

Ситникова Ирина Викторовна,

кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров

i.sitn@mail.ru



Хохлова Марина Владиславовна,

кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров

mv_hohlova@mail.ru

Использование аналогии и сравнения при изучении математического анализа в вузе

Аннотация. Статья посвящена возможностям применения сравнения и аналогии при изучении некоторых разделов математического анализа в вузе. Исследуется применение данных методов научного познания при изучении раздела «Функции нескольких переменных». Показано, как аналогия может помочь в усвоении основных понятий и теорем данного раздела.

Ключевые слова: сравнение, аналогия, сопоставление и противопоставление, методика применения.

Раздел: (01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).

Наиболее важным направлением высшей школы является подготовка думающего, хорошо ориентирующегося в современных тенденциях науки и производства специалиста. Решение данной задачи тесно связано с обучением студентов в процессе изучения математики применять эвристические методы познания, к которым относится аналогия. Формирование у студентов умения применять аналогию в познании окружающей действительности является одним из эффективных путей подготовки востребованных специалистов. Применение аналогии в процессе обучения математике помогает приобщить учащихся к исследовательскому виду деятельности, а также способствует более глубокому усвоению учебного материала.

Установление аналогий проходит успешнее, если у учащихся сформировано умение проводить сравнение. Сравнение подготавливает почву для проведения аналогии, поэтому эти два метода рассматриваются в неразрывной связи.

В методической литературе применению данных методов научного познания при обучении математике в вузе уделяется не слишком много внимания. Поэтому возникает потребность в исследовании возможностей использования данных методов при овладении некоторыми разделами математического анализа. Остановимся сначала на определении сущности сравнения и аналогии.

Сравнение – мысленное установление сходства или различия объектов изучения.

Для того чтобы сравнение помогало сделать верные выводы, к нему предъявляются определенные требования:

- сравниваемые объекты должны быть однородны;
- сравнение должно идти по наиболее существенным признакам;
- сравнение должно быть полным, доведённым до конца.

Сравнение осуществляется в форме сопоставления и противопоставления. В первом случае устанавливаются существенные свойства, общие для изучаемых объектов, во втором отыскиваются отличительные свойства.

Как правило, сравнение применяют при изучении сходных, связанных понятий, теорем или разделов математики, а также при решении математических задач. В этом случае значение имеет сравнение методов решения задач.

Сравнение дает основание для применения **аналогии** – умозаключения, при котором на основании сходства двух объектов в каком-либо отношении делается вывод об их сходстве в другом отношении.

Пусть объект А обладает свойствами а, в, с, х, а объект В обладает свойствами а, в, с. Тогда, вероятно, В обладает и свойством х. Заключение, сделанное по аналогии, является вероятным, но не обязательно достоверным. Это эвристический метод, который помогает учащимся догадаться о свойствах объектов, методе доказательства теоремы, методе решения задачи [1].

Также аналогию рассматривают как такой метод обучения, при котором обоснованно и целенаправленно устанавливаются связи между различными разделами математики. Такую аналогию называют внутренней [2].

Продemonстрируем, как сравнение и аналогия могут быть использованы при изучении раздела математического анализа «Функции нескольких переменных». Усвоение данного раздела бывает сопряжено с определенными трудностями, так как это первый из разделов математического анализа, элементы которого не изучаются в рамках школьной программы. Облегчить усвоение основных понятий и теорем, а также обеспечить овладение навыками решения базовых задач можно, применяя при изучении данного раздела методы сравнения и аналогии.

Изучение раздела опирается на раздел «Функции одной переменной», поэтому возникает много возможностей применения сравнения и аналогии. Прежде всего, данные методы могут быть использованы при рассмотрении теоретических фактов, так как определения многих понятий и формулировки теорем аналогичны изученным ранее. Этот факт способствует не только усвоению нового материала, но и повторению освоенного ранее раздела.

Начинают изучение раздела с рассмотрения основных понятий, к которым относятся: функция, область определения, предел и непрерывность функции.

При ознакомлении с данными понятиями необходимо подчеркивать аналогию в их определениях с определениями, рассмотренными ранее в разделе «Функции одной переменной», и, проводя сравнение определений, находить сходства и отличия.

Пример 1. Определения функций одной и нескольких переменных отличаются только тем, что для функции нескольких переменных устанавливается соответствие некоторого набора из n переменных (а не одной переменной) и определенного значения другой переменной величины.

Пример 2. Область определения функции одной переменной – это подмножество множества действительных чисел, а геометрически – множество точек координатной прямой. Область определения функции нескольких переменных – это подмножество n -мерного пространства. Для функции двух переменных геометрический аналог области определения – множество точек координатной плоскости.

Пример 3. Окрестность точки координатной прямой – это промежуток, содержащий данную точку. Окрестность точки координатной плоскости – круг, содержащий данную точку.

Пример 4. Определения предела функции одной и двух переменных идентичные, однако стоит обратить внимание на отличие их геометрического смысла и правил вычисления, связанных с этим отличием.

Так, условие «для всех точек из δ окрестности точки $(x_0; y_0)$, кроме, может быть, самой точки, выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ » означает, что речь идет о точках плоскости, принадлежащих кругу, содержащему эту точку (как правило, это круг с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом δ). Данное отличие существенно влияет на нахождение предела, так как он не должен зависеть от того, как на плоскости мы приближаемся к точке $(x_0; y_0)$, а таких направлений бесконечно много (для функции одной переменной аналогом служат односторонние пределы, их всего два). Поэтому в тех случаях, когда не удастся найти предел функции двух переменных с помощью правил, применяемых для функции одной переменной, прибегают к следующему приему: выбирают различные направления приближения к точке $(x_0; y_0)$, задают эти направления уравнениями (как правило, для простоты это прямые, проходящие через точку $(x_0; y_0)$), подставляют в уравнение функции, полученные для y выражения, и выясняют, зависит ли предел от способа приближения к точке $(x_0; y_0)$.

Например, найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x - y}{y - x}$. Очевидно, что избавиться от неопределенности

$\frac{0}{0}$ с помощью методов, применяемых для функции одной переменной, не удастся. Поэтому выясним, зависит ли значение предела от способа приближения к точке $(0; 0)$. Как указано выше, наиболее простой линией на плоскости является прямая. Прямые, проходящие через точку $(0; 0)$, задаются уравнением $y = kx$. Тогда получим: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x - kx}{kx - x} = \frac{3 - k}{k - 1}$. Как видим, значение предела зависит от углового коэффициента прямых, т. е. предел зависит от способа приближения к точке $(0; 0)$, это означает, что рассматриваемый предел не существует.

Пример 5. Понятие непрерывности функции двух переменных аналогично соответствующему понятию для функции одной переменной. Следует обратить внимание учащихся на отличия в некоторых понятиях, связанных с непрерывностью. Так же как и у функции одной переменной, у функции двух переменных могут быть точки разрыва, но, в отличие от функции одной переменной, таких точек может быть бесконечно много, и они могут образовывать линии разрыва функции.

Следующая изучаемая в данном разделе тема – «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных». Логическая организация построения данной темы аналогична соответствующей теме «Функция одной переменной».

Пример 6. Понятие производной и техника дифференцирования функции нескольких переменных опираются непосредственно на усвоенное ранее понятие производной функции одной переменной и умения дифференцировать функцию одной переменной.

Чтобы избежать проблем при решении задач на дифференцирование функций нескольких переменных (это основная задача в данном разделе), необходимо, чтобы учащиеся понимали, в чем сходство и в чем различие определений производной

функций одной и нескольких переменных, т. е. без сравнения и аналогии здесь не обойтись.

Прежде всего, обучаемые должны понимать, что число производных функции нескольких переменных связано с количеством независимых переменных, производных столько, сколько таких переменных, и поэтому производные называют частными. Определения частных производных опираются на понятия частных приращений функции. Частное приращение функции связано с уже знакомым понятием приращения функции одной переменной, так как приращение получает только одна переменная, при условии, что все остальные переменные считаются постоянными. При данном допущении функция нескольких переменных становится функцией, зависящей от одной переменной, той, которая получает приращение, поэтому и определение частной производной по данной переменной аналогично уже известному определению производной функции одной переменной. Учащиеся могут сформулировать его сами. Напри-

$$\text{мер, } f'_{x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1}.$$

Из определения следует, что нахождение частных производных сводится к дифференцированию функции одной переменной (все остальные переменные считаются постоянными), поэтому овладение техникой дифференцирования функции нескольких переменных опирается на сформированный ранее навык дифференцирования функции одной переменной.

Пример 7. Не обойтись без аналогии и при рассмотрении геометрического смысла частных производных функции двух переменных. Перед изучением понятия «касательная плоскость к поверхности» стоит вспомнить, в чем состоит геометрический смысл функции одной переменной. Далее, предполагая, что функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x_0; y_0)$, пересекаем поверхность, являющуюся графиком функции $z = f(x, y)$, плоскостями $x = x_0; y = y_0$. В пересечении получаем линии, являющиеся графиками функций $z = f(x_0, y)$ и $z = f(x, y_0)$. Данные функции дифференцируемы в точке М, следовательно, существуют касательные к графикам функций в этой точке, угловые коэффициенты которых совпадают со значениями производных функций $z = f(x_0, y)$ и $z = f(x, y_0)$ в точке М. Так как касательные – две пересекающиеся в точке М прямые, существует плоскость, проходящая через эти прямые, которую называют касательной плоскостью к поверхности в точке М. Касательная плоскость к поверхности в пространстве – это аналог касательной прямой к линии на плоскости.

Вывод уравнения касательной плоскости опирается на уравнение касательной к графику функции и уравнение плоскости в пространстве.

Пример 8. Понятие дифференциала функции нескольких переменных, так же как понятия частных производных, может быть введено с опорой на знакомое учащимся понятие дифференциала функции одной переменной. Дифференциал функции нескольких переменных также определяется как главная часть полного приращения функции, но, в отличие от функции одной переменной, эта часть линейно зависит не от одного приращения, а от n приращений независимых переменных.

Для получения формулы полного дифференциала (как правило, ограничиваются функциями двух переменных) опираются на уже изученные понятия частных производных и формулу полного приращения функции. Учащиеся должны видеть сходство и различия в нахождении дифференциала функции одной и нескольких переменных.

Пример 9. Аналогия прослеживается и в понятиях экстремумов функции двух переменных и одной переменной, а также в отыскании экстремальных точек.

Так же как и для функции одной переменной, нахождение экстремумов функции двух переменных опирается на две теоремы: необходимое и достаточное условие существования экстремума.

Формулировка теоремы необходимое условие существования экстремума функции двух переменных отличается от аналогичной для функции одной переменной тем, что наличие экстремума дифференцируемой в точке $M(x_0; y_0)$ функции обеспечивает равенство нулю частных производных данной функции в этой точке. Доказательство теоремы опирается на аналогичную теорему для функции одной переменной.

Теорема достаточное условие существования экстремума имеет более сложную структуру и доказательство, здесь аналогию проследить уже не удастся.

Итогом изучения двух теорем является схема исследования функции двух переменных на экстремум, в которой просматривается аналогия с известной схемой для функции одной переменной: 1) найти область определения функции; 2) найти критические точки функции (точки, в которых частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует); 3) с помощью достаточного условия существования экстремума установить наличие или отсутствие экстремума в критических точках и вид экстремума (в случаях, когда на основании достаточного условия существования экстремума вывод о наличии экстремума сделать нельзя, используют другие методы).

Пример 10. Хорошо просматривается аналогия и в нахождении наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных в замкнутой области (так называемых глобальных экстремумов функции). В этом пункте и формулировка теоремы о существовании таких экстремальных точек, и схема их нахождения аналогичны известным утверждениям для функции одной переменной.

Таким образом, в статье аналогия рассматривается с позиции метода, позволяющего устанавливать сходство и различие между двумя разделами математического анализа. Применение аналогии приводит к более осмысленному усвоению нового раздела и формированию навыков решения опорных задач с использованием уже имеющихся умений. Несомненно, аналогия может применяться и как эвристический метод при обучении решению математических задач. Рассмотрение этого аспекта данного метода может быть предметом другого научного исследования.

Ссылки на источники

1. Колягин Ю. М., Оганесян В. А., Саннинский В. Я., Луканин Г. Л. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб. пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.
2. Шерстнёва А. И., Шерстнёв О. В., Янущик О. В. Аналогия применения как инструмент математического образования студентов // Вестник томского государственного педагогического университета. – 2010. – № 12. – С. 137–139.

Irina Sitnikova,

Candidate of Pedagogic Sciences, Associate Professor at the chair of Fundamental Informatics and Applied Mathematics, Vyatka State University, Kirov

i.sitn@mail.ru

Marina Khokhlova,

Candidate of Pedagogic Sciences, Associate Professor at the chair of Fundamental Informatics and Applied Mathematics, Vyatka State University, Kirov

mv_hohlova@mail.ru

The use of analogy and comparison when studying mathematical analysis at university

Abstract. The paper is devoted to possibilities of comparison and analogy in the study of some branches of mathematical analysis at university. The authors examine the application of scientific methods in the study of the section "Functions of several variables". It is shown how analogy can help in understanding of basic concepts and theorems of this section.

Key words: comparison, analogy, comparison and contrast, method of application.

References

1. Koljagin, Ju. M., Ogenesjan, V. A., Sanninskij, V. Ja. & Lukanin, G. L. (1975). *Metodika prepodavaniya matematiki v srednej shkole. Obshhaja metodika: ucheb. posobie dlja stud. fiz.-mat. fak. ped. in-tov*, Prosveshhenie, Moscow, 462 p. (in Russian).
2. Sherstnjov, a A. I., Sherstnjov, O. V. & Janushhik, O. V. (2010). "Analogija primenenija kak instrument matematicheskogo obrazovanija studentov", *Vestnik tomского gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta*, № 12, pp. 137–139 (in Russian).

Рекомендовано к публикации:

Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию <i>Received</i>	25.03.17	Получена положительная рецензия <i>Received a positive review</i>	27.03.17
Принята к публикации <i>Accepted for publication</i>	27.03.17	Опубликована <i>Published</i>	29.03.17



www.e-koncept.ru

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2017

© Ситникова И. В., Хохлова М. В., 2017