

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»,
г. Москва
dobrich2@mail.ru



Чигирёва Ольга Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
mkfn12@yandex.ru

Методика изложения темы «Формула полной вероятности и формула Байеса»

Аннотация. В статье предложена методика изложения темы «Формула полной вероятности и формула Байеса», основанная на личном опыте авторов преподавания дисциплины «Теория вероятностей». При решении задач по данной теме наибольшую трудность у студентов вызывает вычисление условных вероятностей. В связи с этим в работе уделено особое внимание методике решения задач. Приведены основные теоретические сведения и большое количество типовых примеров, показывающих приемы решения, которые позволят студентам приобрести необходимые навыки в освоении данной темы.

Ключевые слова: условная вероятность события, теорема умножения вероятностей, гипотеза, формула полной вероятности, априорные и апостериорные вероятности, формула Байеса.

Раздел: (01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).

Каждый в своей жизни ежедневно сталкивается с вероятностными ситуациями. Круг вопросов, связанных с осознанием соотношения понятий вероятности и достоверности, проблемой выбора наилучшего из нескольких вариантов решения, оценкой степени риска и шансов на успех, – все это находится в сфере реальных жизненных интересов. Исходы многих явлений заранее предсказать невозможно, какой бы полной информацией мы о них ни располагали. Нельзя, например, сказать наверняка, какова вероятность сдачи экзамена, или какой стороной упадет подброшенная вверх монета, или когда в следующем году выпадет первый снег. Однако исходы явлений тоже имеют свои законы, которые начинают проявляться при многократном повторении случайных событий [1–3].

Ранее в работе [4] была изложена методика решения задач на классическую вероятность с помощью формул комбинаторики. В данной статье перейдем к рассмотрению задач, которые эффективно решаются с помощью формулы полной вероятности и формулы Байеса. Формула полной вероятности позволяет вычислить вероятность интересующего события через условные вероятности этого события в предположении неких гипотез, а также вероятностей этих гипотез. А формула Байеса позволяет определить вероятность какого-либо события при условии, что произошло другое статистически взаимосвязанное с ним событие. Другими словами, берется в расчет как ранее известная информация, так и данные новых наблюдений.

Теорема умножения вероятностей

Определение. Условной вероятностью события A при условии (наступлении) события B называют отношение $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ **при условии, что $P(B) \neq 0$.**

Теорема умножения вероятностей. Пусть событие $A = A_1 A_2 \dots A_n$ и $P(A) > 0$. Тогда $P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$.

Определение. События A и B , имеющие ненулевые вероятности, называют независимыми, если

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{или} \quad P(B|A) = P(B).$$

Теорема (критерий независимости случайных событий). События A и B , имеющие ненулевые вероятности, являются независимыми тогда и только тогда, когда

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Пример 1. Среди ста лотерейных билетов есть пять выигрышных. Найти вероятность того, что два наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

Решение. Рассмотрим следующие события:

A – два выбранных билета оказались выигрышными;

A_k – k – й выбранный билет оказался выигрышным, $k = 1, 2$.

Очевидно, что $A = A_1 A_2$. Тогда по теореме умножения вероятностей $P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)$.

Вычислим вероятность события A_1 , используя классическое определение вероятности:

$$P(A_1) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}.$$

Найдем условную вероятность $P(A_2|A_1)$. Так как событие A_1 произошло, то осталось девяносто девять билетов, среди которых четыре являются выигрышными. Следовательно,

$$P(A_2|A_1) = \frac{4}{99}.$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{1}{20} \cdot \frac{4}{99} = \frac{1}{495} \approx 0,002.$$

Пример 2. На десяти карточках написаны буквы, образующие слово «БИБЛИОТЕКА». Карточки перемешивают, пять из них последовательно извлекают и раскладывают в ряд слева направо. Найти вероятность того, что получится слово «БИЛЕТ».

Решение. Введем следующие события:

A – пять последовательно извлеченных карточек образуют слово «БИЛЕТ»;

A_1 – на первой выбранной карточке написана буква «Б»;

A_2 – на второй карточке – буква «И»;

A_3 – на третьей карточке – буква «Л»;

A_4 – на четвертой карточке – буква «Е»;

A_5 – на пятой карточке – буква «Т».

Тогда событие $A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ и согласно теореме умножения вероятностей имеем

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2)P(A_4|A_1 A_2 A_3)P(A_5|A_1 A_2 A_3 A_4).$$

Поскольку на десяти карточках буква «Б» встречается два раза, то

$$P(A_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Вычислим условные вероятности.

Если событие A_1 произошло, то на девяти оставшихся карточках буква «И» встречается два раза. Следовательно,

$$P(A_2|A_1) = \frac{2}{9}.$$

Если событие $A_1 A_2$ произошло, то на оставшихся восьми карточках буква «Л» встречается один раз, поэтому

$$P(A_3|A_1 A_2) = \frac{1}{8}.$$

Далее, рассуждая аналогично, получаем

$$P(A_4|A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{7}, \quad P(A_5|A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{1}{6}.$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7560} \approx 0,0001.$$

Формула полной вероятности

Определение. События $\{H_k\}_{k=1}^n$ называют **гипотезами**, если они удовлетворяют следующим условиям:

- 1) они попарно несовместны;
- 2) в результате опыта хотя бы одно из них обязательно произойдет.

Пусть для события A и гипотез $\{H_k\}_{k=1}^n$ известны вероятности $P(H_k)$ и $P(A|H_k)$, $k = \overline{1, n}$. Тогда имеет место **формула полной вероятности**:

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k).$$

Пример 3. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 5% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 3% и третьего – 2%. Определить вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступили 30 телевизоров с первого завода, 20 – со второго и 50 – с третьего.

Решение. Пусть событие A – приобретен исправный телевизор. С этим событием связаны три гипотезы: H_k – телевизор изготовлен k – м заводом, $k = \overline{1, 3}$. Обозначим

N_k – число телевизоров, поступивших в магазин с k -го завода, $N = \sum_{k=1}^3 N_k$ – общее

число телевизоров. Составим следующую таблицу:

k – номер завода	N_k	$P(H_k) = \frac{N_k}{N}$	$P(A H_k)$
1	30	0,3	$1 - 0,05 = 0,95$
2	20	0,2	$1 - 0,03 = 0,97$
3	50	0,5	$1 - 0,02 = 0,98$

Для вычисления вероятности события A воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{k=1}^3 P(H_k)P(A|H_k) = 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 0,97 + 0,5 \cdot 0,98 = 0,969.$$

Пример 4. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 игранных. Для игры наудачу выбирают 2 мяча и после игры возвращают обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекают еще 2 мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

Решение. Событие A – для второй игры выбрали 2 новых мяча. Здесь возможны три гипотезы:

H_1 – для первой игры выбрали 2 новых мяча;

H_2 – для первой игры выбрали 2 игранных мяча;

H_3 – для первой игры выбрали 1 новый мяч и 1 игровой.

Найдем вероятности гипотез. Рассмотрим следующие события:

B_k – k -й извлеченный мяч оказался новым, $k = 1, 2$;

C_k – k -й извлеченный мяч оказался игровым, $k = 1, 2$.

Выразим гипотезы H_k через события B_k и C_k :

$$H_1 = B_1B_2, \quad H_2 = C_1C_2, \quad H_3 = B_1C_2 + C_1B_2.$$

Тогда, согласно теореме умножения вероятностей, имеем

$$P(H_1) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = \frac{21}{38};$$

$$P(H_2) = P(C_1)P(C_2|C_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}.$$

Применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий B_1C_2 и C_1B_2 , а затем – теорему умножения, получаем

$$P(H_3) = P(B_1)P(C_2|B_1) + P(C_1)P(B_2|C_1) = \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19} + \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} = \frac{15}{38}.$$

Перейдем к вычислению условных вероятностей.

Поскольку в результате наступления гипотезы H_1 количество новых мячей будет равно 13, а игранных – 7, то, согласно теореме умножения вероятностей, получим

$$P(A|H_1) = \frac{13}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{39}{95}.$$

В результате наступления гипотезы H_2 количество новых и играных мячей останется прежним, поэтому

$$P(A|H_2) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = \frac{21}{38}.$$

После наступления гипотезы H_3 количество новых мячей будет равно 14, а играных – 6. Следовательно,

$$P(A|H_3) = \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} = \frac{91}{190}.$$

Вероятность события A определим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{k=1}^3 P(H_k)P(A|H_k) = \frac{21}{38} \cdot \frac{39}{95} + \frac{1}{19} \cdot \frac{21}{38} + \frac{15}{38} \cdot \frac{91}{190} \approx 0,445.$$

Формула Байеса

Пусть до проведения опыта известны вероятности гипотез $P(H_k)$, $k = \overline{1, n}$. Проведен опыт, в результате которого событие A произошло. Спрашивается, как «изменятся» вероятности гипотез $P(H_k|A)$, если известны вероятности $P(A|H_k)$, $k = \overline{1, n}$?

Воспользуемся определением условной вероятности и применим теорему умножения:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Далее с учетом формулы полной вероятности приходим к **формуле Байеса**:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)}.$$

Определение. Вероятности $P(H_k)$, полученные «до проведения опыта», называют **априорными**, а условные вероятности $P(H_k|A)$, полученные «после проведения опыта», – **апостериорными**.

Пример 5. В группе из 20 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 8 – хорошо, 7 – удовлетворительно и 2 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 30 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 30 вопросов, хорошо подготовленный – на 25, удовлетворительно – на 18 и плохо – на 10. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) хорошо.

Решение. Событие A – вызванный студент ответил на 3 вопроса. Естественно ввести четыре гипотезы:

H_1 – студент подготовлен отлично;

H_2 – студент подготовлен хорошо;

H_3 – студент подготовлен удовлетворительно;

H_4 – студент подготовлен плохо.

Найдем вероятности гипотез.

$$P(H_1) = \frac{3}{20} = 0,15; \quad P(H_2) = \frac{8}{20} = 0,4;$$

$$P(H_3) = \frac{7}{20} = 0,35; \quad P(H_4) = \frac{2}{20} = 0,1.$$

Вычислим условные вероятности $P(A|H_k), k = \overline{1,4}$.

Очевидно, что $P(A|H_1) = 1$.

Применяя теорему умножения вероятностей, получаем

$$P(A|H_2) = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{23}{28} \approx 0,567;$$

$$P(A|H_3) = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} \cdot \frac{16}{28} \approx 0,201;$$

$$P(A|H_4) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{8}{28} \approx 0,030.$$

Тогда по формуле полной вероятности находим

$$P(A) = \sum_{k=1}^4 P(H_k)P(A|H_k) = 0,15 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,567 + 0,35 \cdot 0,201 + 0,1 \cdot 0,030 \approx 0,45.$$

Апостериорные вероятности вычислим по формуле Байеса:

$$\text{а) } P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,15 \cdot 1}{0,45} \approx 0,333;$$

$$\text{б) } P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,567}{0,45} \approx 0,504.$$

Пример 6. Астрономический объект, за которым ведется наблюдение, может находиться в двух различных состояниях S_1 и S_2 , случайно переходя из одного в другое. Долговременной практикой установлено, что примерно 30% времени объект находится в состоянии S_1 , а 70% – в состоянии S_2 . Наблюдение ведется независимо двумя обсерваториями. Первая обсерватория обычно дает правильные сведения о состоянии наблюдаемого объекта в 95% случаев, а вторая – в 80% случаев. В какой-то момент времени первая обсерватория сообщила: «Объект находится в состоянии S_1 », а вторая обсерватория сообщила: «Объект находится в состоянии S_2 ». Какому из сообщений следует верить?

Решение. Пусть событие A – первая обсерватория сообщила: «Объект находится в состоянии S_1 », а вторая обсерватория сообщила: «Объект находится в состоянии S_2 ». Возможны две гипотезы:

H_1 – объект находится в состоянии S_1 ;

H_2 – объект находится в состоянии S_2 .

По условию задачи известны априорные вероятности этих состояний:

$$P(H_1) = 0,3 \quad \text{и} \quad P(H_2) = 0,7.$$

Определим условные вероятности:

$$P(A|H_1) = 0,95 \cdot (1 - 0,8) = 0,19;$$

$$P(A|H_2) = (1 - 0,95) \cdot 0,8 = 0,04.$$

Тогда, согласно формуле полной вероятности,

$$P(A) = \sum_{k=1}^2 P(H_k)P(A|H_k) = 0,3 \cdot 0,19 + 0,7 \cdot 0,04 \approx 0,085.$$

Вычислим апостериорные вероятности по формуле Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,19}{0,085} \approx 0,67;$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0,7 \cdot 0,04}{0,085} \approx 0,33.$$

Так как $P(H_1|A) > P(H_2|A)$, то следует верить сообщению «Объект находится в состоянии S_1 ».

Пример 7. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно $p_1 = \frac{4}{5}$, $p_2 = \frac{3}{4}$ и $p_3 = \frac{2}{3}$. При одновременном выстреле имелось два попадания. Найти вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

Решение. Пусть событие A – в цель попали двое. Рассмотрим следующие гипотезы:

H_1 – третий стрелок промахнулся;

H_2 – третий стрелок попал в цель.

Априорные вероятности гипотез известны:

$$P(H_1) = 1 - p_3 = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad P(H_2) = p_3 = \frac{2}{3}.$$

Найдем условные вероятности.

Событие «в цель попали двое при условии, что третий стрелок промахнулся» означает: в цель попали первый и второй стрелки. Поэтому

$$P(A|H_1) = p_1 p_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}.$$

Событие «в цель попали двое при условии, что третий стрелок попал» означает: либо первый попал и второй промахнулся, либо первый промахнулся и второй попал. Следовательно,

$$P(A|H_2) = p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{20}.$$

Далее применим формулу полной вероятности

$$P(A) = \sum_{k=1}^2 P(H_k)P(A|H_k) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{20} = \frac{13}{30}.$$

Тогда, согласно формуле Байеса, искомая апостериорная вероятность будет равна:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{13}{30}} = \frac{6}{13} \approx 0,46.$$

Методика, которая положена в основу данной работы, позволит достаточно быстро сформировать правильное представление о способах решения широкого спектра задач по теме «Формула полной вероятности и формула Байеса». Теоретический материал носит справочный характер и поможет преподавателям и студентам при подготовке к практическим занятиям.

Ссылки на источники

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров: для студентов вузов. – 12-е изд. – М.: Юрайт, 2014. – 480 с.
2. Печинкин А. В., Тескин О. И., Цветкова Г. М. и др. Теория вероятностей: учеб. для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 3-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана, 2004. – 456 с. – (Сер. Математика в техническом университете. Вып. XVI).
3. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие для студ. вузов. – Изд. 8-е изд., стер. – М.: КноРус, 2010. – 496 с.
4. Ахметова Ф. Х., Ласковая Т. А., Попова Е. М. Методика изложения темы «Решение задач на классическую вероятность с помощью формул комбинаторики» в курсе «Теория вероятностей» // Инженерный Вестник / МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электронный журнал. – 2015. – № 6. – URL: <http://engbul.bmstu.ru/doc/777339.html>.

Faniya Akhmetova,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

dobrich2@mail.ru

Olga Chigireva,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

mkfn12@yandex.ru

The presentation method of the topic "The formula of full probability and the Bayes formula"

Abstract. The paper proposes a technique for presenting the topic "The formula of full probability and the Bayes formula" based on the personal experience of the authors in the discipline "Theory of Probability". When solving problems on this topic, the greatest difficulty for students is calculation of conditional probabilities. In this connection, special attention is paid to the method of solving problems. The main theoretical information and a large number of typical examples showing solutions that allow students to acquire the necessary skills in mastering this topic are given.

Key words: theorem of multiplication of probabilities, hypothesis, conditional probability of event, formula of full probability, a priori and a posteriori probability, Bayes formula.

References

1. Gmurman, V. E. (2014). *Teorija verojatnostej i matematicheskaja statistika: ucheb. posobie dlja bakalavrov: dlja studentov vuzov*, 12-e izd, Jurajt, Moscow, 480 p. (in Russian)
2. Pechinkin, A. V., Teskin, O. I. & Cvetkova, G. M. et al. (2004). *Teorija verojatnostej: Ucheb. dlja vuzov*, 3-e izd., ispr., Izd-vo MGTU im N. Je. Baumana, Moscow, 456 p. (Ser. Matematika v tehničeskom universitete. Vyp. HVI) (in Russian).
3. Ventcel', E. S. & Ovcharov, L. A. (2010). *Zadachi i uprazhnenija po teorii verojatnostej: ucheb. posobie dlja stud. vuzov*, Izd. 8-e izd., ster., KnoRus, Moscow, 496 p. (in Russian).

4. Ahmetova, F. H., Laskovaja, T. A., Popova, E. M. (2015). "Metodika izlozhenija temy "Reshenie zadach na klassicheskuju verojatnost' s pomoshh'ju formul kombinatoriki" v kurse "Teorija verojatnostej", *Inzhenernyj Vestnik*, MGTU im. N. Je. Baumana. Jelektronnyj zhurnal, № 6. Available at: <http://eng-bul.bmstu.ru/doc/777339.html> (in Russian).

Рекомендовано к публикации:

Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»



www.e-koncept.ru

Поступила в редакцию <i>Received</i>	17	Получена положительная рецензия <i>Received a positive review</i>	17
Принята к публикации <i>Accepted for publication</i>	17	Опубликована <i>Published</i>	29.03.17

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2017

© Ахметова Ф. Х., Чигирёва О. Ю., 2017