ISSN 2304-120X
Концепт
научно-методический электронный журнал

ART 170114 УДК 372.851

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga.aika@yandex.ru

Методические особенности темы «Вычисление площадей плоских фигур в случае параметрического задания функции и в полярных координатах»

Аннотация. *Работа предлагает методику изложения темы «Решение задач на вычисление площадей плоских фигур» в курсе «Интегральное исчисление». Статья написана на основе опыта преподавания математического анализа во втузе и будет полезна как преподавателям при проведении практических занятий, так и студентам для самостоятельной работы по указанной теме. Цель работы – помочь студентам приобрести и развить навыки применения методов интегрирования к решению различных задач. При решении задач на вычисление площадей студенты, как правило, испытывают затруднения при работе с полярными координатами и функциями, заданными параметрически. В этом случае полезно рассмотреть решение задачи разными способами. В работе кратко изложены основные теоретические сведения, рассмотрены примеры и типовые задачи, необходимые для совершенствования навыков интегрирования, а также приводятся сведения из истории математики с целью развития познавательного интереса к изучаемому вопросу.*

Ключевые слова: *геометрические приложения определенного интеграла, вычисление площади фигуры, методические особенности.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Площадь криволинейной трапеции, заданной условиями вида $\begin{cases} 0 \le y \le f(x), \\ a \le x \le b, \end{cases}$ равна S = $\int_a^b f(x)dx$ (1) (рис. 1).

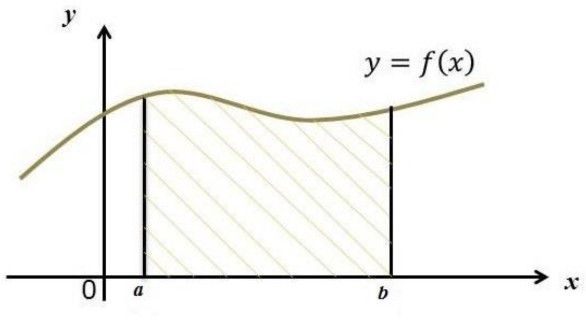

Рис. 1

Если функция y = y(x) задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} \mathrm{x = x(t)}, \\ \mathrm{y = y(t)}, \end{cases}$ причем t_1 и t_2 таковы, что $x(t_1)$ = a, $x(t_2)$ = b, то нужно в формуле (1) перейти к переменной t.

S = $\int_a^b y(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt$. Заметим, что из неравенства $a < b$ не следует, что $t_1 < t_2$.

Рассмотрим пример решения задачи на вычисление площади разными способами. В качестве такой фигуры рассмотрим эллипс. При этом отметим ряд исторических фактов, касающихся истории открытия и изучения свойств указанной кривой.

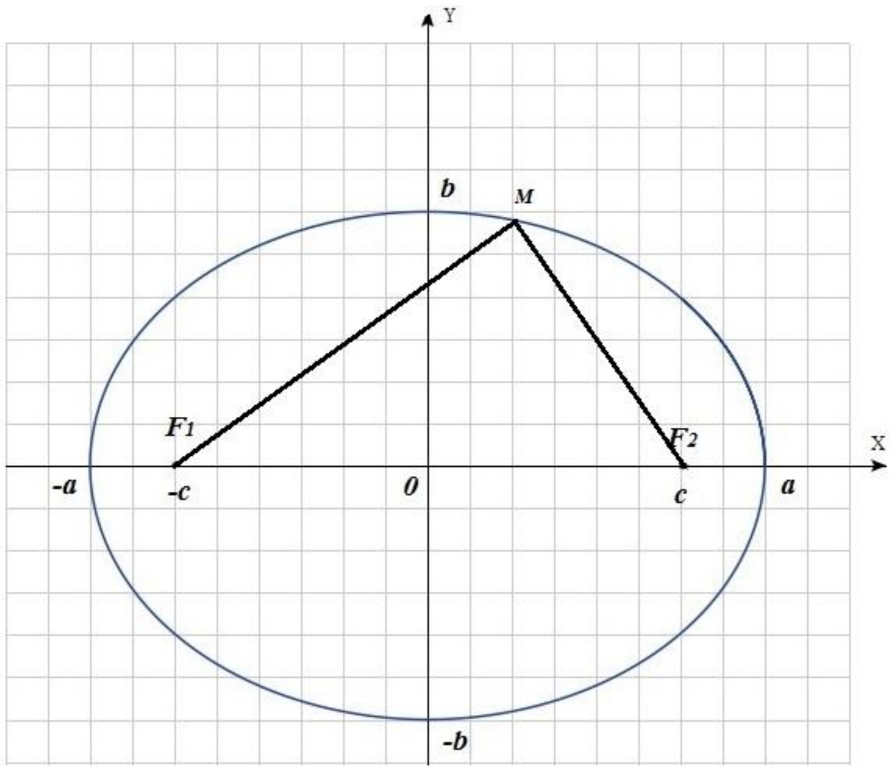

Рис. 2

Эллипс – фигура (кривая), образованная точками, у которых сумма расстояний от двух заданных точек фиксирована (и больше расстояния между двумя указанными точками). Иными словами, если F1, F2 – данные точки, то эллипс образован точками M, для которых F1M + F2M = const > F1 F2. Свойство эллипса, выраженное условием F1M+ F2M = const, называют фокальным свойством эллипса (рис. 2). Благодаря фокальному свойству можно быстро и просто начертить эллипс: достаточно закрепить в фокусах эллипса на листе бумаги две булавки, прикрепить к ним нитку длиной в две большие полуоси, затем, оттягивая нить острием карандаша, обвести одну половину эллипса, потом – вторую (рис. 3 [1]).

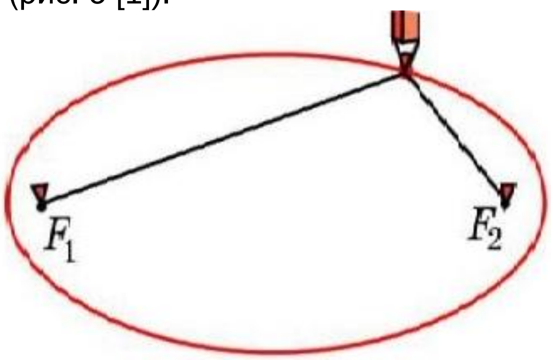

Рис. 3

Знаменитый ученый древности Менехм (IV в. до н. э.), ученик Евдокса, прославился работами по астрономии и математике, и прежде всего решением делосской задачи об удвоении куба. Изучение конуса привело Менехма к открытию конических сечений – кривых, полученных путем пересечения конуса секущей плоскостью. Менехм рассматривал исключительно конусы вращения. Конусы вращения в зависимости от величины угла при вершине (угла, составленного двумя образующими, расположенными в плоскости осевого сечения) Менехм делил на прямоугольные, тупоугольные и остроугольные. Для получения конических сечений рассматривалась плоскость, перпендикулярная образующей. Коническое сечение прямоугольного конуса дает параболу, тупоугольного конуса – гиперболу, остроугольного конуса – эллипс. Сами названия кривых, которые были введены Аполлонием Пергским (III в. до н. э.), связаны как раз с упомянутым выше углом при вершине конуса. Так, эллипс (*έλλείψίς* – изъян, недостаток угла конуса до прямого), гипербола (*ύπέρβωλη* – преувеличение, преобладание угла конуса над прямым), парабола (*παραβολη* – приближение, то есть равенство угла конуса прямому углу). Позже было установлено, что все данные кривые можно получить на одном конусе, изменяя наклон секущей плоскости, независимо от угла при вершине. При этом следует брать конус, состоящий из двух полостей, и полагать, что они простираются в бесконечность [2, 3] (см. рис. 4).

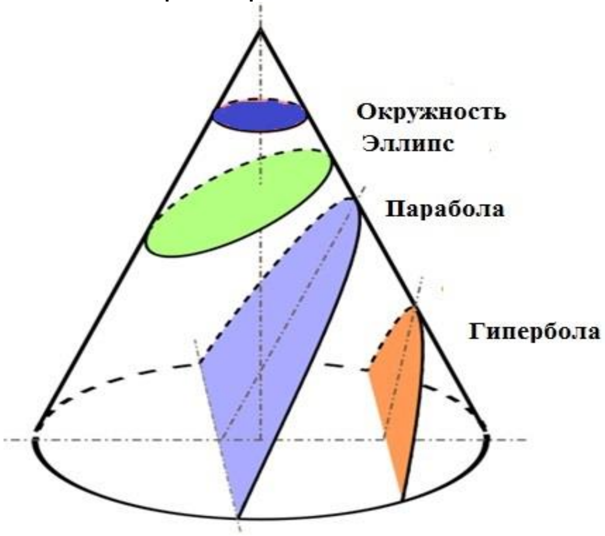

Рис. 4

Задача. Найти площадь, ограниченную эллипсом.

Решение

Рассмотрим в данном случае два способа вычисления площади фигуры.

1. Пусть эллипс задан каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Вычислим четвертую часть площади: $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $x \in [0;a]$.

$$S = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = 4\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\,\Big|\begin{matrix}a\\0\end{matrix} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\,\Big|\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right) = 4\frac{b}{a}\frac{a^2}{2}(\arcsin 1 - \arcsin 0) =$$
$$= 2ab\frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

Отметим, что интеграл $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$ вычисляется методом интегрирования по частям.

Ответ: πab.

2. Рассмотрим параметрическое задание эллипса – $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

Определим значения t_1 и t_2. t_1 – решение системы $\begin{cases} 0 = a\cos t, \\ b = b\sin t. \end{cases}$ t_2 – найдем, решив систему $\begin{cases} a = a\cos t, \\ 0 = b\sin t. \end{cases}$

$$S = 4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t(-\sin t)dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

Ответ: πab.

Следует также рассмотреть решение задачи, в которой требуется найти площадь фигуры, которая не является криволинейной трапецией.

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 1$ и $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t. \end{cases}$

Решение

Сделаем чертеж (рис. 5).

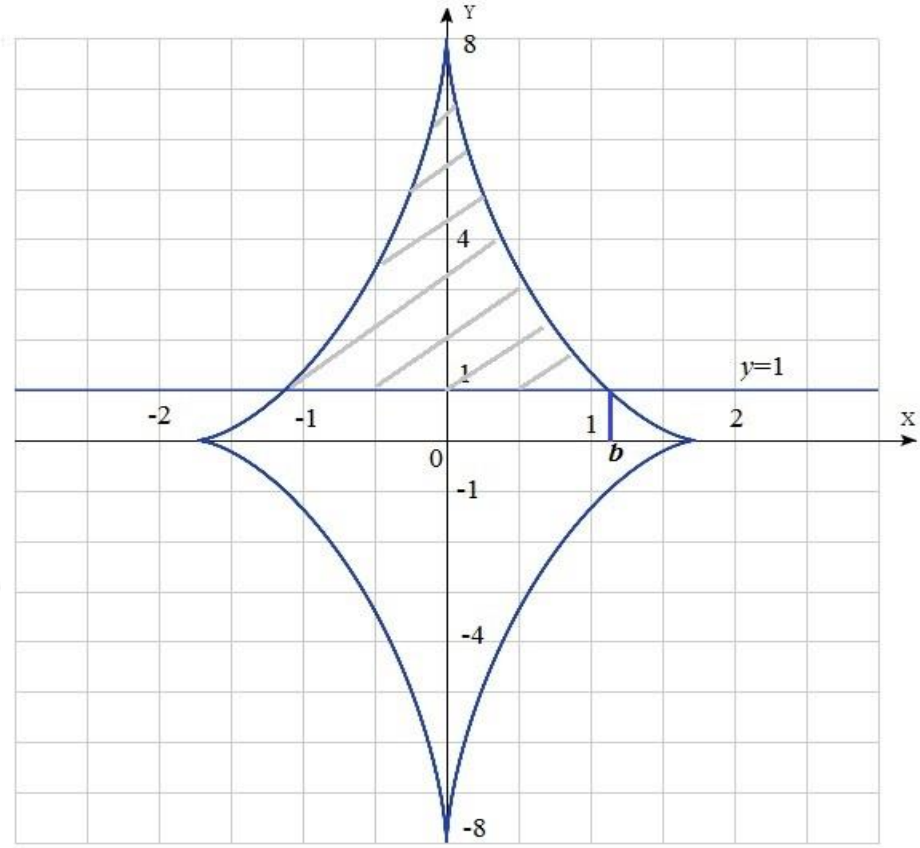

Рис. 5

Запишем формулу для нахождения площади этой фигуры в декартовой системе координат:

$$S = 2\left(\int_0^b y_1(x)dx - \int_0^b 1\, dx\right),$$

где $y = y_1(x)$ – уравнение астроиды в декартовой системе координат.

Под знаком первого интеграла перейдем к новой переменной – параметру t. Тогда:

$$S = 2\int_{t_1}^{t_2} 8\sin^3 t \cdot \left(\sqrt{3} \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)\right) dt - 2\int_0^b 1\, dx.$$

Найдем значения t_1, t_2 и *b*.

Из системы $\begin{cases} x = \sqrt{3}cos^3t, \\ y = 8sin^3t, \\ y = 1 \end{cases}$ получим $8sin^3t = 1$, тогда $t_2 = \frac{\pi}{6}$. Подставим $t_2 = \frac{\pi}{6}$ в первое уравнение и найдем *b*$=\sqrt{3}cos^3\frac{\pi}{6} = \frac{9}{8}$.

Из системы $\begin{cases} 0 = \sqrt{3}cos^3t, \\ 8 = 8sin^3t \end{cases}$ найдем $t_1 = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом,

$$S = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\left(-24\sqrt{3}sin^4t \cdot cos^2t\right)dt - 2\int_0^{\frac{9}{8}} dx =$$

$$= 48\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sin^4t \cdot cos^2tdt - \frac{9}{4} =$$

$$= 48\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}sin^2 2t \cdot sin^2tdt - \frac{9}{4} =$$

$$= 12\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2t \cdot \frac{1 - cos2t}{2}dt - \frac{9}{4} =$$

$$=3\sqrt{3}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos4t}{2}dt - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2t \ \cdot d(sin2t)\right) - \frac{9}{4} =$$

$$=3\sqrt{3}\left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}sin4t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}sin^3 2t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{9}{4} = \pi\sqrt{3}.$$

Ответ: $\pi\sqrt{3}$.

Вычисление площади плоской фигуры в полярной системе координат

Криволинейным сектором называется фигура, ограниченная графиком функции $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (рис. 6).

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi.$$

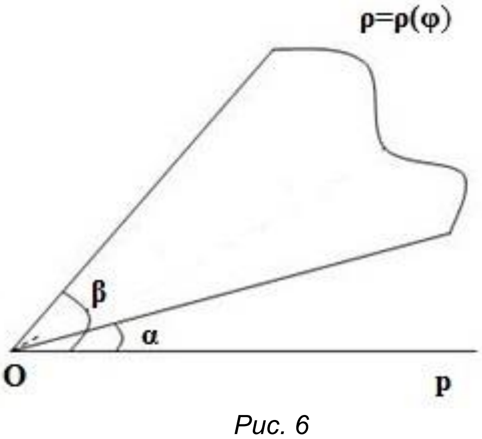

Рис. 6

Если фигура не является криволинейным сектором, ее площадь находится как сумма или разность площадей криволинейных секторов.

Например, площадь S_1:

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho_1^2(\varphi)d\varphi - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho_2^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\rho_1^2(\varphi) - \rho_2^2(\varphi))d\varphi,$$

где α и β – решения системы уравнений $\begin{cases}\rho = \rho_1(\varphi),\\ \rho = \rho_2(\varphi)\end{cases}$ (рис. 7).

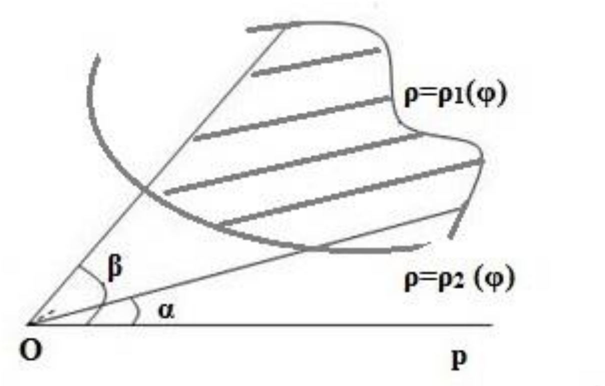

Рис. 7

Задача. Найти площадь фигуры, заданной неравенствами:

$$\begin{cases}\rho \le 4,\\ \rho \ge \dfrac{2}{sin\varphi}.\end{cases}$$

Решение

Построим кривые $\rho = 4$, $\rho = \frac{2}{sin\varphi}$ (см. рис. 8).

Определим лучи, проходящие через точки пересечения кривых, решив систему:

$$\begin{cases}\rho = 4,\\ \rho = \dfrac{2}{sin\varphi}.\end{cases}$$

Получим $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.

Проведем указанные лучи. Получим фигуру, площадь которой надо найти, – круговой сегмент. Учитывая, что фигура симметрична относительно $\varphi = \frac{\pi}{2}$, составим интеграл для вычисления площади.

$$S = 2\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(4^2 - (\frac{2}{sin\varphi})^2)d\varphi = 16\varphi\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + 4ctg\varphi\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 16(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) + 4(ctg\frac{\pi}{2} - ctg\frac{\pi}{6}) = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$.

Аналогично, площадь $S_2 = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho_1^2(\varphi)d\varphi + \frac{1}{2}\int_\beta^\gamma \rho_2^2(\varphi)d\varphi$, β – решение системы уравнений $\begin{cases}\rho = \rho_1(\varphi),\\ \rho = \rho_2(\varphi),\end{cases}$ α и γ находятся из уравнений $\rho_1(\varphi) = 0, \rho_2(\varphi) = 0$ соответственно, лучи φ = α, φ = γ – касательные лучи в полюсе (см. рис. 9).

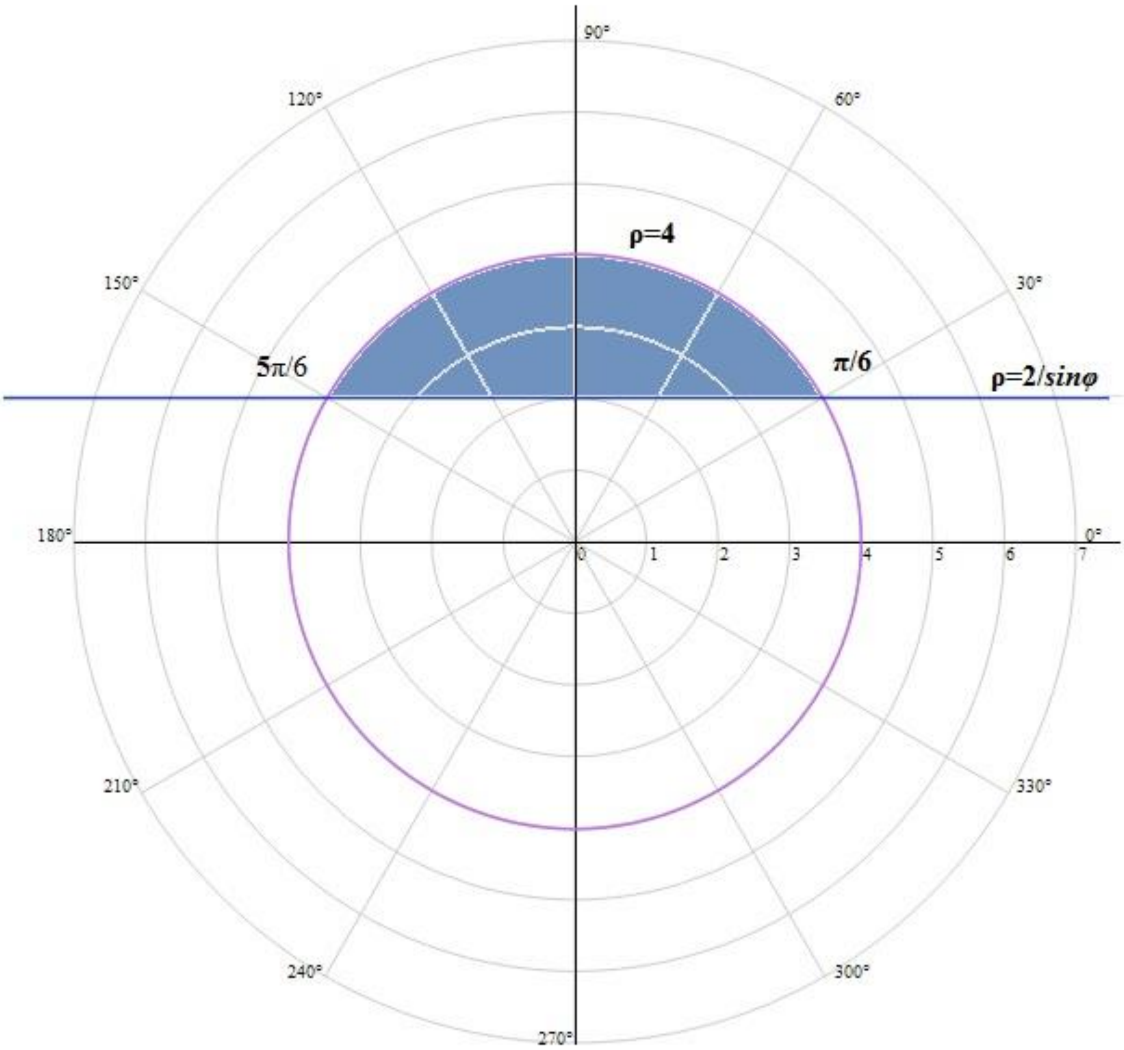
90°
120°
60°
ρ=4
150°
30°
5π/6
π/6
ρ=2/sinφ
180°
0°
0
1
2
3
4
5
6
7
210°
330°
240°
300°
270°

Рис. 8

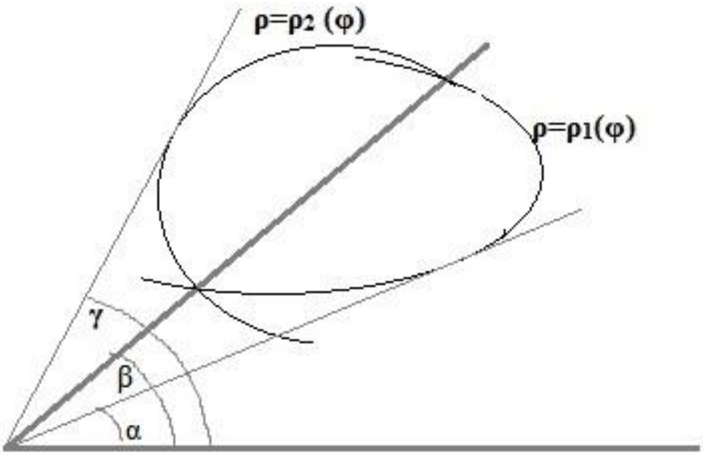
ρ=ρ2 (φ)
ρ=ρ1(φ)
γ
β
α

Рис. 9

Задача. Найти площадь фигуры, заданной неравенствами:

$$\begin{cases} \rho \le sin\varphi, \\ \rho \le \sqrt{3}cos\varphi. \end{cases}$$

Решение

Построим кривые $\rho = sin\varphi$, $\rho = \sqrt{3}cos\varphi$.

Определим лучи, проходящие через точки пересечения кривых, решив систему:

$$\begin{cases} \rho = sin\varphi, \\ \rho = \sqrt{3}cos\varphi. \end{cases}$$

Получим $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Проведем указанный луч. Получим фигуру, площадь которой надо найти (рис. 10).

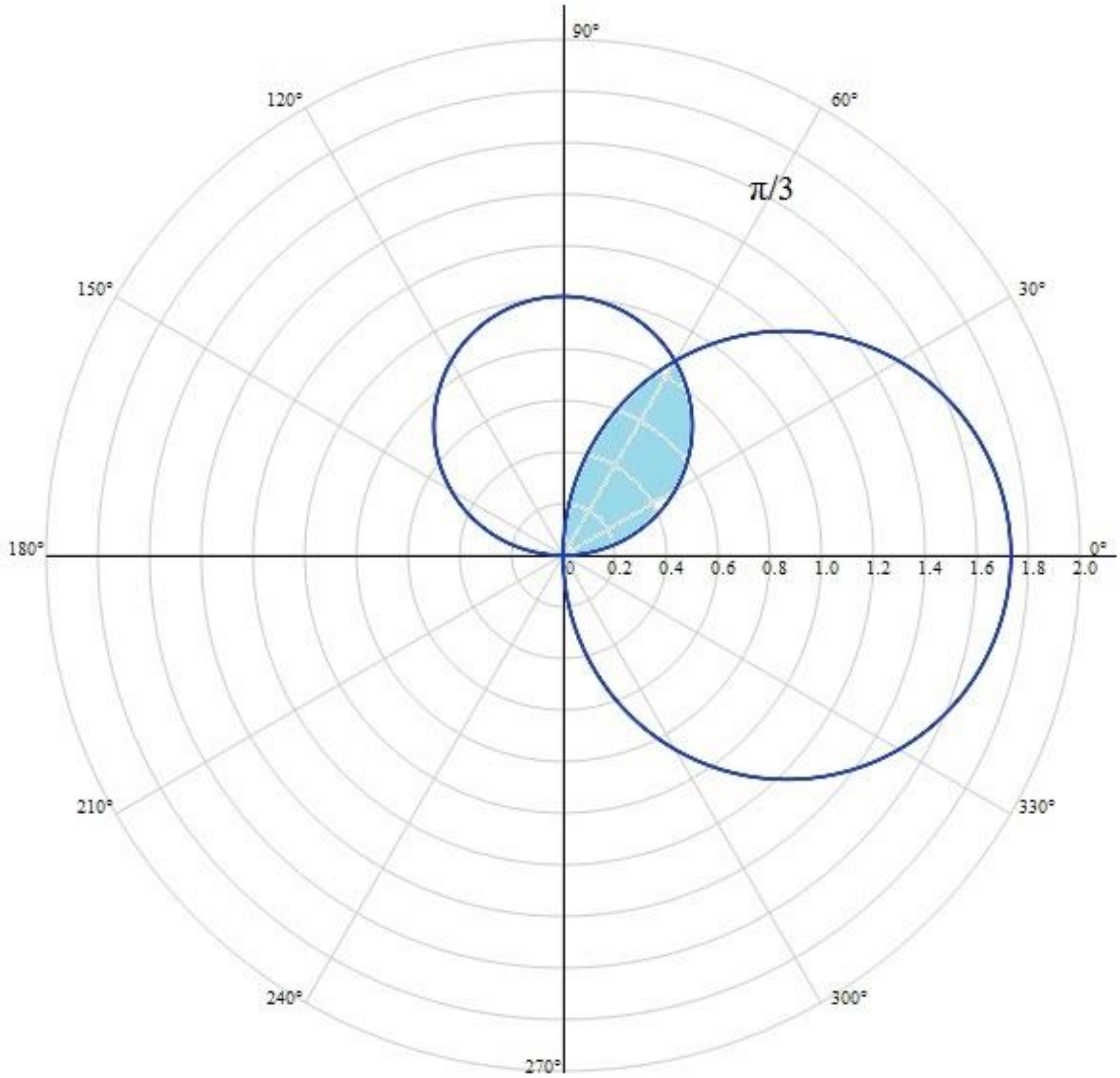

Рис. 10

Составим интеграл для вычисления площади.

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sqrt{3}cos\varphi)^2)\,d\varphi+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(sin\varphi)^2)d\varphi=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+cos2\varphi}{2}d\varphi+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-cos2\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}sin2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right)+\frac{1}{4}\left(\varphi\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}sin2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{7\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{7\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

В заключение следует добавить, что для самостоятельной работы по данной теме можно рекомендовать задачи из источников [4–8].

Ссылки на источники

1. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия. – М.: Наука, 1990. – 669 с.
2. Там же.
3. Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. – М., 1963. – 94 с.
4. Данко П. Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1. – М.: Изд. дом «ОНИКС 21 век», 2003. – 304 с.
5. Данко П. Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 2. – М.: Изд. дом «ОНИКС 21 век». 2003. – 416 с.
6. Лунгу К. Н. Систематизация приемов учебной деятельности при обучении математике. – М.: Ком-Книга, 2007. – 424 с.
7. Малыгина О. А. Изучение математического анализа на основе системно-деятельностного подхода. – М.: Изд. ЛКИ, 2008. – 416 с.
8. Ляшко И. Я. и др. Математический анализ в примерах и задачах. – Киев, 1974. – 678 с.

Olga Vergazova,
Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical Bauman University, Moscow
olga.aika@yandex.ru

Methodological features of the topic “Calculating of the plane figures area in case of functions parametrization and in polar coordinates”

Abstract. This work suggests a methodology for the presentation of the topic "Solution of plane figures areas calculating problems " in the course "Integral calculus". The article is based on experience of mathematical analysis teaching in technical university and it will be useful both to teachers in conducting practical classes and to students in their independent work on the topic. The aim of this work is to help students to acquire and develop skills of integration methods application for various problems solving. When solving tasks on the areas calculation students have as a rule difficulties working with polar coordinates and functions defined parametrically. In this case, it is useful to consider the problem solution in different ways. The basic theoretical information is briefly stated in this article. The author gives examples and standard tasks that are necessary to improve integrating skills and provides information from the history of mathematics which helps to develop cognitive interest to the explored subject.

Key words: geometrical applications of definite integral, figures area calculation, the methodological features.

References

1. Aleksandrov, A. D. & Necvetaev, N. Ju. (1990). *Geometrija*, Nauka, Moscow, 669 p. (in Russian).
2. Ibid.
3. Chistjakov, V. D. (1963). *Tri znamenitye zadachi drevnosti*, Moscow, 94 p. (in Russian).
4. Danko, P. E. et al. (2003). *Vysshaja matematika v uprazhnenijah i zadachah: v 2 ch*. Ch. 1, Izd. dom “ONIKS 21 vek”, Moscow, 304 p. (in Russian).
5. Danko, P. E. et al. (2003). Vysshaja matematika v uprazhnenijah i zadachah: v 2 ch. Ch. 2, Izd. dom “ONIKS 21 vek”, Moscow, 416 p. (in Russian).
6. Lungu, K. N. (2007). *Sistematizacija priemov uchebnoj dejatel'nosti pri obuchenii matematike*, KomKniga, Moscow, 424 p. (in Russian).
7. Malygina, O. A. (2008). *Izuchenie matematicheskogo analiza na osnove sistemno-dejatel'nostnogo podhoda*, Izd. LKI, Moscow, 416 p. (in Russian).
8. Ljashko, I. Ja. et al. (1974). *Matematicheskij analiz v primerah i zadachah*, Kiev, 678 p. (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

ISSN 2304-120X

www.e-koncept.ru

Поступила в редакцию *Received*	11.05.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	12.05.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	12.05.17	Опубликована *Published*	15.05.17