ISSN 2304-120X
научно-методический электронный журнал «Концепт»
Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm.
ART 170117 **УДК 372.851**

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Головина Анастасия Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nastya_gm@mail.ru

Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля

Аннотация. *В статье рассмотрено краткое изложение теоретических сведений в области функциональной зависимости элементарных функций. Продемонстрированы практические методы, позволяющие выполнить построение эскизов графиков функций различного уровня сложности. В частности, построение графиков функций, содержащих модуль, обычно вызывает немалые затруднения у абитуриентов и студентов первого курса. Цель данной работы – дать алгоритм построения графиков функций, содержащих модули, к которым применены линейные преобразования. При этом главное внимание уделяется методам построения графиков, а не изучению отдельных видов функций.*
Ключевые слова: *однозначные и многозначные функции, линейные преобразования, модуль, графики функций.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Понятие «функция» является одним из важнейших в математике. Ключевыми словами в этом понятии являются слова «зависимость» или «взаимосвязь». В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с функциональными зависимостями. Например, мы идем на важную встречу и чувствуем, что опаздываем. Нашей естественной реакцией будет увеличение скорости движения, так как мы четко знаем, что чем больше скорость, тем меньше времени мы затратим на дорогу. Вот она, функциональная зависимость: изменение одной величины (в данном случае скорости движения) влечет за собой изменение другой величины (в нашем случае времени, которое мы затрачиваем на движение).

Однозначные и многозначные функции

Если какая-то одна величина, например A, зависит от другой, например B, то говорят, что величина A есть функция величины B (или величина A находится в функциональной зависимости от величины B). Часто для обозначения функции (функциональной зависимости) используют символ f. Пишут $y = f(x)$, где величина y зависит от величины x. Величины x и y называют переменными, причем x – независимой переменной (аргументом), а y – зависимой переменной (функцией). При этом существуют однозначные и многозначные функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **однозначной**, если каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции.

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm.

Например, функция $y=x^2$ является однозначной. Аргументу $x=2$ соответствует одно значение $y=4$, аргументу $x=-2$ также соответствует одно значение $y=4$. Например, функция $y=\pm x$ неоднозначна, так как аргументу $x=2$ соответствуют два значения: $y=2$ и $y=-2$. Дадим теперь определение функции.

Определение. Функцией называется закон (соответствие или правило) f, по которому каждому элементу x из множества X ставится в соответствие единственный элемент y из множества Y.

Иногда говорят короче: однозначная функция – это закон отображения множества X на множество Y. Множество X называют обычно областью определения функции, а множество Y – множеством значений функции.

Определение. Множество значений x, при которых функция $y=f(x)$ определена (существует), называется **областью определения** функции.

Для обозначения области определения функции обычно используют обозначение Df или $D(f)$.

Определение. Множеством значений функции называют все значения, которые принимает переменная y.

Для обозначения множества значений функции обычно используют символ Ef или $E(f)$.

Обобщение понятия однозначной функции является понятие многозначной функции, которая допускает наличие нескольких значений функции для одного аргумента.

Определение. Многозначной функцией называется закон (соответствие или правило) f, по которому хотя бы одному элементу x из множества X ставится в соответствие более одного значения y из множества Y.

Функция или функциональная зависимость может быть задана различными способами: таблицей, аналитически или графически. Часто используется аналитический способ задания функции (т. е. через формулу, устанавливающую зависимость между переменными x и y).

Под графиком функции будем понимать множество точек плоскости XOY, прямоугольные декартовые координаты которых x и y удовлетворяют уравнению $y=f(x)$. Напомним, что ось Ox в прямоугольной декартовой системе координат называется осью абсцисс, а ось Oy – осью ординат.

По графику функции можно определить ее область определения и область значения. Для нахождения области определения нужно спроектировать график функции на ось абсцисс, а для нахождения области значений функции – на ось ординат.

Линейные преобразования графиков функций, содержащих знак модуля

Аналитически линейная функция задается следующим образом: $y=kx+b$. Графиком линейной функции является прямая, которая в прямоугольной декартовой системе координат может располагаться по-разному. За расположение прямой $y=kx+b$ в пространстве отвечают коэффициенты k и b. Коэффициент k – это тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс, а коэффициент b – это отрезок, который отсекает прямая от оси ординат (рис. 1).

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm.

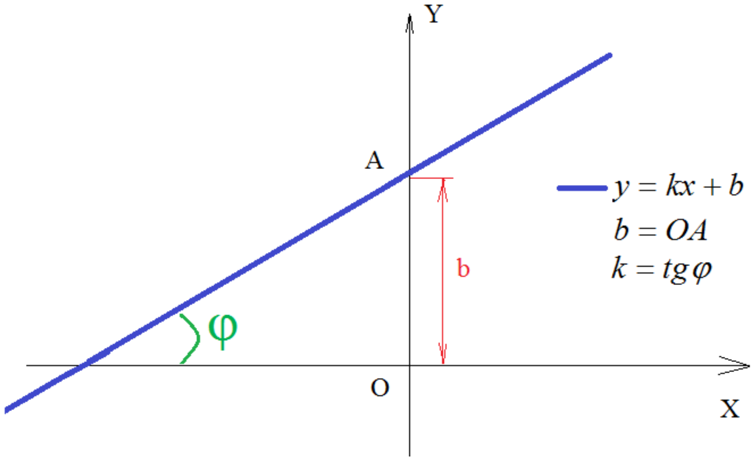

Рис. 1. График произвольной линейной функции $y = kx + b$

Частные случаи расположения прямой в пространстве:

1) $k = 0$, тогда $y = b$ – это прямая, параллельная оси абсцисс;

2) $b = 0$, тогда $y = kx$ – это прямая называется прямой пропорциональностью.

Для построения графиков линейных функций, то есть прямой, достаточно определить две точки, через которые данная прямая проходит. Очень часто в качестве этих точек выбирают точки пересечения с осями координат.

Так как целью статьи является не просто рассмотрение функций, а построение графиков функций, содержащих знак модуля, введем это понятие.

Определение. Модулем числа называется выражение:

$$|x| = \begin{cases} x, x \ge 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

Как видно из определения, модуль всегда является положительной величиной.

Пользуясь определением модуля, можно записать следующие равенства:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \ge 0, \\ -f(x), f(x) < 0. \end{cases} \quad f(|x|) = \begin{cases} f(x), f(x) \ge 0, \\ f(-x), f(x) < 0. \end{cases}$$

Замечание 1. Отметим, что функция $f(|x|)$ является **четной** – это легко проверить. Действительно, $f(|x|) = f(|-x|)$. Следовательно, ее график симметричен относительно оси ординат. Это свойство поможет нам при построении графика функции $f(|x|)$.

Замечание 2. Функция $|f(x)|$ неотрицательна.

Следовательно, график данной функции расположен не ниже оси абсцисс. Данным свойством также будем пользоваться при построении графика функции $|f(x)|$.

Перейдем теперь к изучению функций, заданных аналитически, к которым применены **линейные преобразования:** параллельный перенос, растяжение или сжатие, а также отражение графиков относительно координатных осей.

При построении графиков линейных функций, содержащих знак модуля, очень часто бывает удобно вначале преобразовать прямоугольную декартову систему координат XOY, а именно с помощью **параллельного переноса** сдвинуть всю систему координат на некоторый вектор (в зависимости от конкретного примера). Проделав такое преобразование, получим новую систему координат $X_1O_1Y_1$ с центром в точке O_1, которая имеет определённые координаты относительно старой системы координат. И уже в этой новой системе координат будем строить графики.

Рассмотрим теперь процесс преобразования прямоугольной декартовой системы координат и построение графиков линейных функций $y=|kx+b|$, $y=k|x|+b$ на конкретных примерах.

Пример 1. Построить график функции $y=|x|$.

Для построения данного графика достаточно построить прямую $y=x, x\geq 0$, а затем отразить ее симметрично относительно оси ординат. Это можно сделать, так как данная функция, согласно определению модуля, является четной (см. замеч. 1).

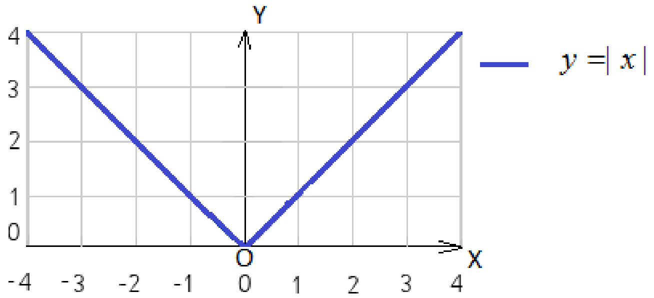

Рис. 2. График функции $y=|x|$

В итоге получаем график функции $y=|x|$, который назовем «галка».

Пример 2. Построить график функции $y=|x+1|$.

Для построения графика данной функции нужно перенести систему координат на вектор OO_1 с координатами $(-1{,}0)$. Таким образом, мы получили новую систему координат $X_1O_1Y_1$ с началом координат – точкой O_1, имеющей координаты $(-1{,}0)$ относительно старой системы координат. В этой новой системе координат построим график функции $y_1=|x_1|$.

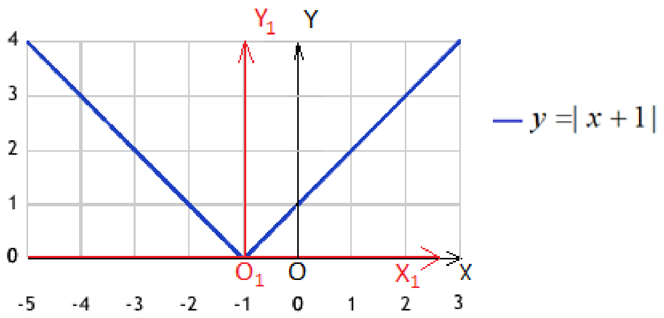

Рис. 3. График функции $y=|x+1|$

В итоге получаем ту же самую «галку», что и в первом примере, только сдвинутую на одну единицу влево.

Пример 3. Построить график функции $y=3|x+1|$.

Для построения этого графика нужно вновь сделать преобразование прямоугольной декартовой системы координат (см. пример 2). И уже в новой системе координат $X_1O_1Y_1$ построить график функции $y_1=3|x_1|$. Коэффициент $k=3$ в уравнении

$y = k|x|$ указывает на **растяжение** или **сжатие** графика функции $y = |x|$. Если $k > 1$, то происходит сжатие, если $0 < k < 1$ – растяжение графика функции.

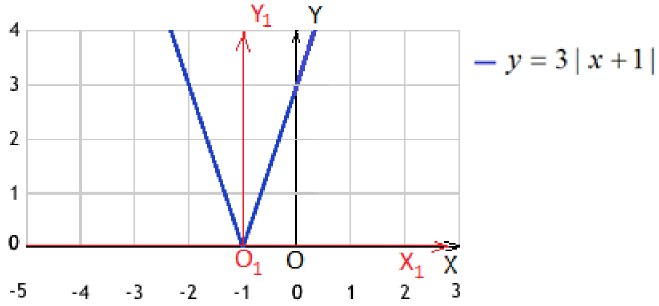

Рис. 4. График функции $y = 3|x+1|$

В итоге получаем такую же «галку», как и в примере 2, с единственным отличием: ветви этой «галки» наклонены ближе к оси ординат O_1Y_1.

Пример 4. Построить график функции $y = |2-2x|$.

Данную функцию можно преобразовать к виду $y = |2(1-x)| = 2|1-x|$. Полученная функция аналогична функции, рассмотренной в примере 3. Для ее построения следует:

1) преобразовать систему координат, сдвинув ее на вектор $(1{,}0)$;
2) построить в новой системе координат график функции $y_1 = 2|x_1|$.

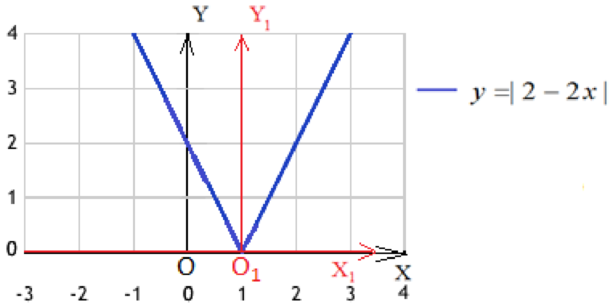

Рис. 5. График функции $y = |2-2x|$

В итоге получаем, что графиком функции $y = 2|1-x|$ является «галка», полученная в примере 1, но, во-первых, сдвинутая на одну единицу вправо, во-вторых, ветви «галки» наклонены ближе к оси O_1Y_1, чем в примере 1.

Пример 5. Построить график функции $y = -|x+4|$.

Для построения графика этой функции вновь сделаем преобразование прямоугольной декартовой системы координат, сдвинув ее на вектор OO_1 с координатами $(-4{,}0)$. И уже в новой системе координат $X_1O_1Y_1$ с центром в точке O_1, с координатами $(-4{,}0)$ относительно старой системы координат строим график функции $y_1 = -|x_1|$.

Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm.

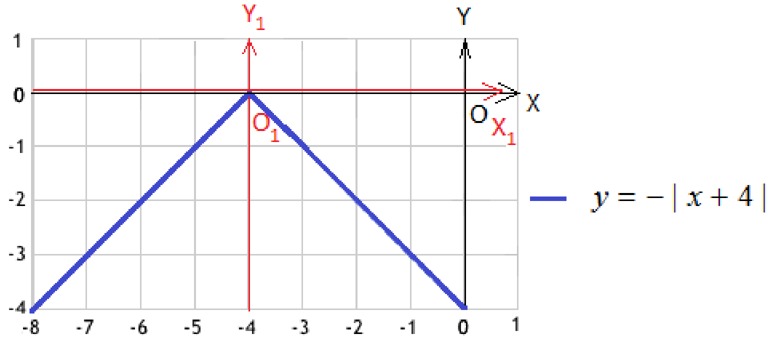

Рис. 6. График функции $y=-|x+4|$

В итоге получили «галку» (как в примере 1), сдвинутую на 4 единицы влево и зеркально отраженную относительно оси абсцисс O_1X_1. Таким образом, при построении графиков функций вида $y=kx+b$, где $k\neq 0$ и b – некоторые константы, использовали следующий алгоритм:

1-й шаг: приведение аналитического выражения функции к виду $y=|k|\cdot\left|x+\frac{b}{k}\right|$.

2-й шаг: преобразование прямоугольной системы координат путем сдвига ее на вектор $OO_1(-\frac{b}{k},0)$.

3-й шаг: построение в новой системе координат $X_1O_1Y_1$ графика функции $y_1=|k|\cdot|x_1|$. Для этого нужно

1) построить график функции $y_1=|k|\cdot x_1$ при $x_1\geq 0$;
2) отразить график функции $y_1=|k|\cdot x_1$ при $x_1\geq 0$ симметрично оси ординат O_1Y_1.

Для того чтобы сформулировать алгоритм построения графика функции $y-y_0=|k(x-x_0)+b|$, рассмотрим следующий пример.

Пример 6. Построить график функции $y-3=|2(x+1)-4|$.

Вновь переходим к новой системе координат путем сдвига старой на вектор $OO_1(-1,3)$. В новой системе координат $X_1O_1Y_1$ нам требуется построить график функции $y_1=|2x_1-4|$, алгоритм построения которого мы только что сформулировали. Преобразуя выражение $y_1=|2x_1-4|$, получаем $y_1=|2x_1-4|=|2(x_1-2)|=|2|\cdot|x_1-2|=2|x_1-2|$. Опять делаем преобразование системы координат. Теперь сдвигаем систему координат $X_1O_1Y_1$ на вектор $O_1O_2(2,0)$ и переходим к системе координат $X_2O_2Y_2$. И только сейчас в системе координат $X_2O_2Y_2$ строим график функции $y_2=2|x_2|$. С методом построения последнего графика мы уже знакомы (см. пример 4).

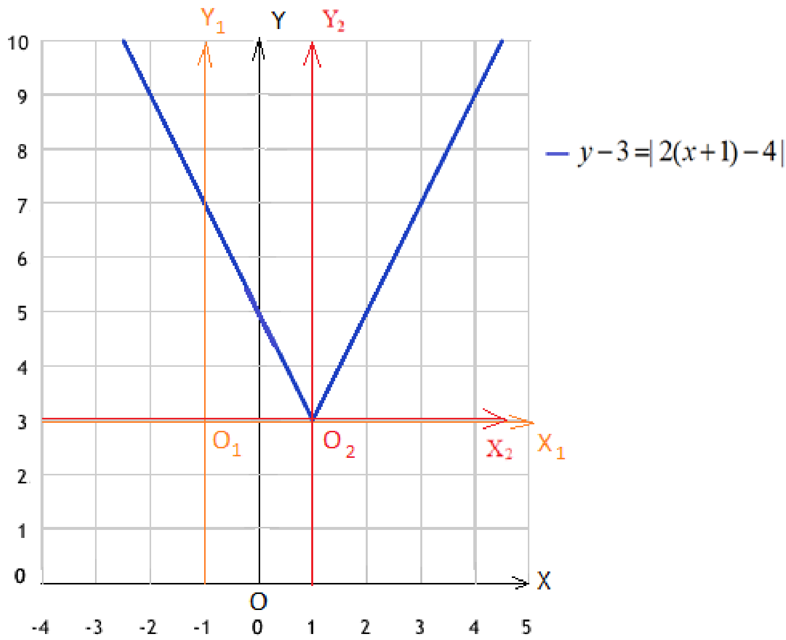

Рис. 7. График функции $y-3=|2(x+1)-4|$

Замечание 3. Отметим, что в примере 6 дважды переходили к новой системе координат.

Следовательно, алгоритм построения графика функции $y-y_0=|k(x-x_0)+b|$ следующий.

1-й шаг: переход к новой системе координат.

2-й шаг: построение в новой системе координат $X_1O_1Y_1$ графика функции $y_1=|kx+b|$. Алгоритм построения последнего графика сформулирован ранее.

Рассмотрим теперь методы построения графиков функций вида $y=k|x|+b$ и $y-y_0=k|x-x_0|+b$. Перейдем сразу к рассмотрению примеров.

Пример 7. Построить график функции $y=|x|+3$.

Для построения данного графика функции преобразуем прямоугольную систему координат, сдвинув ее на вектор $OO_1(0,3)$, и построим в новой системе координат $X_1O_1Y_1$ график функции $y_1=|x_1|$.

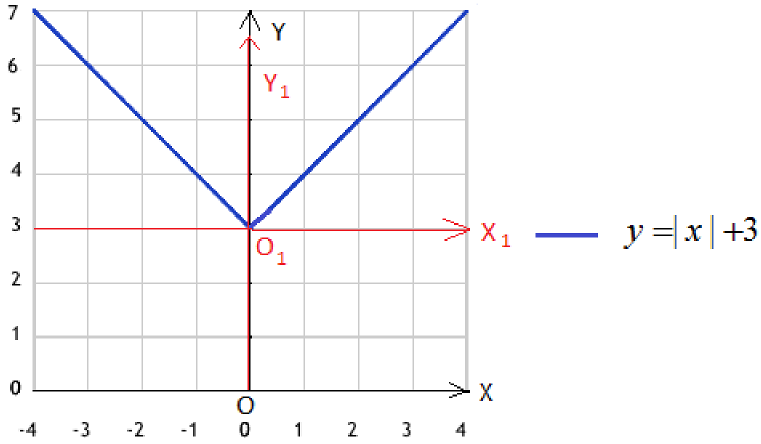

Рис. 8. График функции $y=|x|+3$

В итоге графиком функции $y=|x|+3$ является «галка», полученная в примере 1, но поднятая на три единицы вверх.

Замечание 4. При построении данного графика можно не использовать преобразование системы координат, а поступить по-другому: сначала построить график функции $y=|x|$, а затем поднять его на три единицы вверх. Так можно поступить, так как коэффициент в уравнении $y=|x|+b$ отвечает за сдвиг графика $y=|x|$ по оси OY вниз либо вверх. Если $b>0$, то **сдвиг вверх**, а если $b<0$, то **сдвиг вниз.**

Пример 8. Построить график функции $y=-|x-2|-1$.

Вновь построение графика данной функции начнем с преобразования прямоугольной декартовой системы координат, сдвинув ее на вектор $OO_1(2,1)$. В новой системе координат $X_1O_1Y_1$ с началом в точке $O_1(2,1)$ строим график функции $y_1=-|x_1|$.

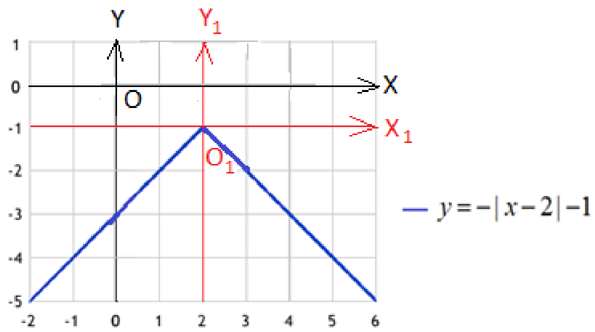

Рис. 9. График функции $y=-|x-2|-1$

Графиком функции $y=-|x-2|-1$ является «галка», аналогичная той, которая была построена в примере 5, только в этом случае вершина ее находится в точке $O_1(2,1)$. В примере 5 вершина «галки» была в этой же точке O, но координаты точки O_1 были другие.

Пример 9. Построить график функции $y=2|x-3|+1$.

Для построения графика данной функции вновь производим преобразование прямоугольной декартовой системы координат, сдвинув ее на вектор $OO_1(3,1)$, а затем уже в новой системе координат $X_1O_1Y_1$ строим график функции $y_1 = 2|x_1|$.

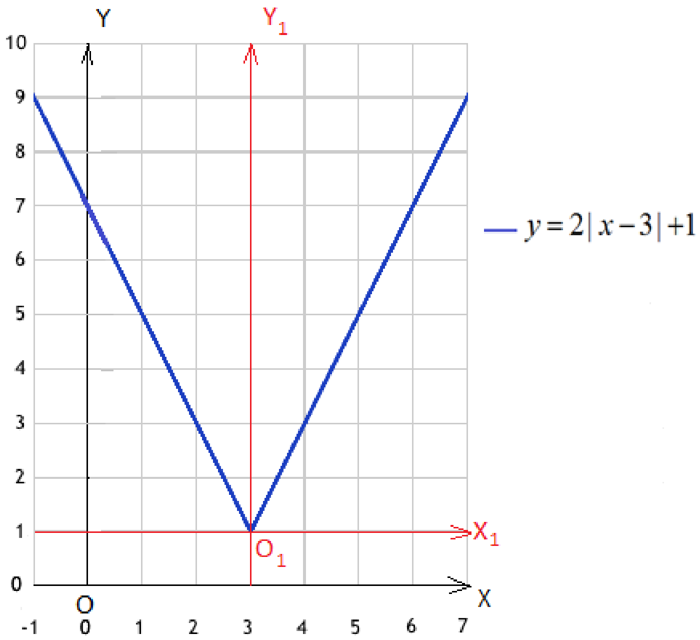

Рис. 10. График функции $y = 2|x-3|+1$

Отметим, что графиком функции $y = 2|x-3|+1$ вновь является «галка» с вершиной в точке $O_1(3,1)$ и ветвями, наклоненными ближе к оси ординат Oy. Сформулируем теперь алгоритм построения графиков функций вида $y = k|x|+b$.

1-й шаг: преобразование системы координат путем сдвига на вектор $O_1(0,b)$.

2-й шаг: построение в новой системе координат $X_1O_1Y_1$ графика функции $y_1 = k|x_1|$ по уже известному нам алгоритму.

Метод построения графиков функций вида $y - y_0 = k|x-x_0|+b$ заключается в следующем.

1-й шаг: преобразование системы координат.

2-й шаг: построение в новой системе координат $X_1O_1Y_1$ графика функции $y_1 = k|x_1|+b$ по ранее описанному алгоритму.

Теперь перейдем к рассмотрению функций вида $y = |k|x|+b|$ и $y - y_0 = |k|x-x_0|+b|$ и построению графиков этих функций.

Пример 10. Построить график функции $y = |3|x|-1|$.

Для построения графика данной функции рассмотрим цепочку функций:

1) $y = 3|x|$;
2) $y = 3|x|-1$;
3) $y = |3|x|-1|$.

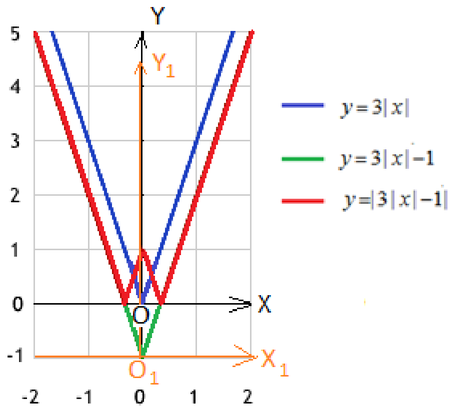

Рис. 11. График функции $y=|3|x|-1|$

С построением графиков под пунктами 1) и 2) мы уже знакомы. Для построения пункта 3) достаточно отразить нижнюю часть графика функции $y=3|x|-1$ (то есть часть, лежащую ниже ось абсцисс) зеркально относительно оси Ox. Это нужно сделать, так как значение $|f(x)|$ всегда неотрицательное (см. замечание 2). Таким образом, алгоритм построения графиков функций вида $y=|k|x|+b|$ можно сформулировать следующим образом.

1-й шаг: построение графика функции $y=k|x|+b$ по уже известному нам алгоритму.

2-й шаг: зеркальное отражение относительно оси абсцисс нижней части (той части, которая лежит ниже оси абсцисс) графика функции $y=k|x|+b$.

Замечание 5. Графики такого типа будем называть «w-й галкой».

Пример 11. Построить график функции $y-2=|3|x+1|-4|$.

Построение графика этой функции следует вновь начать с преобразования прямоугольной системы координат. Сдвинем прямоугольную систему координат XOY на вектор $OO_1(-1,2)$. Получим новую систему координат $X_1O_1Y_1$ с центром в точке O_1. В этой новой системе координат далее будем строить график функции $y_1=|3|x_1|-4|$, с алгоритмом построения которого мы уже знакомы.

Чтобы построить график функции $y_1=|3|x_1|-4|$, построим последовательно графики следующих функций:

1) $y_1=3|x_1|$ – это «галка» с центром в точке O_1 и ветками, сдвинутыми к оси ординат O_1y_1;

2) чтобы построить график функции $y_1=3|x_1|-4$, нужно предыдущий график $y_1=3|x_1|$ сдвинуть на четыре единицы вниз;

3) для построения данного графика $y_1=|3|x_1|-4|$ необходимо зеркально отразить нижнюю часть графика функции $y_1=3|x_1|-4$ относительно оси абсцисс O_1x_1.

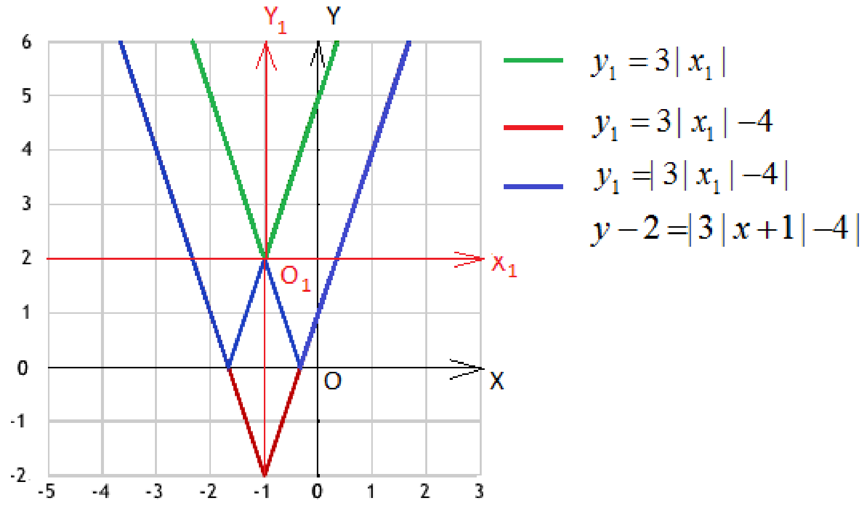

Рис. 12. График функции $y-2=|3|x+1|-4|$

В итоге приходим к следующему алгоритму построения графиков функций вида $y-y_0=|k|x-x_0|+b|$.

1-й шаг: переход к новой системе координат.

2-й шаг: построение в новой системе координат $X_1O_1Y_1$ графика функции $y_1=|k|x_1|+b|$ по уже известной нам схеме.

Стоит заметить, что порой графический способ является единственным приёмом решения некоторых задач. Поэтому овладение навыками построения графиков будет полезным при выполнении целого спектра задач. Более того, геометрическая интерпретация удобна и доступна для понимания некоторых алгебраических задач, которые перестают быть абстрактными и отвлеченными. Таким образом, формируется геометрическое мышление, т. е. развивается умение оперировать различными геометрическими объектами, интерпретировать алгебраические задачи геометрически.

Библиографический список

1. Морозова В. Д. Введение в анализ. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005.
2. Сборник задач по математике для втузов / под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2001.
3. Ильин В. А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1982.
4. Казанджан Э. П. Исследование функций и построение графиков. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1995.
5. Ильичев А. Т., Кузнецов В. В., Фаликова И. Д. Графики элементарных функций. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
6. Казанджан Э. П. Графики. Сборник задач с примерами решений по исследованию функций и построению графиков. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.

Faniya Akhmetova,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow Bauman State Technical University, Moscow
dobrich2@mail.ru
Anastasiya Golovina,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow Bauman State Technical University, Moscow
nastya_gm@mail.ru

The method of linear functions curves plotting containing the modulus sign

Abstract. The article contains a brief presentation of theoretical information in the field of functional dependence of elementary functions. Practical methods that allow you to draw sketches of functions' curves of different complexity levels are demonstrated here. In particular, the plotting of functions'curves containing modulus usually causes considerable difficulties for university entrants and first-year students. The purpose of this work is to give algorithm for plotting curves of functions containing moduli to which linear transformations are applied. The main attention is paid to the methods of plotting, and not to the study of certain types of functions.
Key words: single-valued and multivalued functions, linear transformations, modulus, function curves.

References

1. Morozova, V. D. (2005). *Vvedenie v analiz*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow (in Russian).
2. Efimov, A. V. & Pospelov, A. S. (eds.) (2001). *Sbornik zadach po matematike dlja vtuzov*, Izd-vo fiziko-matematicheskoj literatury, Moscow (in Russian).
3. Il'in, V. A. & Poznjak, Je.G. (1982). *Osnovy matematicheskogo analiza. Ch. 1*, 4-e izd., pererab. i dop., Nauka, Moscow (in Russian).
4. Kazandzhan, Je. P. (1995). *Issledovanie funkcij i postroenie grafikov*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow (in Russian).
5. Il'ichev, A. T., Kuznecov, V. V. & Falikova, I. D. (2004). *Grafiki jelementarnyh funkcij*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow (in Russian).
6. Kazandzhan, Je. P. (2004). *Grafiki. Sbornik zadach s primerami reshenij po issledovaniju funkcij i postroeniju grafikov*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	10.05.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	11.05.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	11.05.17	Опубликована *Published*	30.05.17

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru