

**Карасева Римма Борисовна,**  
кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия», г. Омск  
[karaseva\\_rb@mail.ru](mailto:karaseva_rb@mail.ru)



## Основные экономико-математические модели

**Аннотация.** Базовыми профессиональными компетенциями экономиста предполагается, что он владеет приемами построения и использования экономико-математических моделей. Знакомство обучающихся с математическими моделями основных экономических ситуаций следует начинать с первых лет обучения. В статье приведен обзор основных экономико-математических моделей, используемых в различных сферах экономики и промышленности.

**Ключевые слова:** экономико-математические модели, компетенции.

**Раздел:** (04) экономика.

В настоящее время один из показателей качества образования – владение набором компетенций [1, 2]. Профессиональной компетенцией экономиста является, в частности, владение приемами построения и использования экономико-математических моделей [3, 4]. Изучение экономико-математических моделей желательно начинать с первых курсов вузов.

Современная математика характеризуется интенсивным проникновением в другие науки, во многом этот процесс происходит благодаря разделению математики на ряд самостоятельных областей. Математика стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчёта, но также методом точного исследования и средством предельно чёткой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с её развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества пользуется разнообразными количественными характеристиками, а поэтому вобрала в себя большое число математических методов.

Современная экономическая теория включает как естественный, необходимый элемент математические модели и методы. Использование математики в экономике позволяет, во-первых, выделить и формально описать наиболее важные, существенные связи. Во-вторых, из чётко сформулированных исходных данных и соотношений можно сделать выводы, адекватные изучаемому объекту в той же мере, что и сделанные предпосылки. В-третьих, методы математики позволяют индуктивным путем получать новые знания об объекте: оценить форму и параметры зависимостей его переменных, в наибольшей степени соответствующие имеющимся наблюдениям. В-четвертых, использование языка математики позволяет точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать её понятия.

Математическая модель экономического объекта – это его гомоморфное отображение в виде совокупности уравнений, неравенств, логических отношений, графиков. Иными словами, модель – это условный образ объекта, построенный для упрощения его исследования. Предполагается, что изучение модели дает новые решения в той или иной ситуации. Математические модели имеют ряд преимуществ перед другими видами моделей, например: широкий диапазон применения, довольно низкая

стоимость их создания, быстрота получения результатов исследования, возможность экспериментирования с исследуемым экономическим процессом, возможность проверки правильности предпосылок и условий поставленной экономической задачи.

При построении математической модели важно избегать как чрезмерного упрощения экономического явления, так и его излишней детализации и усложнения. Лучшей моделью экономического явления или процесса считается та, которая позволяет получить наиболее рациональное решение. Именно практическая проверка полученных результатов служит окончательным критерием качества созданной модели.

Процесс моделирования экономического явления состоит из трех основных этапов: составление экономико-математической модели, нахождение оптимального решения математическими методами, анализ полученного решения. На первом этапе сначала определяют признак (критерий), по которому будут сравнивать различные варианты решения и выбирать среди них наилучшее, оптимальное решение. В качестве такого критерия могут быть: наибольшая прибыль, наименьшие издержки производства, максимальная загрузка оборудования, наименьшие отходы производства и так далее.

Единого показателя успешной деятельности предприятия не существует. Процесс производства может быть достаточно полно охарактеризован лишь системой экономических показателей. Но при построении математической модели выбирают наиболее важный показатель для данного случая. Этот показатель отражается целевой функцией:

$$L(x) = \sum_{j=1}^n \Pi_j x_j \rightarrow \max ,$$

где  $\Pi_j$  – прибыль, получаемая от производства единицы продукции. Остальные показатели можно включить в систему ограничений, например, в линейном программировании.

При постановке задач, как правило, предполагается ограниченность ресурсов, которые необходимо оптимально распределить на производство продукции. Если все виды ресурсов, к которым относятся, например, запасы сырья, трудовые ресурсы, мощность оборудования, используются на выпуск продукции, то получаем ограничение модели

$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq W_i$ , где  $a_{ij}$  – норма расхода  $i$ -го вида сырья на производство  $j$ -го вида продукции;  $W_i$  – запасы  $i$ -го вида ресурса.

Условия выполнения договорных поставок запишем неравенством:  $d_i \leq x_i \leq D_i$ ,  $i \leq n$ , где  $d_i$  и  $D_i$  – нижняя и верхняя границы производства продукции  $i$ -го вида.

Продукцию нельзя превращать в сырье. Это условие записывается неравенством:  $x_j \leq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Все уравнения, отражающие экономический процесс, должны быть непротиворечивыми, то есть должно существовать хотя бы одно решение задачи, удовлетворяющее всем ограничениям.

Не для всякой экономической задачи требуется создавать собственную математическую модель. Существуют типовые модели, к которым приводится множество конкретных задач. Математическая модель, отражающая однотипные экономические процессы, называется фундаментальной экономической моделью.

Рассмотрим модель диеты:

$$L(x) = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \min ; \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad (3)$$

где  $x_j$  – количество  $j$ -го компонента, вводимого в диету (смесь);  $C_j$  – цена единицы веса (кг, ц, т)  $j$ -го компонента;  $a_{ij}$  – содержание  $i$ -го элемента в единице веса  $j$ -го компонента;  $b_i$  – количество, стандарт  $i$ -го элемента в диете (смеси).

Целевая функция (1) показывает необходимость составления смеси при минимальной стоимости. Уравнение (2) характеризует выполнение стандарта  $i$ -го элемента в диете (смеси). Неравенство (3) показывает условие неотрицательности, то есть превращение диеты (смеси) обратно в компоненты невозможно.

Модель (1), (2), (3) используется при составлении рецептов мороженого, плавленых сыров, кремов пищевой промышленности, а при замене условия (2) – может быть применена в текстильной промышленности при оптимальном раскрое материала, в легкой и других отраслях производства.

Сущность классической транспортной задачи состоит в том, чтобы найти наиболее выгодный план перевозок однородного или взаимозаменяемого продукта из пунктов отправления в пункты назначения [5].

Известны количество груза (в т) в каждом пункте отправления, потребности в грузе в каждом пункте потребления, расстояния (в км) от каждого поставщика до каждого потребителя. Требуется определить, сколько груза и в какие пункты потребления надо перевезти от каждого поставщика, с тем чтобы спрос в продукте пунктов назначения был удовлетворен, а общий объем транспортной работы (грузооборот) был минимальным.

Пусть имеются поставщиков ( $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m$ ) готовой продукции и  $n$  потребителей ( $B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_n$ ).  $a_i$  – число единиц продуктов в  $i$ -м пункте отправления,  $b_j$  – спрос в продукте  $j$ -го пункта потребления,  $c_{ij}$  – транспортные издержки (расстояние) на перевозку единицы продукта от  $i$ -го поставщика в  $j$ -й пункт потребления (показателем  $c_{ij}$  может быть себестоимость перевозок 1 т продукта, расстояние между пунктами отправления и пунктами назначения, время, затраченное на перевозку 1 т продукта от поставщика к потребителю).  $x_{ij}$  – количество единиц продукта, перевозимое из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт потребления. Условие задачи удобно изображать в виде таблицы.

Элементы  $c_{ij}$  называются показателями критерия оптимальности; совокупности всех  $x_{ij}$  – распределением поставок; объем продукта, имеющийся у каждого поставщика, – его мощностью. Учитывая принятые обозначения, условие полного удовлетворения спроса в продукте всех пунктов потребления можно записать в виде уравнения:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Продукт, имеющийся у поставщиков, должен быть полностью вывезен потребителям. Это условие записывается следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

Условие, показывающее, что сумма мощностей поставщиков равна спросу всех пунктов потребления, записывается уравнением:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (6)$$

Оптимальный вариант плана поставок, характеризующийся минимальным грузооборотом, можно записать в виде целевой функции вида:

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (7)$$

Мощности пунктов отправления и спросов потребителей должны быть неотрицательными:  $a_i \geq 0$ ;  $b_j \geq 0$ . Обратные перевозки от потребителей к поставщикам исключаются, то есть  $x_{ij} \geq 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Экономико-математическая модель транспортной задачи, описываемая условиями (4) – (7), называется закрытой.

Если сумма мощностей поставщиков не равна сумме мощностей потребителей, то вместо условия (6) используем условия

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j, \quad (8)$$

а вместо условия (5) используем условие

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (9)$$

Модель транспортной задачи, имеющей условия (8), (9), называется открытой.

При планировании перевозок часто приходится учитывать ограничительные пропускные способности перевозок. Эти ограничения записываются в виде неравенств:  $0 \leq x_{ij} \leq \varphi_{ij}$ , где  $\varphi_{ij}$  – предельное число единиц продукта, перевозимое по коммуникациям  $A_i B_j$ , за время, оговоренное в условиях задачи.

Существуют и другие модификации модели транспортной задачи, которые можно свести к классической постановке различными преобразованиями.

В общем виде задачу развития и размещения предприятий любой отрасли промышленности в стране, регионе, решаемую по критерию минимума затрат, можно сформулировать следующим образом: при фиксированной потребности в продукции отрасли в плановой перспективе, дифференцированной по пунктам потребления, при известном состоянии отрасли в начале периода, при заданной сырьевой базе и транспортной сети определить, какой вариант строительства новых предприятий (место строительства, мощность предприятия и его специализация) и реконструкции действующих предприятий сведет совокупные затраты к минимуму [6].

Как правило, наилучший результат решения получается с учетом двух основных факторов: экономии на производственных издержках при увеличении мощности предприятия и возможного проигрыша при этом из-за увеличивающихся транспортных затрат. Определение наилучшего сочетания этих факторов при равных остальных условиях позволит найти наиболее выгодный вариант размещения предприятий отрасли. Поэтому оба фактора должны иметь четкие количественные выражения.

При использовании закрытой модели такого рода задач возникает жесткая балансировка спроса и предложения в ограничениях задачи. В результате в закрытой

модели можно учесть только один фактор, например транспортный, и мы находим только оптимальную схему перевозок. При открытой модели возможен выбор поставщиков с наиболее низкими затратами, меняется схема прикрепления поставщиков к потребителям продукции. Таким образом, возникает возможность одновременного учета действия производственного и транспортного факторов. Модель имеет цель: найти вариант размещения предприятий, позволяющий получить минимум затрат на производство и доставку продукции потребителям. Это условие записывается в виде целевой функции:

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (10)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \leq a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad (12)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad x_i \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

где  $x_{ij}$  – величины поставок от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю;  $x_i$  – мощность предприятия в  $i$ -м пункте;  $c_{ij}$  – затраты на производство и доставку единицы продукции от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю;  $a_i$  – мощность действующих предприятий, стоимость реконструкции или нового строительства;  $b_j$  – потребность в продукте  $j$ -го пункта потребления.

Оптимальный вариант решения задачи (10) – (13) показывает транспортные связи и варианты размещения производства. Модель используется для решения задач развития и размещения различных отраслей промышленности. Однако данная модель не учитывает многих факторов, поэтому решение задачи дает самое общее представление о характере размещения предприятий, следовательно, модель (10) – (13) желательно использовать на предварительных этапах исследования.

Недостатки рассмотренной модели появляются из-за того, что мы предполагаем линейным характер зависимости затрат на производство и объема производства. В реальности данная зависимость нелинейна. Увеличение затрат на производство ведет к снижению удельных текущих затрат из-за постоянства целого ряда статей затрат или, по крайней мере, в результате их более медленного роста. В итоге получаем гиперболическую зависимость себестоимости и объема производства. Целевая функция имеет нелинейный вид:

$$L(x_i; x_j) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x_i) x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad \text{где } \varphi_i(x_i) \text{ – функции, ха-}$$

рактеризующие зависимости себестоимости продукции от объема производства в  $i$ -м пункте;  $t_{ij}$  – транспортные затраты на доставку единицы продукции из пункта  $i$  в пункт потребления  $j$ . Ограничения задачи остаются без изменения.

Наибольшую трудность при построении такой модели представляет отыскание производственных функций  $\varphi_i(x_i)$ . Определение таких зависимостей возможно на



основе анализа работы действующих предприятий и получения большого числа статистических данных методами регрессионного анализа.

Ассортиментная задача решается на каждом предприятии в любой отрасли промышленности с учетом отраслевых условий. Для этого используется следующая экономико-математическая модель (14) – (16):

$$\sum_{j=1}^n x_j \Pi_j \rightarrow \max ; \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq B_i \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad (15)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (16)$$

где  $x_j$  – количество  $j$ -го вида продукции, производимого предприятием;  $\Pi_j$  – прибыль (доход), получаемый от производства единицы (кг, ц, т) продукции;  $a_{ij}$  – норма расхода  $i$ -го вида производственного ресурса на единицу продукции;  $B_i$  – запасы  $i$ -го вида производственного ресурса на планируемый период времени.

Каждая отрасль имеет свои особенности. Некоторые отрасли являются энергоемкими, в других отраслях стоимость сырья в себестоимости продукции составляет 90%. Отрасли пищевой промышленности используют скоропортящееся сырье и производят скоропортящуюся продукцию. Эти и другие важные условия необходимо включать в модель ассортиментной задачи.

Математическая постановка задачи оптимального распределения инвестиций или иных однородных средств (машин, сырья и т. д.) формулируется следующим образом: найти значения неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{j=1}^n x_j = K ; \quad (17)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (18)$$

обращающие в максимум целевую функцию

$$F_n(K) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \cdot x_j \rightarrow \max , \quad (19)$$

где  $x_j$  – сумма возможных вложений по  $j$ -му объекту (отрасль, предприятие, цех, участок);  $f_j(x_j)$  – фондоотдача по предполагаемому  $j$ -му объекту, т. е. функция отдачи капитальных вложений (прибыль, прирост продукции и т. д.).

Данная модель является фундаментальной, поскольку задача распределения однородных средств с целью получения максимальной отдачи может возникнуть в любой отрасли промышленности, сельского хозяйства, в торговле, сфере услуг, в банковской системе и во многих других экономических системах.

Рассмотренные модели могут быть введены в процесс обучения студентов как задачи исследовательского характера для повышения уровня математической и профессиональной компетенций обучающихся [7].

### Ссылки на источники

1. Карасева Р. Б. Тенденции современного математического образования // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2015. – № 3. – С. 45–47.

- Карасева Р. Б. Математика в системе образования // Гуманитарные и социально-экономические проблемы развития современного общества: сб. науч. тр. (посвящается 85-летию СибАДИ) / под общ. ред. В. П. Плосконосовой. – Омск, 2015. – С. 123–127.
- Карасева Р. Б. Решение задач исследовательского характера при изучении математики в вузе // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 12 (декабрь). – С. 69–74. – URL: <http://e-koncept.ru/2016/16266.htm>.
- Замков О. О., Толстопятенко Ю. Н., Черемных Ю. Н. Математические методы и модели в экономике / ред. А. В. Сидорович. – 3-е изд., перераб. – М.: Дело и Сервис, 2001. – 365 с.
- Карасева Р. Б. Транспортная задача как фундаментальная экономико-математическая модель // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 11 (ноябрь). – С. 59–64. – URL: <http://e-koncept.ru/2016/16237.htm>.
- Карасева Р. Б. Оптимальное распределение инвестиций по объектам вложения методами динамического программирования // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 7 (июль). – С. 62–67. – URL: <http://e-koncept.ru/2016/16141.htm>.
- Карасева Р. Б. Повышение уровня математической компетентности студента при введении в процесс обучения задач исследовательского характера // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 3 (март). – С. 16–20. – URL: <http://e-koncept.ru/2016/16042.htm>.

**Rimma Karaseva,**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, head of the chair of Mathematics, Siberian State Automobile and Highway Academy, Omsk*

[karaseva\\_rb@mail.ru](mailto:karaseva_rb@mail.ru)

#### Basic economic-mathematical models

**Abstract.** Basic professional competences of economist assumes that he owns the methods of building and using mathematical models. Acquaintance with mathematical models of basic economic situations should begin during the first years of study. The paper presents an overview of the main mathematical models used in various fields of economy and industry.

**Key words:** economic-mathematical models, competences.

#### References

- Karaseva, R. B. (2015). "Tendencii sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya", *Aktual'nye problemy prepodavaniya matematiki v tehnichestkom vuze*, Izd-vo OmsGTU, Omsk, № 3, pp. 45–47 (in Russian).
- Karaseva, R. B. (2015). "Matematika v sisteme obrazovaniya", in Ploskonosova, V. P. (ed.) *Gumanitarnye i social'no-jekonomicheskie problemy razvitiya sovremennogo obshhestva: sb. nauch. tr. (posvjashhaetsja 85-letiju SibADI)*, Omsk, pp. 123–127 (in Russian).
- Karaseva, R. B. (2016). "Reshenie zadach issledovatel'skogo haraktera pri izuchenii matematiki v vuze", *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal "Koncept"*, № 12 (dekabr'), pp. 69–74. Available at: <http://e-koncept.ru/2016/16266.htm> (in Russian).
- Zamkov, O. O., Tolstopjatenko, Ju. N. & Cheremnyh, Ju. N. (2001). *Matematicheskie metody i modeli v jekonomike* / red. A. V. Sidorovich, 3-e izd., pererab., Delo i Servis, Moscow, 365 p. (in Russian).
- Karaseva, R. B. (2016). "Transportnaja zadacha kak fundamental'naja jekonomiko-matematicheskaja model", *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal "Koncept"*, № 11 (nojabr'), pp. 59–64. Available at: <http://e-koncept.ru/2016/16237.htm> (in Russian).
- Karaseva, R. B. (2016). "Optimal'noe raspredelenie investicij po ob#ektam vlozhenija metodami dinamicheskogo programmirovaniya", *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal "Koncept"*, № 7 (ijul'), pp. 62–67. Available at: <http://e-koncept.ru/2016/16141.htm> (in Russian).
- Karaseva, R. B. (2016). "Povyshenie urovnja matematicheskoy kompetentnosti studenta pri vvedenii v process obuchenija zadach issledovatel'skogo haraktera", *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal "Koncept"*, № 3 (mart), pp. 16–20. Available at: <http://e-koncept.ru/2016/16042.htm> (in Russian).

#### Рекомендовано к публикации:

Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,  
главным редактором журнала «Концепт»



[www.e-koncept.ru](http://www.e-koncept.ru)

Поступила в редакцию <i>Received</i>	17	Получена положительная рецензия <i>Received a positive review</i>	17
Принята к публикации <i>Accepted for publication</i>	17	Опубликована <i>Published</i>	29.03.17

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2017

© Карасева Р. Б., 2017