n-1}+a_1x_0^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x_0^1+a_{n-1}x_0^0.$$

Решая полученное уравнение, находим

$$X(p)=\frac{A_{n-1}(p)}{A_n(p)}+\frac{F(p)}{A_n(p)},$$

а затем восстанавливаем функцию-оригинал $x(t)$ по изображению $X(p)$.

Рассмотрим изложенную выше методику решения задачи Коши на конкретном примере.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x^{IV}-x''=\mathrm{sh}t, \\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0,\ x'''(0)=1. \end{cases}$$

Решение. Полагая $x(t)\risingdotseq X(p)$, применим теорему о дифференцировании оригинала:

$$x''(t)\risingdotseq p^2X(p), \qquad x^{IV}(t)\risingdotseq p^4X(p)-1.$$

Изображение функции-оригинала, стоящей в правой части дифференциального уравнения, находим по табл. 1:

$$f(t)=\operatorname{sh}t \risingdotseq \frac{1}{p^2-1}=F(p).$$

Тогда уравнение в изображениях примет вид

$$p^4X(p)-1-p^2X(p)=\frac{1}{p^2-1},$$

или

$$p^2\left(p^2-1\right)X(p)=\frac{p^2}{p^2-1},$$

откуда находим

$$X(p)=\frac{1}{\left(p^2-1\right)^2}.$$

Восстановим функцию-оригинал $x(t)$ по изображению $X(p)$. Покажем, как это можно сделать с помощью теоремы о свертке и третьей теоремы разложения.

Первый способ (теорема о свертке)

Замечая, что $X(p)=F(p)F(p)$, получаем

$$x(t)=(f*f)(t)=\int_0^t \operatorname{sh}u\operatorname{sh}(t-u)du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\operatorname{ch}(u+t-u)-\operatorname{ch}(u-t+u)\right]du=\frac{1}{2}(t\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t).$$

Второй способ (третья теорема разложения)

Особые точки $p_1=-1$ и $p_2=1$ функции $X(p)$ являются полюсами 2-го порядка. Найдем вычеты функции $X(p)\mathrm{e}^{pt}$ в этих точках:

$$\operatorname*{Res}_{p=-1}\left[X(p)\mathrm{e}^{pt}\right]=\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\left[\frac{\mathrm{e}^{pt}}{(p-1)^2}\right]=\lim_{p\to-1}\frac{\mathrm{e}^{pt}\left(t(p-1)-2\right)}{(p-1)^3}=\frac{\mathrm{e}^{-t}(t+1)}{4};$$

$$\operatorname*{Res}_{p=1}\left[X(p)\mathrm{e}^{pt}\right]=\lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\left[\frac{\mathrm{e}^{pt}}{(p+1)^2}\right]=\lim_{p\to1}\frac{\mathrm{e}^{pt}\left(t(p+1)-2\right)}{(p+1)^3}=\frac{\mathrm{e}^{t}(t-1)}{4}.$$

Тогда, согласно третьей теореме разложения,

$$x(t)=\frac{\mathrm{e}^{-t}(t+1)}{4}+\frac{\mathrm{e}^{t}(t-1)}{4}=\frac{t}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)=\frac{t}{2}\operatorname{ch}t-\frac{1}{2}\operatorname{sh}t.$$

Особенность следующего примера заключается в том, что правая часть дифференциального уравнения в задаче Коши – составная функция. Классические методы решения такой задачи являются в значительной степени трудоемкими. Применение операционного исчисления представляет собой достаточно эффективный метод решения данного типа задач.

ISSN 2304-120X
Научно-методический электронный журнал
Ахметова Ф. Х., Чигирёва О. Ю. Методика изложения темы «Применение операционного исчисления к решению задачи Коши» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 2 (февраль). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170047.htm.

Пример 2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x'' - 2x' + x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases} \qquad \text{где } f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \le t < 1, \\ 2 - t, & 1 \le t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(t)$ является составной и может быть представлена в следующем виде:

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t-1) + (2-t)\big(\eta(t-1) - \eta(t-2)\big) =$$
$$= \eta(t) - (t-1)\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2).$$

Для того чтобы найти изображение этой функции, применим теорему запаздывания:

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-p} + \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-2p}.$$

Далее обозначим $x(t) \doteqdot X(p)$ и применим теорему о дифференцировании оригинала:

$$x'(t) \doteqdot pX(p), \qquad x''(t) \doteqdot p^2 X(p).$$

В результате уравнение в изображениях примет вид

$$p^2 X(p) - 2pX(p) + X(p) = F(p),$$

$$\text{или } (p-1)^2 X(p) = F(p).$$

Подставим в последнее соотношение полученное выражение для $F(p)$ и найдем $X(p)$:

$$X(p) = \frac{Y(p)}{p} - \frac{Y(p)}{p^2}\mathrm{e}^{-p} + \frac{Y(p)}{p^2}\mathrm{e}^{-2p}, \text{ где } Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Восстановим функцию-оригинал $y(t)$ по изображению $Y(p)$. Применив теорему смещения, получим

$$y(t) = t\mathrm{e}^t.$$

Тогда, согласно теореме об интегрировании оригинала, изображению $\dfrac{Y(p)}{p}$ будет соответствовать функция-оригинал

$$g(t) = \int_0^t y(u)\,du = \int_0^t u\mathrm{e}^u du = t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1,$$

а изображению $\dfrac{Y(p)}{p^2}$ – функция-оригинал

$$h(t)=\int_0^t g(u)\,du=\int_0^t\left(ue^u-e^u+1\right)du=te^t-2e^t+t+2.$$

Для того чтобы восстановить функцию-оригинал $x(t)$, применим теорему запаздывания:

$$x(t)=g(t)\eta(t)-h(t-1)\eta(t-1)+h(t-2)\eta(t-2).$$

Подставив в полученное выражение найденные функции $g(t)$ и $h(t)$, получим решение задачи Коши:

$$x(t)=\left((t-1)e^t+1\right)\eta(t)-\left((t-3)e^{t-1}+t+1\right)\eta(t-1)+\left((t-4)e^{t-2}+t\right)\eta(t-2).$$

Формула Дюамеля

Рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t),\\ x(0)=x'(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0. \end{cases}$$

Обозначим $x(t)\doteqdot X(p)$, $f(t)\doteqdot F(p)$ и применим теорему о дифференцировании оригинала:

$$x^{(k)}(t)\doteqdot p^kX(p),\ k=\overline{1,n}.$$

Тогда уравнение в изображениях примет вид

$$\left(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n\right)X(p)=F(p),$$

откуда находим

$$X(p)=\Pi(p)F(p),$$

где $\Pi(p)=\dfrac{1}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n}$.

В приложениях операционного исчисления функцию-оригинал $\pi(t)$, соответствующую изображению $\Pi(p)$, называют ***передаточной функцией***.

Далее рассмотрим вспомогательную задачу Коши, соответствующую исходной задаче, в которой $f(t)=\eta(t)$:

$$\begin{cases} y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}y'(t)+a_ny(t)=\eta(t),\\ y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0. \end{cases}$$

Обозначим $y(t)\doteqdot Y(p)$. Применяя теорему о дифференцировании оригинала и учитывая, что $\eta(t)\doteqdot\dfrac{1}{p}$, получаем

$$Y(p)=\Pi(p)\frac{1}{p}.$$

Найдем, как связаны изображения решений исходной и вспомогательной задач Коши. Для этого выразим из последнего соотношения изображение передаточной функции и подставим его в формулу для определения $X(p)$:

$$X(p)=\Pi(p)F(p)=pY(p)F(p).$$

Восстановим функцию-оригинал $x(t)$ по изображению $X(p)$, замечая, что в силу нулевых начальных условий $y'(t)\doteqdot pY(p)$. Поэтому, применяя теорему о свертке, получаем ***формулу Дюамеля***:

$$x(t)=\int_0^t f(u)y'(t-u)du.$$

Следует отметить, что эту формулу можно записать и в другом виде. Действительно, учитывая, что

$$pY(p)F(p)=\big(pF(p)-f(+0)\big)Y(p)+f(+0)Y(p),$$

приходим к следующей форме записи ***формулы Дюамеля***:

$$x(t)=\int_0^t f'(u)y(t-u)du+f(+0)y(t).$$

Проиллюстрируем на примере методику решения задачи Коши с помощью формулы Дюамеля.

Пример 3. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x''-x'=\dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{\left(1+\mathrm{e}^t\right)^2}, \\ x(0)=x'(0)=0. \end{cases}$$

Решение. Запишем вспомогательную задачу Коши:

$$\begin{cases} y''-y'=\eta(t), \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

Обозначим $y(t)\doteqdot Y(p)$ и применим теорему о дифференцировании оригинала. В результате уравнение в изображениях примет вид

$$\left(p^2-p\right)Y(p)=\frac{1}{p},$$

откуда находим

$$Y(p)=\frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Восстановим функцию-оригинал $y(t)$. Для этого разложим изображение на сумму простых дробей:

$$Y(p)=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p},$$

а затем воспользуемся таблицей 1:

$$y(t)=\mathrm{e}^{t}-t-1.$$

Решение исходной задачи Коши найдем по формуле Дюамеля:

$$x(t)=\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{2u}}{\left(1+\mathrm{e}^{u}\right)^2}\left(\mathrm{e}^{t-u}-1\right)du=\mathrm{e}^{t}\int_0^t \frac{d\left(\mathrm{e}^{u}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{u}\right)^2}-\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{u}d\left(\mathrm{e}^{u}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{u}\right)^2}=$$

$$=-\mathrm{e}^{t}\frac{1}{1+e^{u}}\bigg|_0^t-\ln\left(1+e^{u}\right)\bigg|_0^t-\frac{1}{1+e^{u}}\bigg|_0^t=\frac{\mathrm{e}^{t}-1}{2}-\ln\frac{1+\mathrm{e}^{t}}{2}.$$

Данная методика применима и для решения задачи Коши с ненулевыми начальными условиями. В этом случае, согласно принципу суперпозиции, решение исходной задачи Коши следует искать в виде суммы двух функций: первая – решение однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями, а вторая – решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями.

Ссылки на источники

1. Данко П. Е., Попов А. Г. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш. шк., 2007. – Т. 2.
2. Волков И. К., Канатников А. Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.

Faniya Akhmetova,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
dobrich2@mail.ru
Olga Chigireva,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
mkfn12@yandex.ru

The method to present the topic “Application of operational calculus to the solution of the Cauchy problem”

Abstract. The paper considers a brief theoretical information related to the application of operational calculus. The authors tabulate originals and images, basic theorems and models for the location of the image for the original; describe the ways to restore the original according to the known image. Since the classical methods of solutions of the Cauchy problem for linear differential equations with constant coefficients and right-hand side in the form of a composite function are highly intensive, clearly shows the efficiency of application of operational calculus and solutions of such problems. The parsed solution of the Cauchy problem for the Duhamel formula.

Key words: originals and images, Laplace transform, Cauchy problem, Duhamel's formula.

References

1. Danko, P. E., Popov, A. G. et al. (2007). *Vysshaja matematika v uprazhnenijah i zadachah*, t. 2, Vyssh. shk., Moscow (in Russian).
2. Volkov, I. K. & Kanatnikov, A. N. (2002). *Integral'nye preobrazovanija i operacionnoe ischislenie*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	.17	Опубликована *Published*	23.02.17

ISSN 2304-120X

www.e-koncept.ru