

Тестов Владимир Афанасьевич,
доктор педагогических наук, профессор ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет», г. Вологда
vladafan@inbox.ru



Изучение неравенств с применением стратегии обучения на социокультурном опыте

Аннотация. В статье рассматривается стратегия обучения, основанная на социокультурной роли математики в обучении. В процессе обучения обучающиеся должны понимать, как связаны изучаемые ими понятия с насущными задачами практики. В качестве примеров использования данной стратегии приводятся задачи с практическим содержанием, математической моделью которых является неравенство или система неравенств.

Ключевые слова: стратегия обучения, социокультурный опыт, метапредметные результаты, изучение неравенств.

Раздел: (01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).

В обучении математике есть несколько узловых проблем, которые не могут получить своего решения в течение длительного времени. Одна из таких проблем – трудности, связанные с изучением в школе неравенств. Тема «Неравенства» у части школьников является нелюбимым разделом курса математики в силу ее сложности и оторванности преподавания этой темы от практики. В последние годы положение с изучением неравенств в школьном курсе математики, как показывают результаты ЕГЭ и обследование знаний школьников и студентов, становится совершенно неблагоприятным. В работе автора [1] вскрываются некоторые причины плохого понимания школьниками этой темы и отмечается, что слабое знание первокурсниками основ теории неравенств приводит к значительным трудностям при изучении ими в вузе математического анализа и других дисциплин.

При изучении неравенств важно широко использовать три взаимосвязанные стратегии обучения [2], в частности стратегию обучения на социокультурном опыте. В соответствии с этой стратегией математика рассматривается не только как готовый продукт, результат научной деятельности предыдущих поколений, но и как вид человеческой деятельности. С позиций нового школьного ФГОС в обучении наиболее важен именно деятельностный аспект математики, позволяющий рассматривать математику как метапредмет, как инструмент для познания. Применение стратегии обучения на социокультурном опыте помогает учащимся понять абстрактные конструкции, оперировать ими, наиболее полно видеть предмет математики и ее приложения. Обучающиеся должны в процессе обучения получить представление о том, как создавалось здание математики, понять, что математика как элемент общечеловеческой культуры строится на фундаменте знаний, полученных в прошлом, увидеть все многообразие ее составных частей в виде целостной системы. Учащийся при изучении математики должен понимать, зачем ему этот предмет нужен, как связаны изучаемые им понятия с насущными задачами практики. Ему следует показать, что вводимые в курс научные понятия естественным образом появляются из запросов практики, а за-

тем их получают в абстрактной форме. Кроме того, недопустимо, чтобы у обучающихся создавалось впечатление, что предмет живет своей собственной жизнью, далекой от практической деятельности [3].

Обучение математике на социокультурном опыте создает огромные возможности в познании не только окружающей нас природы, но и самого человека, его мыслительной и познавательной деятельности. В обучении на социокультурном опыте одной из главных составляющих является овладение универсальными учебными действиями, методами познания. Социокультурная роль изучения математики состоит также в том, что учащиеся получают представление о роли четких определений и формулировок, о правильной классификации понятий, о способах логического вывода, они знакомятся с методами решения возникающих перед ними проблем, имеющих метапредметное значение (аналогия, сравнение, обобщение, анализ и синтез и т. д.). Обучение математике, формирование у них когнитивных структур и особенно логических, алгоритмических и комбинаторных схем мышления, несомненно, способствует формированию навыков умственного труда (планированию своей работы, поиску рациональных путей ее выполнения, критической оценке результатов и т. п.) [4].

Стратегию обучения на социокультурном опыте следует использовать с первых этапов изучения неравенств. Необходимо показать учащимся, что задачи с неравенствами возникают в самых различных жизненных ситуациях. Для этого надо использовать задачи с практическим содержанием, математической моделью которых является неравенство или система неравенств. К сожалению, в учебниках примеры таких задач практически отсутствуют. Однако их можно найти в некоторых пособиях, в частности в книгах [5, 6]. Ниже приводятся несколько таких примеров.

1) *Лодочник проплыл n километров по течению реки со скоростью 7 км/ч и вернулся обратно, двигаясь против течения со скоростью 4 км/ч. На следующий день он проплыл по озеру расстояние, равное $2,4n$ (км), причем двигался со скоростью 6 км/ч. На какой из двух маршрутов потребовалось больше времени?*

Решение. На первый маршрут лодочнику потребовалось $\frac{n}{7} + \frac{n}{4}$ ч, на второй маршрут ему потребовалось $\frac{2,4n}{6}$ ч. Первое число равно $\frac{33}{84}n$, а второе число равно $\frac{33,6}{84}n$. Поэтому времени потребовалось больше на второй маршрут.

2) *Населенные пункты А и В расположены на расстоянии S друг от друга. Себестоимость одной тонны угля в пункте А составляет q рублей, а в пункте В на $p\%$ дороже. В каких пунктах, расположенных между А и В, уголь, привезенный из пункта В, обойдется дешевле угля, привезенного из пункта А, если перевозка 1 т угля на расстояние 1 км обходится в n рублей?*

Решение. Пусть пункт С расположен на расстоянии l км от А и на расстоянии $S - l$ от В. Тогда в пункте С себестоимость одной тонны угля, привезенной из пункта А, будет равна $q + nl$, а себестоимость одной тонны угля, привезенной из пункта В, будет равна $q + \frac{qp}{100} + (S - l)n$. Поэтому получаем неравенство: $q + \frac{qp}{100} + (S - l)n < q + nl$ или $\frac{q(100 + p)}{100} + Sn - q < 2nl$. Откуда расстояние l должно быть больше, чем $\frac{qp}{200n} + \frac{S}{2}$ км.

На следующих этапах при изучении неравенств с переменными можно предложить учащимся такие задачи.

3) *Два автохозяйства отправили несколько машин для перевозки грузов. Число машин, отправленных из второго автохозяйства, меньше удвоенного числа машин, отправленных из первого. Если бы первое автохозяйство послало на две машины больше, а второе на две машины меньше, то машин из второго автохозяйства было бы больше, чем машин из первого. Сколько машин отправлено из каждого автохозяйства, если всего было отправлено менее 18 машин?*

Решение. Обозначим через x и y число машин, отправленных первым и вторым автохозяйствами соответственно. По условию $y < 2x$, $y - 2 > x + 2$, $x + y < 18$. Следовательно, задача сводится к решению в целых положительных числах следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} y < 2x \\ y > x + 4 \\ x + y < 18 \end{cases}$$

Из первых двух неравенств следует, что $2x > x + 4$, т. е. $x > 4$. Из второго и третьего неравенств следует, что $x < 7$. Таким образом, либо $x = 5$, либо $x = 6$.

При $x = 5$ из первых двух неравенств получаем $y < 10$, $y > 9$, т. е. в этом случае целых решений не существует. При $x = 6$ получаем $y < 12$, $y > 10$, т. е. $y = 11$. Таким образом, из первого автохозяйства отправили 6 машин, а из второго – 11 машин.

4) *В двух бригадах вместе более 27 человек, число членов первой бригады более чем в два раза превышает число членов второй бригады, уменьшенное на 12. Число членов второй бригады более чем в 9 раз превышает число членов первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько человек в каждой бригаде?*

Решение. Обозначим через x и y число членов первой и второй бригад соответственно. Тогда задача сводится к решению в целых положительных числах следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x + y > 27 \\ x > 2(y - 12) \\ y > 9(x - 10) \end{cases}$$

Из второго неравенства этой системы получаем $2y > 18x - 180$ или $2y - 24 > 18x - 204$. Тогда из второго неравенства данной системы получаем $x > 18x - 204$, откуда $x < 12$. Но из условия задачи $x > 10$. Поэтому $x = 11$. Далее из второго неравенства данной системы получаем $12 > 2y - 24$ или $y < 18$. Таким образом, $30 > x + y > 27$, поэтому $x + y$ равно или 28, или 29, откуда y равно 17 или 18. Но последнее значение не удовлетворяет второму неравенству из данной системы. Следовательно, $x = 11$, $y = 17$.

С точки зрения стратегии обучения на социокультурном опыте представляется весьма важным рассмотреть с учащимися примеры задач на нахождение наибольших и наименьших значений с использованием неравенств.

5) *На собрании акционеров было решено увеличить прибыль предприятия за счет расширения ассортимента продукции. Экономический анализ показал, что 1) дополнительные доходы, приходящиеся на каждый новый вид продукции, окажутся равными 75 млн руб. в год; 2) дополнительные расходы при освоении одного нового вида продукции составят 13 млн руб. в год, а освоение каждого последующего вида потребует на 7 млн руб. в год больше расходов, чем освоение предыдущего. Найти значение максимального возможного прироста прибыли.*

Решение. Прибыль при освоении n -го вида продукции составит $75 - 13 - 7(n - 1) = 69 - 7n$ млн руб. в год. Прибыль будет положительной, если $69 - 7n > 0$. Следовательно, $n = 9$ – максимально возможное число новых видов продукции, выпуск которых будет приносить прибыль. Тогда максимальная прибыль (в млн руб.) составит $(69 - 7) + (69 - 14) + \dots + (69 - 63) = 306$.

6) Трём бригадам поручена некоторая работа. Известно, что 1-я и 2-я бригады, работая вместе, могут выполнить ее за 55 дней. Известно также, что 3-я бригада затратила бы на эту же работу на 11 дней больше, чем 2-я. Найдите наименьший возможный срок, за который выполнят эту работу три бригады, работая вместе.

Решение. Пусть x , y , z – та часть работы, которая выполняется каждой бригадой за

один день. По условию задачи составляем два уравнения:
$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{55} \\ \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = 11 \end{cases}$$
 . Время, за которое

три бригады, работая вместе, выполнят всю работу, равно $t = \frac{1}{x + y + z}$. Из первого уравнения получаем $t = \frac{1}{\frac{1}{55} + z}$. Так как из первого уравнения имеем $y \leq \frac{1}{55}$, то из второго уравнения $\frac{1}{z} = 11 + \frac{1}{y} \geq 11 + 55 = 66$, откуда $z \leq \frac{1}{66}$. Тогда $t = \frac{1}{\frac{1}{55} + z} \geq \frac{1}{\frac{1}{55} + \frac{1}{66}} = 30$. Таким образом,

наименьшее время выполнения работы тремя бригадами равно 30 дням.

Весьма полезным для учащихся является и знакомство с задачами на оптимизацию. Хотя такие задачи и не входят в программу основной школы, они имеют наглядную геометрическую интерпретацию и не требуют в простейших случаях больших затрат времени. Ниже приводятся примеры таких задач.

7) Некоторая фирма выпускает продукцию двух видов: Π_1 и Π_2 . Для производства продукции требуется сырье четырех видов: C_1 , C_2 , C_3 , C_4 . Запас сырья и расход его на единицу каждого вида продукции задается таблицей:

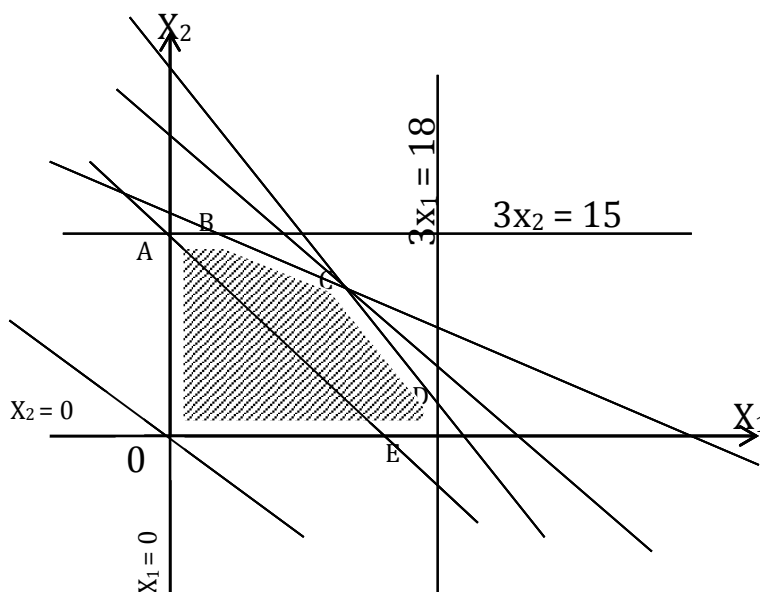
Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья на единицу продукции	
		Π_1	Π_2
C_1	19	2	3
C_2	13	2	1
C_3	15	0	3
C_4	18	3	0

Доход фирмы от единицы продукции вида Π_1 равен 7 денежным единицам, а от единицы продукции вида Π_2 – 5 денежным единицам. Как спланировать выпуск продукции, чтобы доход фирмы был наибольшим?

Решение. Пусть x – число единиц продукции вида Π_1 , y – число единиц продукции вида Π_2 . Допустимыми с точки зрения ресурсов фирмы являются значения x и y , удовлетворяющие следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 19 \\ 2x + y \leq 13 \\ 3y \leq 15 \\ 3x \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Изобразим на чертеже штриховкой множество точек плоскости $ХОУ$, координаты которых удовлетворяют данной системе неравенств.



Оно представляет собой замкнутый шестиугольник OABCDE. Каждая точка (x, y) этого шестиугольника соответствует определенному плану, возможному с точки зрения наличных ресурсов фирмы. Нас интересуют те точки шестиугольника, которые дают максимальный доход фирме. Этот доход подсчитывается по формуле $7x + 5y$, т. е. является линейной функцией от двух переменных x и y . Таким образом, надо найти ту точку (или точки) из шестиугольника, которая обеспечивает максимальное значение функции $f(x, y) = 7x + 5y$.

Каждому заданному значению f соответствует своя прямая плоскости (линия постоянного дохода). С изменением f линия одинакового дохода поступательно, т. е. параллельно сама себе, перемещается. Например, уравнению $7x + 5y = 0$ (значение $f = 0$) соответствует прямая, проходящая через начало координат. Эта точка $(0, 0)$ является точкой входа в шестиугольную область, в ней доход минимален (равен 0). Ясно, что с увеличением f линия одинакового дохода перемещается, удаляясь от начала координат. И чем дальше эта линия удалилась от начала координат, тем больше f , т. е. доход фирмы. Если, например, $f = 25$, то прямая $7x + 5y = 25$ проходит через точку A. Однако из рисунка видно, что в шестиугольнике есть точки, в которых значение f еще больше. Наибольшее значение f принимает в точке выхода прямой из области – это вершина C шестиугольника.

Точка C является пересечением двух прямых: $2x + 3y = 19$ и $2x + y = 13$. Решая систему из этих двух уравнений, находим координаты точки C: $x = 5$, $y = 3$. Таким образом, максимальный доход равен $f(5, 3) = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50$.

8) На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах соответственно равных 24, 31 и 18 штук. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данных способах раскроя приведено в таблице. В ней же указаны величины отходов, которые получаются при данных способах раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество (шт) заготовок по способу	
	1	2
1	2	6
2	5	4
3	2	3
Величина отходов (куб. см)	12	16

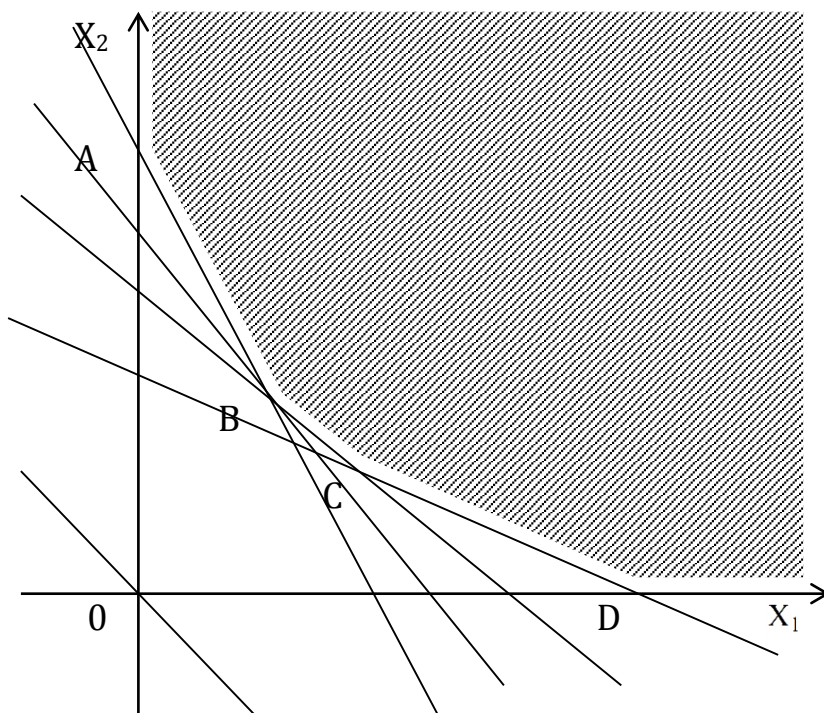
Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

Решение. Обозначим через x и y количество листов фанеры, выкроенных первым и вторым способами соответственно. Получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x + 6y \geq 24 \\ 5x + 4y \geq 31 \\ 2x + 3y \geq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

и функцию $f(x, y) = 12x + 16y$, для которой надо найти точку (x, y) , ее минимизирующую.

Изобразим на плоскости $ХОУ$ множество точек, координаты которых удовлетворяют данной системе неравенств. Оно неограниченно сверху и справа.



Необходимо найти точки в этой области, в которых линейная функция $f(x, y) = 12x + 16y$ принимает минимальное значение.

Каждому заданному значению f соответствует своя прямая плоскости (линия постоянных отходов). Проводим прямую $12x + 16y = 0$, на ней $f = 0$. С увеличением f линия постоянных отходов поступательно перемещается параллельно прямой $12x + 16y = 0$. Точкой входа в область допустимых значений решений данной системы неравенств является точка B . При дальнейшем перемещении линии постоянных отходов значение f будет увеличиваться. Следовательно, минимальным отходам соответствует $f(B)$. Точка B есть пересечение прямых $5x + 4y = 31$ и $2x + 3y = 18$. Решая систему из этих двух уравнений, находим $x = 3$, $y = 4$. Минимальные отходы равны $f(3, 4) = 12 \cdot 3 + 16 \cdot 4 = 100$.

При изучении неравенств очень важными являются задачи на доказательство. Однако у части учащихся может возникнуть представление об оторванности таких задач от потребностей практики. Чтобы этого не произошло, учителю необходимо использовать стратегию обучения на социокультурном опыте и включать в содержание уроков прикладные задачи на неравенства. Примеры таких задач приводятся ниже.

9) *Доказать, что если n проводников, сопротивления которых образуют арифметическую прогрессию: $(n+1)R, (n+2)R, \dots, (2n-1)R, 2nR$ соединить параллельно, то как бы ни было велико число n этих проводников, сопротивление полученного соединения будет меньше, чем $2R$.*

Решение. Обозначим искомое сопротивление через x . Тогда по правилу Кирхгофа получаем $\frac{1}{x} = \frac{1}{(n+1)R} + \frac{1}{(n+2)R} + \dots + \frac{1}{2nR}$, откуда $x = \frac{R}{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}$. Но

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} >> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \text{ Поэтому } x < 2R.$$

10) *Известно, что цена бриллианта пропорциональна квадрату его веса. Доказать, что если распилить бриллиант на несколько частей, то стоимость его уменьшится, причем понижение стоимости будет наибольшим, когда части будут равны.*

Решение. Пусть вес бриллианта P каратов. Разделим его на n частей, веса которых p_1, p_2, \dots, p_n . Тогда $P = p_1 + p_2 + \dots + p_n$. Пусть стоимость бриллианта до разлома $C = kP^2 = k(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2$, а после разлома $C_1 = kp_1^2 + kp_2^2 + \dots + kp_n^2 = k(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)$. Докажем, что $C > C_1$. В самом деле, $C = k(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) + 2k(p_1p_2 + p_1p_3 + \dots + p_{n-1}p_n) >> k(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) = C_1$. Итак, мы доказали, что стоимость всех частей бриллианта меньше стоимости целого.

Далее, пусть $p_1 = \frac{P}{n} + x_1, p_2 = \frac{P}{n} + x_2, \dots, p_n = \frac{P}{n} + x_n$, где $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, так как $P = p_1 + p_2 + \dots + p_n = n \frac{P}{n} + (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$. Тогда $C_1 = k[(\frac{P}{n} + x_1)^2 + (\frac{P}{n} + x_2)^2 + \dots + (\frac{P}{n} + x_n)^2]$
 $= k[n \frac{P^2}{n^2} + 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \frac{P}{n} + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)] = k[n \frac{P^2}{n^2} + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)]$. Отсюда заключаем, что наименьшая стоимость всех частей бриллианта будет, когда $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 0$, а последнее возможно лишь тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, т. е. когда $p_1 = p_2 = \dots = p_n$, что и требовалось доказать.

Использование стратегии обучения на социокультурном опыте, решение задач с практическим содержанием значительно повышает мотивацию обучающихся к изучению темы «Неравенства» и способствует лучшему усвоению этой темы.

Ссылки на источники

1. Тестов В. А. О некоторых проблемах при изучении неравенств // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 17. – Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015. – С. 279–289.
2. Тестов В. А. Стратегия обучения математике: монография. – М.: «Технологическая школа бизнеса», 1999. – 303 с.
3. Тестов В. А. Обучение на социокультурном опыте как средство повышения мотивации к изучению математики // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 1 (январь). – С. 6–10. – URL: <http://e-koncept.ru/2016/16002.htm>.
4. Тестов В. А. О некоторых видах метапредметных результатов обучения математике // Образование и наука. – 2016. – № 1. – С. 4–20.
5. Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1967. – 303 с.
6. Тестов В. А. Величины, числа, неравенства: стратегия обучения: учеб.-метод. пособие. – Вологда: Изд. Центр ВИРО, 2005. – 132 с.

Vladimir Testov

Doctor of Pedagogic Sciences, Professor, Vologda State University, Vologda

vladafan@inbox.ru

Study of inequalities with the use of learning strategies on the social-cultural experience

Abstract. The paper discusses the strategy of learning based on social-cultural role of mathematics in education. In the learning process, students must understand how to relate concepts studied by them with the urgent tasks of the practice. Tasks with practical content, mathematical model of which is the inequality or system of inequalities, are given as the example.

Key words: learning strategy, sociocultural experience, metasubject results, learning inequalities.

References

1. Testov, V. A. (2015). "O nekotoryh problemah pri izuchenii neravenstv", *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vjatskogo regiona*. Vyp. 17, Izd-vo ООО "Raduga-PRESS", Kirov, pp. 279–289 (in Russian).
2. Testov, V. A. (1999). *Strategiya obuchenija matematike: monografija*, "Tehnologicheskaja shkola biznesa", Moscow, 303 p. (in Russian).
3. Testov, V. A. (2016). "Obuchenie na sociokul'turnom opyte kak sredstvo povyshenija motivacii k izucheniju matematiki", *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal "Koncept"*, № 1 (janvar'), pp. 6–10. Available at: <http://e-koncept.ru/2016/16002.htm> (in Russian).
4. Testov, V. A. (2016). "O nekotoryh vidah metapredmetnyh rezul'tatov obuchenija matematike", *Obrazovanie i nauka*, № 1, pp. 4–20 (in Russian).
5. Sivashinskij, I. H. (1967). *Neravenstva v zadachah*, Nauka, Moscow, 303 p. (in Russian).
6. Testov, V. A. (2005). *Velichiny, chisla, neravenstva: strategija obuchenija: ucheb.-metod. posobie*, Izd. Centr VIRO, Vologda, 132 p. (in Russian).

Рекомендовано к публикации:

Некрасовой Г. Н., доктором педагогических наук,
членом редакционной коллегии журнала «Концепт»

Поступила в редакцию <i>Received</i>	17	Получена положительная рецензия <i>Received a positive review</i>	17
Принята к публикации <i>Accepted for publication</i>	17	Опубликована <i>Published</i>	29.03.17



© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2017

© Тестов В. А., 2017