ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Косова А. В., Пелевина И. Н., Попова Е. М. Методическое введение в курс «Элементы логики» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 2 (февраль). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170046.htm.

ART 170046 **УДК 378.147**

Косова Анна Владимировна,
старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва
anna.v.kosova@mail.ru

Пелевина Ирина Николаевна,
старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва
pdv62@mail.ru

Попова Елена Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва
elmipo@yandex.ru

Методическое введение в курс «Элементы логики»

Аннотация. *В статье предлагается методика изложения основного раздела математической логики – логики высказываний. Рассмотрено большое количество примеров, с помощью которых детально разъяснен смысл базовых определений. В работе также предлагается таблица, в которую сведены операции, логические связки, их смысл и соответствующие примеры. Статья может быть полезна преподавателям для проведения занятий и студентам первого курса.*
Ключевые слова: *высказывание, логические связки, отрицание высказывания А, конъюнкция, дизъюнкция, эквиваленция высказываний А и В.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Предмет и характер математики накладывают специфические требования на применяемую в ней логику. Согласно существующему мнению, логику можно определить как науку о правильных способах рассуждения. Поэтому в математике логика занимается анализом математических рассуждений, в которых используются точные математические понятия и применяются математические методы. Предлагаемая статья посвящена изложению основополагающего раздела математической логики – логики высказываний. В настоящее время трудно найти область знаний, в которой эта теория не применялась хотя бы неявно.

Логика занимается анализом мышления. Рассуждая на разные темы, мы делаем либо верные, либо неверные заключения. Обоснование и систематическое изложение способов рассуждения, с помощью которых выводятся верные заключения из верных исходных положений, всегда считались основными задачами логики [1–4]. В данной статье мы рассмотрим логику высказываний. Чтобы определять понятия и записывать утверждения, необходимо некоторое соглашение о системе символов и операций, с помощью которых эти утверждения формулируются.

Определение 1. Повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно, называется *простым высказыванием*, или *высказыванием*.

Рассмотрим предложения. Истинные это высказывания или ложные? Являются ли высказыванием?

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Косова А. В., Пелевина И. Н., Попова Е. М. Методическое введение в курс «Элементы логики» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 2 (февраль). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170046.htm.

1. «Число 3 – четное» – ложное высказывание
2. «Река Ангара вытекает из озера Байкал» – истинное высказывание.
3. «Река X впадает в Каспийское море» – если вместо переменной X подставить конкретное значение, то это предложение превращается в высказывание.
4. «Который час?» – это предложение не является высказыванием, так как ничего нельзя сказать об его истинности.

Теперь из простых высказываний будем строить *сложные* (цепочки высказываний) с помощью операций, называемых *логическими связками*, которые в русском языке соответствуют словам «не», «и», «или», «тогда и только тогда».

Истинность сложного высказывания полностью определяется истинностью или ложностью простых высказываний, из которых оно состоит.

Определение 2. *Отрицанием* высказывания А называется высказывание $\neg A\,(\bar{A})$, которое истинно тогда, когда А ложно.

Пример 1. А: «Число 625 трехзначное».

$\bar{A}$: «Число 625 не является трехзначным».

Определение 3. *Конъюнкцией* высказываний А, В называется высказывание $A \wedge B$ («и»), которое истинно тогда, когда истинны оба высказывания А и В.

Пример 2. «Таня отличница и любит путешествовать».

Пример 3. «Неравенство $5 < 4 < 9$ ложное, так как представляет собой конъюнкцию высказываний ложного $5 < 4$ и истинного $4 < 9$ ».

Определение 4. Дизъюнкцией высказываний А, В называется высказывание $A \vee B$ («или»), которое истинно, когда истинно хотя бы одно из высказываний А или В.

Пример 4. «Летом мы поедем в горы или отправимся на море».

Пример 5. « $7 \geq 3$ ».

Определение 5. *Импликацией* высказываний А, В называется высказывание $A \Rightarrow B$, которое ложно тогда, когда А истинно, а В – ложно. При этом А называется посылкой, а В – заключением импликации $A \Rightarrow B$.

Пример 6. «Если число 48 кратно 8, то оно кратно 4».

Пример 7. «Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой».

Определение 6. *Эквиваленцией* высказываний А, В называется высказывание $A \Leftrightarrow B\,(\leftrightarrow)$, которое истинно тогда, когда оба высказывания А и В или истинны, или ложны.

Пример 8. «Число 792 кратно 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа кратна 9».

Рассмотренные определения 2–6 сведем в таблицу и приведем соответствующие примеры:

Операция	***Связка***	***Смысл***	***Пример***
$\neg, \bar{\ }$	«не», «не верно, что»	Отрицание	$\neg(1 > 2)$ не верно, что один больше двух
$\wedge$	«и»	Одновременность действий	(2-простое) $\wedge$ (2-четное)
$\vee$	«или»	Соединение	$(5 > 2) \vee (5 = 2)$
$\Rightarrow, \rightarrow$	«Если…, то…»	Следование	«Если я куплю билеты, то пойду в театр»
$\Leftrightarrow, \leftrightarrow$	«Тогда и только тогда», «Необходимо и достаточно»	Равносильность	$([AB] \square [A'B'] \wedge [AC] \square [A'C'] \wedge \angle BAC = \angle B'A'C') \Leftrightarrow \square ABC \cong \square A'B'C')$ Признак конгруэнтности треугольников по двум сторонам и углу между ними

Основные эквивалентности

1. $\overline{\overline{A}} = A$ (правило двойного отрицания).
2. $A \wedge A = A$.
3. $A \vee A = A$.
4. $A_1 * A_2 = A_2 * A_1$ (коммутативность связки).
5. $(A_1 * A_2) * A_3 = A_1 * (A_2 * A_3)$ (ассоциативность связки), где * – символ, являющийся общим обозначением для связок $\wedge, \vee, \Leftrightarrow$.
6. $A_1 \wedge (A_2 \vee A_3) = (A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_3)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции).
7. $A_1 \vee (A_2 \wedge A_3) = (A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_3)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции).

При изучении математики часто приходится рассматривать предложения, называемые теоремами. Каким бы ни было содержание теоремы, она всегда представляет собой высказывание, истинность которого устанавливается при помощи доказательства.

Определение 7. Предложение, содержащее одну или несколько переменных, которое при конкретных значениях переменных является высказыванием, называется *предикатом*.

Часто теоремы имеют форму импликаций А$\Rightarrow$В.

Пример 9. «Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно конгруэнтны, то этот четырехугольник – параллелограмм».

Пусть X – множество всех четырехугольников, x – произвольный четырехугольник. Тогда посылка данной импликации есть предикат A(x): «В четырехугольнике x противоположные стороны попарно конгруэнтны». А заключение есть B(x): «Четырехугольник x – параллелограмм».

Запись теоремы: $(\forall x \in X)\,(A(x) \Rightarrow B(x))$.

Если в теореме посылку и заключение заменить отрицаниями, то получится новая теорема: $(\forall x \in X)\,(\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)})$, которая называется противоположной.

Пример 10. «Если противоположные стороны четырехугольника попарно не конгруэнтны, то он не является параллелограммом».

Такие теоремы доказываются методом от противного.

Всякое рассуждение состоит в последовательном переходе от одной мысли к другой. Математические суждения обычно записываются в виде текстов на выбранном языке с добавлением математической символики. Поэтому пример теоремы мы рассмотрели с помощью предикатов.

Хотя логика и является основой всех остальных наук, интерес к логическим исследованиям оживился под влиянием открытия неевклидовых геометрий и стремления обеспечить строгое обоснование анализа. Математический мир был потрясен открытием парадоксов, т. е. рассуждений, приводящих к противоречиям [5].

Давайте рассмотрим примеры логических парадоксов.

1. Понятие множества, подобно понятиям точки, числа, не сводится к другим понятиям математики. Под множеством мы понимаем «набор» или «совокупность» некоторых объектов. Объекты множества называются его элементами. Например, множество четных чисел, множество студентов в аудитории. Большинство множеств не являются элементами самих себя. Например, множество всех натуральных чисел не является элементом самого себя, потому что множество чисел не является числом, или, например, множество всех котов не является элементом самого себя, потому что оно само не кот.

2. Парадокс лжеца. Некто говорит: «Я лгу». Если он при этом лжет, то сказанное им есть ложь и, следовательно, он не лжет. Если же он при этом не лжет, то сказанное им есть истина и следовательно он лжет. В любом случае оказывается, что он лжет и не лжет одновременно.

3. Этот парадокс возникает в теории порядковых чисел и будет понятен только тому, кто уже знаком с теорией порядковых чисел. Для любого порядкового числа существует порядковое число, его превосходящее. Однако порядковое число, определяемое множеством всех порядковых чисел, является наибольшим порядковым числом.

4. Прилагательное называется автологическим, если свойство, которое оно обозначает, присуще ему самому. Прилагательное называется гетерологическим, если свойство, которое оно обозначает, ему самому не присуще. Так, например, прилагательные «многосложный», «русский» являются автологическими, а прилагательные «многосложный», «французский», «голубой» – гетерологическими. Рассмотрим прилагательное «гетерологический». Если это прилагательное гетерологично, то оно негетерологично. Если же оно негетерологично, то оно гетерологично. Итак, в любом случае прилагательное «гетерологический» является гетерологическим и негетерологическим одновременно.

5. Рассмотрим парадоксы теории множеств Кантора, созданной в 70-х гг. XIX в. Эта теория давала вполне конкретное и вместе с тем довольно общее определение понятия бесконечного множества, на основе которого можно было попытаться объединить все математические теории, свести их к ней, создать единую целостную систему математических знаний. Но очень скоро обнаружилось, что в ней содержится ряд противоречий, зачастую ведущих к парадоксальным ситуациям. Первый парадокс вытекает из рассмотрения порядкового типа множества всех порядковых типов. Исходя из теории порядковых типов Кантора, этот парадокс можно сформулировать так. Вполне упорядоченное множество всех порядковых чисел имеет порядковое число, которое больше любого из порядковых чисел, составляющих это множество, а значит, больше любого порядкового числа. Но, включая это наибольшее порядковое число во множество всех порядковых чисел, мы тем самым создаем новое множество и новое порядковое число, что обязывает нас образовывать новое множество всех порядковых чисел, включающее и только что образованное, и т. д. до бесконечности. Получается, что нет никакого большего порядкового числа.

Второй парадокс Кантор открыл в 1899 г. Он касается отношения множества всех множеств, или множества всех трансфинитных кардинальных чисел, и носит имя Г. Кантора, который одинаково логично доказал два противоречащих положения: как то, что мощность множества всех подмножеств множества М больше мощности множества всех множеств М, так и то, что это неверно. Парадоксальность полученных результатов заключается в том, что диалектическое противоречие актуальной бесконечности (в данном случае – части и целого) с необходимостью выражается в формально-логических противоречиях и обойти, избежать их никак нельзя. По-видимому, здесь возникает такая ситуация, когда диалектические противоречия не могут быть выражены иначе, как только через формально-логическое противоречие, т. е. через совмещение двух противоречащих друг другу суждений.

Дело заключается еще в том, что изменчивость того предмета, высказывания о котором рассматриваются, обычно не принимается во внимание в логике. Только при таких особых обстоятельствах, как в случае данного парадокса, явно обнаруживается изменчивость того, о чем высказывается суждение, потому что само высказывание оказывает влияние на это. Так, в первых двух парадоксах теории множеств сам акт образования порядкового типа множества всех порядковых чисел, или множества всех множеств, создает новую ситуацию, новый предмет высказывания.

Это новое должно быть включено в то, что существовало раньше. Но тем самым снова создается новый объект, и т. д. до бесконечности. «Схваченная бесконечность», т. е. актуальная, очевидно, обнаруживает здесь свою противоречивость явным образом, и это закономерно. Единственно, что можно «поставить в упрек» актуальной бесконечности в данных парадоксах, так это то, что подчас она оборачивается в них потенциальной, даже «дурной» бесконечностью. В самом деле, нельзя ведь сказать, что совершенно невозможно образовать множество всех множеств или порядковый тип множества всех порядковых типов. Но практически в каждый данный момент это оказывается невозможным. Получается, что процесс образования таких «объектов» возможен, а окончание его – невозможно. Но тогда выходит, что парадоксы-то потому и возникают, что математики исходили из «целой», «всей» бесконечности, т. е. из актуальной.

В описанных парадоксах нарушено неписаное правило: четко разделять «сферы» субъекта и предиката. Происходит чуть ли не подмена одного понятия другим. В суждении создается существенное изменение самим актом создания, образования этого суждения. Обозначим все существующие множества бесконечным рядом a, b, c, d и т. д. Напишем суждение: a, b, c, d и т. д. есть совокупность всех существующих множеств. Обозначим их совокупность через М и образуем простейшее суждение, не нуждающееся даже в самом простом акте обобщения: М есть множество всех множеств. Образовав множество М, мы тем самым создаем новые отношения между субъектом и предикатом, ибо субъект теперь оказывается лишь одним из множеств, а не всей их совокупностью, охваченной в предикате: ведь в бесконечном ряду a, b, c, d и т. д. отсутствует М! Приходится включить множество М в объем предиката, т. е. изменить этот объем в самом процессе рассуждения. Тем не менее такая акция, совершенная однократно, нас не спасает. Поскольку каждый раз изменяем не только субъект, мы должны вслед за ним изменить и предикат, и отношение субъекта к предикату, восстанавливая положение. Это никаким конечным числом «восстановительных» действий не удается сделать. В результате мы и попадаем в парадоксальное положение, подобное тому, которое присуще всякому механическому движению, перемещению, поскольку оно есть и нахождение, и не нахождение в каждой данной точке пути. По аналогии можно утверждать: множество всех множеств и существует в каждый данный момент, и не существует. Подобное «смещение» субъекта с предикатом, вернее, постоянные переходы этих противоположностей друг в друга, процесс отрицания отрицания – все это формальной логикой ни в коем случае не допускается, поскольку обычно в формальной логике молча предполагается, что в процессе рассуждений и субъект, и предикат сохраняют свой «ранг», т. е. свой объем и свое содержание.

Во втором парадоксе получаются два несовместимых вывода, сделанных из строго доказанных положений (что мощность множества всех подмножеств данного множества и больше, и меньше этого данного множества в одно и то же время), по той причине, что явно обнаруживается глубоко диалектическое соотношение части и целого в актуальной бесконечности. Как известно, здесь целое может быть равномощно (очень упрощенно говоря – равно) своей части, что противоречит «молчаливо принятым» исходным положениям формальной логики. Часть всегда должна быть строго меньше целого. Хотя это утверждение не входит в число законов формальной логики, но всегда предполагается как незыблемое. В бесконечности это соотношение нарушено, осложнено противоречием, и потому процесс вывода, касающийся отношения частей и целого в актуально бесконечном, не может не натолкнуться на противоречие. Нарушается закон исключенного третьего, так как часть и равна, и не равна целому в бесконечности. Более того, все возможные комбинации из элементов множества всех множеств, т. е. подмножеств, должны входить в него, поскольку оно включает все существующие множества. Это также не соответствует аналогичным отношениям для конечных (и даже бесконечных, меньшей мощности) множеств.

Традиционная логика предполагает, хотя это обычно специально не оговаривается, что и субъект, и предикат имеют достаточно четкие, конечные границы, как в смысле объема, так и в смысле содержания.

Таким образом, смысл этих двух парадоксов теории множеств заключается в том, что они отражают в явной форме диалектику бесконечности, обнаруживая границы применения формальной логики по отношению к области бесконечного. Признание диалектической логики как правомерной и более глубокой, чем формальная логика, является выходом из этих парадоксов в том смысле, что они должны быть признаны неизбежными как проявление диалектики мышления и как отражение объективной диалектической противоречивости бесконечного. Об этом лишний раз свидетельствует то обстоятельство, что в наше время даже те из зарубежных математиков, философов и логиков, кто раньше и не помышлял о признании диалектики, начинают признавать наличие противоречий в математике и логике.

Анализ парадоксов привел к различным планам их устранения. Все эти планы предлагают тем или иным путем ограничивать «наивные» понятия, участвующие в выводе этих парадоксов. Какой бы мы, однако, ни избрали подход к проблеме парадоксов, следует сперва исследовать язык логики и математики. Надо разобраться в том, какие в ней могут быть употреблены символы, как из этих символов составляются теоремы, формулы, утверждения и доказательства, что может и что не может быть доказано, если исходить из тех или иных аксиом и правил вывода. В этом и состоит одна из задач математической логики.

Методика, которая положена в основу данной статьи, позволит студентам глубже разобраться в рассмотренной теме «Логика высказываний». Теоретический материал носит справочный характер, но рассмотрено достаточно большое количество примеров, которые помогут студентам подготовиться к практическим занятиям.

Ссылки на источники

1. Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е. Вводный курс математической логики. – М.: Физматлит, 2002.
2. Хомич В. И. Логика высказываний и исчисление высказываний. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
3. Шенфилд Д. Математическая логика / пер. с англ. – М.: Наука, 1975.
4. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971.
5. Бурова И. Н. Парадоксы теории множеств и диалектика. – М.: Наука, 1976.

Anna Kosova,
Senior lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
anna.v.kosova@mail.ru
Irina Pelevina,
Senior lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
pdv62@mail.ru
Elena Popova,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
elmipo@yandex.ru

Methodological introduction to the course “Elements of logic”

Abstract. The paper proposes a methodology for the presentation of a main section of mathematical logic – propositional logic. The authors consider a large number of examples, which explain the meaning of the basic definitions. The paper provides a table that summarized the operations disjunction, their meaning and examples. The paper can be useful to teachers and first-year students.

Key words: statement, disjunction, negation of statement A, conjunction, disjunction, equivalence of statements A and B.

References

1. Uspenskij, V. A., Vereshhagin, N. K. & Plisko, V. E. (2002). *Vvodnyj kurs matematicheskoj logiki,* Fizmatlit, Moscow (in Russian).
2. Homich, V. I. (2004). *Logika vyskazyvanij i ischislenie vyskazyvanij*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow (in Russian).
3. Shenfild, D. (1975). *Matematicheskaja logika* , per. s angl., Nauka, Moscow (in Russian).
4. Mendel'son, Je. (1971). *Vvedenie v matematicheskuju logiku*, Nauka, Moscow (in Russian).
5. Burova, I. N. (1976). *Paradoksy teorii mnozhestv i dialektika*, Nauka, Moscow (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	.17	Опубликована *Published*	23.02.17

ISSN 2304-120X

www.e-koncept.ru