ISSN 2304-120X
научно-методический электронный журнал
Кандаурова И. Е. Методика исследования на сходимость несобственных интегралов // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170111.htm.

ART 170111 УДК 378.147:517.382

Кандаурова Ирина Евгеньевна,
старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
iriskan6591@mail.ru

Методика исследования на сходимость несобственных интегралов

Аннотация. *Материал статьи рассчитан на студентов технических специальностей, однако будет полезен всем, кто интересуется теорией несобственных интегралов. Представляет собой рекомендации в виде задач и примеров для подготовки к экзаменам, практическим занятиям, контрольным и рубежным работам, выполнения домашних заданий. Предложены задачи для самостоятельного решения с целью закрепления полученных знаний. Материал работы может быть использован преподавателями, ведущими практические занятия. Автор предполагает, что читатель владеет основными понятиями теории бесконечно малых и больших величин, их сравнения, различными способами вычисления пределов.*
Ключевые слова: *несобственные интегралы 1-го и 2-го рода, признаки сравнения, предельный признак сравнения, абсолютная и условная сходимость интегралов, интеграл Дирихле.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

В целях повышения уровня математической подготовки студентов математических и технических специальностей особое внимание уделяется тем вопросам высшей математики, без прочного знания которых невозможно стать хорошим специалистом в своей области. К таким важным темам относится тема несобственных интегралов, которые часто встречаются в задачах по механике и электростатике.

Предложенная в статье методика позволит достаточно быстро сформировать прочные навыки решения задач по этой теме. Цель работы – научить вычислять и исследовать на сходимость и расходимость несобственные интегралы.

Понятие определенного интеграла вводилось при двух условиях: 1) конечность отрезка интегрирования $[a,b]$; 2) непрерывность (а стало быть, ограниченность) функции на отрезке интегрирования. Рассмотрим естественное обобщение определенного интеграла в случае нарушения того или иного условия. В этом случае мы приходим к понятию несобственных интегралов 1- го рода и 2-го рода. Правда, интеграл – это площадь, а площадь неограниченно протяженной фигуры выглядит непривычно.

Несобственные интегралы 1-го рода. Это интегралы от непрерывных функций по бесконечному интервалу. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $x \in [a;\infty)$.

Определение 1. Несобственным интегралом 1-го рода называется предел определенного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\big(F(b)-F(a)\big)$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Определение 2. Если предел в правой части последней формулы существует и конечен, т. е. $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = c$, то несобственный интеграл называется сходящимся.

Если этот предел не существует (в частности, равен бесконечности), то несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ называется расходящимся [1].

Из этих определений следует, что если для некоторого действительного числа a сходится каждый из несобственных интегралов $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, то сходится и несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, причем справедливо равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx .$$

При исследовании несобственного интеграла на сходимость первое, что надо сделать, – это попробовать вычислить интеграл, т. е. воспользоваться определением.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}dx$.

$\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} e^{-3x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\Big|_0^b = -\frac{1}{3}\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-3b} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Интеграл сходится по определению.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} arctgx\Big|_a^b = \lim\limits_{b\to+\infty} arctgb - \lim\limits_{a\to-\infty} arctga = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Интеграл сходится по определению.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln n} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_2^b \frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{b\to\infty} \ln\ln x\Big|_2^b = \lim\limits_{b\to\infty}(\ln\ln b - \ln\ln 2) = \infty$. Интеграл расходится по определению.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ в зависимости от k.

$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{\ln^{1-k} x}{1-k}\Big|_2^b$, $(k \neq 1)$. Видно, что этот предел зависит от k:

Если k > 1, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{\ln^{1-k} x}{1-k}\right)\Big|_2^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{\ln^{1-k} b}{1=k} - \frac{\ln^{1-k} 2}{1-k}\right) = \frac{\ln^{1-k} 2}{k-1}$, т. е. интеграл сходится.

Если $k < 1$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{\ln^{1-k} b}{1-k} - \frac{\ln^{1-k} 2}{1-k}\right) = +\infty$, т. е. интеграл расходится.

Если k = 1, то $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_2^b \frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln\ln b - \ln\ln 2) = +\infty$, т. е. интеграл расходится.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$.

$\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_3^{b}\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_3^{b}\frac{d\ln\ln x}{\ln\ln x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln\ln\ln x\Big|_3^b=+\infty$. Интеграл расходится по определению [2].

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл от степенной функции $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $(a>0, p>0)$, p – действительное число (интеграл Дирихле).

Интересен только случай $p>0$, так как при $p<0$ подынтегральная функция стремится к бесконечности при $x\to\infty$ и интеграл расходится.

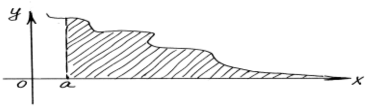
$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_a^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}}{1-p}+\frac{a^{1-p}}{p-1}=\begin{cases}\dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & 1-p<0,\ p>1\\ \infty, & 1-p>0,\ p<1\end{cases}.$$

Рассмотрим отдельно случай, когда $p=1$.

$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}(\ln x)\big|_a^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b-\ln a=+\infty$. Интеграл расходится по определению.

Следовательно, интеграл Дирихле $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\text{сходится при } p>1.\\ \text{расходится при } p\le 1.\end{cases}$

Сходящиеся несобственные интегралы 1-го ряда имеют определенный геометрический смысл. График функции $y=f(x)$ ограничивает трапецию с бесконечным основанием.



Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ сходится, то площадь фигуры, ограниченная функцией $y=f(x)$, прямыми $x=a$ и $y=0$, имеет площадь, равную этому интегралу.

Заметим, что на сходящиеся несобственные интегралы распространяются все свойства определенного интеграла и вся техника вычислений (линейность, формула Ньютона– Лейбница, замена переменной, интегрирование по частям, интегрирование неравенств). Расходящиеся интегралы требуют некоторой аккуратности в записях, в частности, неверны (просто не имеют смысла) записи:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=0,\quad \int\limits_0^1\frac{dx}{x}=1+\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x},\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=2\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}.$$

Вопрос о сходимости интеграла решается относительно просто, если найдена первообразная. Часто, однако, найти ее затруднительно, тогда выяснить сходимость/расходимость интеграла пытаются косвенным путем – с помощью тех или иных признаков.

Признак сравнения. Если для всех $x \in [a,+\infty)$ выполняется неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Схематическая запись признака сравнения выглядит так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

сходится $\longleftarrow$ сходится

расходится $\longrightarrow$ расходится.

Предельный признак сравнения. Если для всех $x \in [a,+\infty)$ $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c, (c \ne 0, c \ne \infty)$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся [3].

Чтобы с помощью этих признаков исследовать интегралы на сходимость, надо иметь такие интегралы-эталоны, сходимость или расходимость которых была бы известна заранее. В качестве эталона обычно используют интеграл Дирихле.

Для его подбора полезно вспомнить неравенства, которыми при этом пользуемся: $\ln x < x$, $\sin x < x < tgx$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$, $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$, и некоторые эквивалентности, которые справедливы при $x \to \infty$: $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \approx \frac{1}{x}$, $\sin\frac{1}{x} \approx \frac{1}{x}$, $tg\frac{1}{x} \approx \frac{1}{x}$, $e^{\frac{1}{x}} - 1 \approx \frac{1}{x}$, $\arcsin\frac{1}{x} \approx \frac{1}{x}$, $\frac{1}{\mathrm{shx}} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \approx \frac{2}{e^x}$, $\mathrm{arctgx} \approx \pm\frac{\pi}{2}$.

Геометрический смысл ситуации очевиден: чем ближе кривая прижимается к оси абсцисс, тем лучше для сходимости.

Отметим, что обе формы признака сравнения, непосредственная и предельная, хорошо дополняют одна другую. Предельная форма выглядит, конечно, мощнее: здесь охватывается самое важное – порядок бесконечно малой подынтегральной функции. Но ведь порядка может и не быть, тогда поможет непосредственное сравнение.

Признак абсолютной сходимости. Если $f(x)$ – знакопеременная функция на $[a,+\infty)$ и $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится абсолютно.

Из абсолютной сходимости интеграла следует его сходимость, но обратное неверно. Интеграл может сходиться, но не абсолютно. Такая сходимость называется **условной сходимостью** [4]. Рассмотрим следующие примеры.

Пример 8. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$.

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x}=-\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}d\cos x=-\frac{1}{x}\cos x\Big|_1^{+\infty}-\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos xdx}{x^2}=\cos 1-\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos xdx}{x^2}$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos xdx}{x^2}$ сходится абсолютно из сравнения с интегралом Дирихле, так как $\frac{|\cos x|}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$. Значит, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x}$ сходится как сумма константы и сходящегося интеграла.

Пример 9. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 xdx}{x}$.

Очевидно, что $\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos x}{2x}$. При интегрировании этого равенства от 1 до ∞ $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2x}$ расходится как интеграл Дирихле с $p=1$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos xdx}{2x}$ сходится (мы только что рассматривали такой же, только с синусом). Значит, и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 xdx}{x}$ расходится – иначе бы $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2x}$ сходился как сумма сходящихся интегралов. Осталось применить признак сравнения, используя очевидное неравенство $|\sin x|\ge\sin^2 x$, и, стало быть, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|dx}{x}$ расходится, т. е. интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 xdx}{x}$ сходится, но не абсолютно, а условно.

Пример 9. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

При $x\to+\infty$ $f(x)=\frac{1}{x^2(1+e^x)}<\frac{1}{x^2}$. Но интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится как интеграл Дирихле с $p=2>1$. Следовательно, по признаку сравнения исходный интеграл сходится.

Пример 10. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{4+\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

Оценим при $x\to+\infty$ подынтегральную функцию $f(x)=\frac{4+\sin x}{\sqrt{x}}<\frac{3}{\sqrt{x}}$. Но интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{3dx}{\sqrt{x}}=3\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ расходится как интеграл Дирихле с $p=\frac{1}{2}<1$. Константа на сходимость не влияет. Исходный интеграл расходится по признаку сравнения.

Пример 11. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{1+x^2}$.

При $x\to+\infty$ подынтегральная функция знакопеременная. Оценим ее по модулю.

Кандаурова И. Е. Методика исследования на сходимость несобственных интегралов // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170111.htm.

$\frac{|\sin x|}{1+x^2}=\frac{|\sin x|}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\le\frac{1}{x^2}$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится как интеграл Дирихле с $p=2>1$. Тогда $\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|dx}{1+x^2}$ сходится по признаку сравнения. Исходный интеграл сходится абсолютно по признаку абсолютной сходимости [5].

Пример 12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx}{\left(\sqrt{x}+5\right)}$.

При $x\to+\infty$ $f(x)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x}+5\right)}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{5}{\sqrt{x}}\right)}\approx\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\approx\frac{1}{x}$. Интеграл от эквивалентной функции $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится как интеграл Дирихле с $p=1$. Исходный интеграл расходится по предельному признаку сравнения.

Пример 13. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}dx}{x\sqrt{x}+3}$.

При $x\to+\infty$ подынтегральная функция знакопеременная, поэтому исследуем ее по модулю: $\frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{x\sqrt{x}+3}<\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ сходится как интеграл Дирихле с $p=\frac{3}{2}$. Следовательно, $\int\limits^{+\infty}\frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|dx}{x\sqrt{x}+3}$ сходится по признаку сравнения. Тогда исходный интеграл сходится абсолютно по признаку абсолютной сходимости.

Несобственные интегралы 2-го рода. Это интегралы от разрывной функции по конечному отрезку $[a,b]$.

Определение. Несобственным интегралом 2-го рода от функции, имеющей разрыв $f(a+\varepsilon)=\infty$ на левом конце отрезка $[a,b]$, называется предел определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}F\Big|_{a+\varepsilon}^{b}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(F(b)-F(a+\varepsilon)\right)$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Определение. Несобственным интегралом 2-го рода от функции, имеющей разрыв $f(b-\varepsilon)=\infty$ на правом конце отрезка $[a,b]$, называется предел определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}F\Big|_{a}^{b-\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(F(b-\varepsilon)-F(a)\right)$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Определение. Если существуют и конечны пределы в правых частях формул, то несобственный интеграл называется сходящимся. Если эти пределы не существуют или равны бесконечности, то несобственный интеграл называется расходящимся.

Определение. Если функция $f(x)$ имеет разрыв $f(c)=\infty, a<c<b$ внутри отрезка $[a,b]$, тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, если сходятся оба интеграла в правой части формулы, и расходится, если расходится хотя бы один из этих интегралов [6].

Также исследование на сходимость начинаем с того, что пробуем интеграл вычислить.

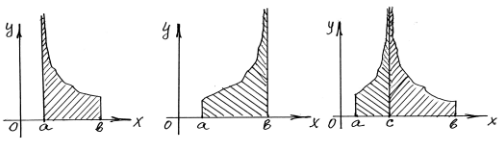
Пример 14. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}}$.

Функция имеет разрыв в точке $x=1$. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dx^2}{\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^{1-\varepsilon}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\left(1-\varepsilon\right)^2-1\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\left(-1\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Предел конечен, интеграл сходится по определению.

Пример 15. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Функция имеет разрыв в точке $x=1$, т. е. на левом конце отрезка.
$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^e \frac{d\ln x}{\ln^2 x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_{1+\varepsilon}^e=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\ln e}-\frac{1}{\ln\left(1+\varepsilon\right)}\right)=-1+\infty=\infty$. Несобственный интеграл расходится по определению.

Сходящийся несобственный интеграл 2-го рода имеет геометрический смысл. В случае $f(x)>0$ он равен площади бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной кривой $f(x)$, прямыми линиями $x=a$, $x=b$, $x=c$ и $y=0$.



И в этом случае вопрос о сходимости интеграла решается относительно просто, если найдена первообразная. Если найти ее затруднительно, сходимость/расходимость интеграла исследуют с помощью признаков.

Признак сравнения. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и знакопостоянны $0<f(x)\le g(x)$ на $(a,b]$ и $f(a+0)=\infty$, $g(a+0)=\infty$ для всех $x\in(a,b]$, тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Предельный признак сравнения. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и знакопостоянны $0<f(x)\le g(x)$ для всех $x\in(a,b]$ и $f(a+0)=\infty$, $g(a+0)=\infty$ и существует

конечный предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Чтобы с помощью этих признаков исследовать интегралы на сходимость, надо иметь такие интегралы-эталоны, сходимость или расходимость которых была бы известна заранее, и уметь эти эталоны подбирать. В качестве эталона обычно используют интегралы Дирихле $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^p}$ и $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^p}$, которые сходятся при $p<1$ и расходятся при $p\geq 1$. Проверить это можно непосредственно по определению.

Для подбора интегралов для сравнения полезно вспомнить некоторые неравенства, которыми при этом пользуемся: $|\sin x|\leq 1, |\cos x|\leq 1$, и некоторые эквивалентности, которые справедливы при $x\to 0: \ln(1+x)\approx x$, $\sin x\approx x$, $tgx\approx x$, $e^x-1\approx x$, $\arcsin x\approx x$, $\operatorname{arctg} x\approx x, 1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}\approx\dfrac{x^2}{2}$.

Признак абсолютной сходимости. Если функция $f(x)$ знакопеременна на $x\in(a,b]$, $f(a+0)=\infty$ и сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно [7].

Пример 16. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$.

Для $\forall x\in(0,1]$ $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x - x}>\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$. Вычислим по определению несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\operatorname{tg} x}=\int\limits_0^1 \dfrac{\cos x dx}{\sin x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \dfrac{d\sin x}{\sin x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln|\sin x|\Big|_\varepsilon^1=\ln|\sin x|-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln|\sin\varepsilon|=+\infty$.

Интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\operatorname{tg} x}$ расходится, следовательно, по признаку сравнения исходный интеграл расходится.

Пример 17. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^\pi \dfrac{\cos x dx}{\sqrt{\pi-x}}$.

Подынтегральная функция знакопеременная на отрезке $[0,\pi]$. Для $\forall x\in[0,\pi]$ выполняется неравенство $\dfrac{|\cos x|}{\sqrt{\pi-x}}<\dfrac{1}{\sqrt{\pi-x}}$. Но несобственный интеграл $\int\limits_0^\pi \dfrac{dx}{\sqrt{\pi-x}}$ сходится как интеграл Дирихле с $p=\dfrac{1}{2}<1$. По признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_0^\pi \dfrac{|\cos x|dx}{\sqrt{\pi-x}}$. Тогда исходный интеграл $\int\limits_0^\pi \dfrac{\cos x dx}{\sqrt{\pi-x}}$ сходится абсолютно по признаку абсолютной сходимости.

Пример 18. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx}{e^{x^2}-1}$.

Подынтегральная функция имеет разрыв в точке $x=0$. При $x\to 0+$, используя эквивалентности, подберем эквивалентную функцию $f(x)=\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{e^{x^2}-1}\approx\frac{\sqrt{x}}{x^2}\approx\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=g(x)$.

Несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ расходится как интеграл Дирихле с $p=\frac{3}{2}>1$. Исходный несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx}{e^{x^2}-1}$ также расходится по предельному признаку.

Пример 19. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Функция имеет разрыв в точке $x=1$. При $x\to 1-0$ подберем эквивалентную функцию для подынтегральной функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)}}\approx\frac{1}{2\sqrt{(1-x)}}\approx\frac{1}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}}$. Несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ сходится как интеграл Дирихле с $p=\frac{1}{2}<1$. Исходный интеграл сходится по предельному признаку [8].

Подводя итог, сформулируем основные положения методики исследования сходимости/расходимости интегралов:

1. Сначала оценить несобственный интеграл на предмет его вычисления, т. е. исследовать по определению. Вопрос о сходимости в этом случае решается легко, если найдена производная.
2. Если первообразную функцию найти трудно, то переходим к использованию признаков сравнения. Для этого надо подобрать интеграл-эталон (интеграл Дирихле), проверить, применим ли он, удобен ли для применения. Качество признака сходимости определяется его применимостью, практичностью и чувствительностью.

Для самостоятельной работы и повторения практического материала можно предложить следующие задачи [9–11]:

Несобственные интегралы 1-го рода:

а) Вычислить несобственные интегралы:

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx,\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{(1+x)dx}{\sqrt{x^5}},\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+9},\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)},\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4},\ \int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx,\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x\,dx}{\left(1+x^2\right)},$$

$$\int\limits_0^{+\infty}x\sin x\,dx,\ \int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^4 x},\ \int\limits_2^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$$

б) Исследовать сходимость/расходимость с помощью признаков сравнения:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\left(3x^3+2x^2+1\right)},\ \int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-1}},\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin dx}{x^3},\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{(1+3\sin x)dx}{x^2},\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)},\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x\,dx}{\sqrt{x^3+x}},$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{(2x+1)dx}{(3x+9)},\ \int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{x^2+2}},\ \int\limits_0^{+\infty}e^{x^2}dx,\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)},\ \int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx.$$

Несобственные интегралы 2-го рода:

а) Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}},\ \int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^3},\ \int_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}},\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x},\ \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} xdx,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},\ \int_0^1 \ln xdx, \ldots \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}},\ \int_{-1}^1 \frac{\arccos xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

б) Исследовать сходимость/расходимость с помощью признаков сравнения:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{(1-x)^3}},\ \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}},\ \int_0^1 \frac{\ln xdx}{\sqrt{x}},\ \int_1^2 \frac{dx}{\ln x},\ \int_0^1 \frac{\sin xdx}{\sqrt{1-x}},\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2},\ \int_0^{10} \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+5\sqrt[4]{x}+x^2\right)},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x},\ \int_0^1 \frac{3^{1-x}dx}{\sin\left(\sqrt{1-x}\right)},\ \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}},\ \int_0^1 \frac{x^3\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int_0^{\pi} \frac{(1-\cos x)dx}{x^4}.$$

Ссылки на источники

1. Зорич В. А. Математический анализ. Т. 1. – М.: Наука, 1989. – 437 с.
2. Зимина О. В., Кириллов А. И., Сальникова Т. А. Задачи и упражнения по высшей математике / под ред. А. И. Кириллова. – М.: Физматлит, 2005. – 368 с.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 575 с.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Физматлит, 2006. – 607 с.
5. Лунгу К. Н., Норин В. П., Письменный Д. Т., Шевченко Ю. А. Сборник задач по высшей математике. – М.: Айрис Пресс, 2007. – 379 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Указ. соч.
7. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1992. – 734 с.
8. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д. Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1994. – 528 с.
9. Зимина О. В., Кириллов А. И., Сальникова Т. А. Указ. соч.
10. Лунгу К. Н., Норин В. П., Письменный Д. Т., Шевченко Ю. А. Указ. соч.
11. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д. Чехлов В. И., Шабунин М. И. Указ. соч.

Irina Kandaurova,
Senior lecturer, Moscow NE Bauman State Technical University, Moscow
iriskan6591@mail.ru

Methods of improper integrals convergence study

Abstract. The material of the article is intended for students of technical specialties, but it will be useful to anyone who is interested in the theory of improper integrals. It presents recommendations in the form of tasks and examples for exam preparation, practical training, control work, homework. Here you can find the tasks proposed for independent work to consolidate the knowledge. The work material can be used by teachers conducting practical classes. The author assumes that the reader knows the basic concepts of the infinitely small and large quantities theory, their comparison, different ways of limits calculating.

Key words: improper integrals of the 1st and 2nd kind, signs of comparison, the ultimate sign of comparison, absolute and conditional convergence of integrals, Dirichlet integral.

References

1. Zorich, V. A. (1989). *Matematicheskij analiz. T. 1*, Nauka, Moscow, 437 p. (in Russian).
2. Zimina, O. V., Kirillov, A. I. & Sal'nikova, T. A. (2005). *Zadachi i uprazhnenija po vysshej matematike,* Fizmatlit, Moscow, 368 p. (in Russian).
3. Piskunov, N. S. (2006). *Differencial'noe i integral'noe ischislenija. T. 2*, Integral-Press, Moscow, 575 p. (in Russian).
4. Fihtengol'c, G. M. (2006). *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. T. 1,* Fizmatlit, Moscow, 607 p. (in Russian).

5. Lungu, K. N., Norin, V. P., Pis'mennyj, D. T. & Shevchenko, Ju. A. (2007). *Sbornik zadach po vysshej matematike*, Ajris Press, Moscow, 379 p. (in Russian).
6. Fihtengol'c, G. M. (2006). Op. cit.
7. Kudrjavcev, L. D. (1992). *Kratkij kurs matematicheskogo analiza*, Nauka, Moscow, 734 p. (in Russian).
8. Kudrjavcev, L. D., Kutasov, A. D. Chehlov, V. I. & Shabunin, M. I. (1994). *Sbornik zadach po matematicheskomu analizu,* Nauka, Moscow, 528 p. (in Russian).
9. Zimina, O. V., Kirillov, A. I. & Sal'nikova, T. A. (2005). Op. cit.
10. Lungu, K. N., Norin, V. P., Pis'mennyj, D. T. & Shevchenko, Ju. A. (2007). Op. cit.
11. Kudrjavcev, L. D., Kutasov, A. D. Chehlov, V. I. & Shabunin, M. I. (1994). Op. cit.

Рекомендовано к публикации:
Утёмовым В. В., кандидатом педагогических наук;
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

ISSN 2304-120X

www.e-koncept.ru

Поступила в редакцию *Received*	22.03.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	31.03.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	31.03.17	Опубликована *Published*	30.05.17