Борисова Ирина Михайловна,
Заместитель директора по учебно-воспитательной работе, учитель математики, МОУ гимназия № 14, г. Волгоград
irmihborisova@mail.ru

Система методических приемов по обучению методу замены множителей при решении неравенств как средство формирования учебно-познавательной компетентности обучающихся

Аннотация. *Статья посвящена вопросам освоения учащимися метода замены множителей при решении неравенств в курсе основной и средней школы. Автор предлагает также приложения для организации работы по решению неравенств с обучающимися.*

Ключевые слова: *неравенства, метод замены множителей, монотонные функции, знакопостоянный множитель.*

Федеральные государственные образовательные стандарты второго поколения однозначно определили ориентацию на формирование компетенций обучающихся. В настоящее время в формуле результата образования акцент с «знаю, что» перенесен на «знаю, как», т.е. формирование компетентного, умеющего пользоваться полученным теоретическим знанием человека.

Современная жизнь ставит человека в чрезвычайно изменчивые условия, требует от него решения все новых и новых задач. Эффективное решение этих задач невозможно без определенного опыта деятельности по поиску подходов к проблеме, проигрыванию ситуаций в уме, прогнозированию последствий тех или иных действий, проведению анализа результатов, поиску новых подходов. Этот опыт надо приобретать еще в школе.

Материал школьного предмета предусматривает решение познавательных задач и не может предвидеть весь спектр будущих задач, с которыми придется столкнуться выпускнику. Это означает, что в школе обучающихся следует подготовить не только к поступлению в высшие учебные заведения, но и к успешному продолжению их образования. Поэтому учитель математики как учитель-предметник должен организовать деятельность обучающихся на учебных занятиях таким образом, чтобы каждый из них постигал новую высоту в познании; отбирать и классифицировать математическое содержание каждого занятия, вовлекать учащихся в исследовательскую деятельность на уроке и вне его. Все это способствует не только накоплению обучающимися математических знаний и отработке умения решать задачи различных уровней сложности, но и сотрудничеству учителя и учеников по исследованию математических задач.

Каждый человек от природы наделен склонностью к познанию и исследованию окружающего мира. Обучение должно быть всегда организованно так, чтобы совершенствовать эту склонность, способствовать развитию соответствующих умений и навыков, создавать условия рационального применения сформированных умений и навыков.

Как правило, большинство трудностей у учащихся возникает в связи с отсутствием информации по анализу эффективности решения конкретной задачи тем или иным методом, отсутствием навыков творческого применения своих знаний. Ученик решает ее «традиционным» способом, который, сопряжен с большим объемом работы по преодолению технических трудностей. Обучающиеся испытывают затруднения в переносе и применении знаний и умений одной темы математического курса в решении задач другой темы. Так формируемые в течение всего курса алгебры и математического анализа знания по теме «Свойства функций» не всегда находят свое рациональное применение учащимися при решении задач. Речь идет о методе замены множителей при решении неравенств. Освоение и умение его применять позволяет учащимся перевести целый класс неравенств из разряда «сложных» в разряд относительно простых.

Основная идея этого метода состоит в следующем.

Любое неравенство приводимо к виду

$$\frac{M_1 * M_2 * \dots M_n}{M_1^{/} * M_2^{/} * \dots M_k^{/}} V 0 \qquad (1)$$

где символ «*V*» означает один из знаков неравенства.

Замена любого множителя M на совпадающий с ним по знаку в области определения неравенства множитель L (и имеющий в этой же области те же корни, что и заменяемый множитель) приводит к равносильному неравенству в указанной области определения. Важно заметить, что замена множителя осуществляется только при условии приведения неравенства к виду (1). Основная часть замен обоснована определением строго монотонной функции.

Освоение этого метода начинается задолго до выпускных экзаменов. Впервые с понятием монотонности функции учащиеся знакомятся в 7 классе при изучении темы «Линейная функция», когда речь идет о знаке углового коэффициента. Здесь не дается определения возрастающей и убывающей функции, а отрабатывается навык «узнавания» по графику.

В 8 классе на уроках по теме «Квадратичная функция» с учащимися отрабатывается навык определения промежутков возрастания и убывания квадратичной функции, нахождения области значений без построения графика.

При изучении темы «Решение квадратных неравенств» учащиеся осваивают алгоритм решения квадратного неравенства, первый шаг которого – нахождение корней квадратного трехчлена. Если корни не существуют, то решать неравенство следует исходя из геометрической интерпретации.

Учащиеся знакомятся с теоремой о решении квадратного неравенства при отрицательном дискриминанте квадратного трехчлена. Вводится понятие «знакопостоянный множитель неравенства».

Задание «Решить неравенство $(2x^2-x+4)(1{,}2x-6)\geq 0$ » требует от обучающихся 8 класса нестандартного подхода к решению – умеют решать линейные неравенства и квадратные неравенства, методом интервалов не владеют. Акцентирование внимания на имеющихся знаниях и умениях и организация совместной деятельности учащихся (в парах или группах) по поиску решения приводят к выводу о необходимости нахождения множества значений первого множителя. После решения этого неравенства учащиеся в группах (в парах) составляют неравенства, левая часть которых содержит три множителя (два - квадратные трехчлены, один - линейный) со следующими условиями.

Таблица 1

Условия для составления неравенств

№ неравенства	1 множитель ax^2+bx+c	2 множитель $a_1x^2+b_1x+c_1$
1	Принимает положительные значения	Принимает отрицательные значения
2	Принимает положительные значения	Принимает положительные значения
3	Принимает отрицательные значения	Принимает отрицательные значения

Анализ решения неравенств приводит к выводу:

«Множитель (ax^2+bx+c) при $D<0$, $a>0$ в неравенстве $(ax^2+bx+c)\ M\ V\ 0$, где *M-* множитель, можно заменить на 1.

Множитель (ax^2+bx+c) при $D<0$, $a<0$ в неравенстве $(ax^2+bx+c)\ M\ V\ 0$, где *M-* множитель, можно заменить на (-1).»

Задание: «Решить неравенства: а) $(5x^2-7x+6)(x^2+6x-7)\leq 0$,

б) $(x^2-10x+16)(-x^2+8x-17)>0$,

в) $(3x^2-10x+3)(2x^2+8x+11)(2x-4x^2-1)<0$.»

закрепляет навык замены знакопостоянных множителей.

Следующий класс знакопостоянных множителей связан с понятием модуль числа.

1. Если $|f|+|g|\neq 0$, то в неравенстве $(|f|+|g|)MV0$ множитель $(|f|+|g|)$ можно заменить на 1.

2. Если $g>0$, то в неравенстве $(|f|+g)MV0$ множитель $(|f|+g)$ можно заменить на 1.

Отработка применения этих замен происходит в ходе выполнения задания: «Решите неравенства:

а) $3(8-5x)-7(6x+21)>0$,

б) $\frac{5}{8}(3(8-5x)-7(6x+21))>0$,

в) $(|x|+7)(3(8-5x)-7(6x+21))>0$,

г) $(|5x-3|+x^2+4)(3(8-5x)-7(6x+21))>0$.»

В ходе обсуждения учащиеся обращают внимание на то, что неравенства содержат в левой части одинаковый множитель. Кроме того отмечают, что неравенство (б) получено из (а) умножением его на положительное число, следовательно, получено равносильное ему неравенство. Тогда множество решений неравенства (б) совпадает со множеством решений неравенства (а). Решение неравенств (в) и (г) учащимся предложено обсудить в группах. Неравенство (б) помогает обучающимся поиску решения в направлении знака множителей $(|x|+7)$ и $(|5x-3|+x^2+4)$. Закрепление этого навыка учащиеся отрабатывают дома при составлении подобных неравенств, т.е. подготовкой тренажера (приложение №1), который находит свое применение на уроках обобщения и повторения. В ходе сравнения с нулем выражений $|f|$ и f^2, заключаем, что знак $|f|$ совпадает со знаком f^2. Замечаем, что $|f|$ и f^2 не являются знакопостоянными (положительными или отрицательными). Приходим к выводу, что заменять можно и незнакопостоянные множители.

Так, $\sqrt{f}$ в области допустимых значений совпадает со знаком f, а $\sqrt{|f|}$ совпадает со знаком f^2.

Разность $(|f|-g)$, где $g\geq 0$ и разность (f^2-g^2) имеют один и тот же знак. Заметим, что $f^2-g^2=(|f|-g)(|f|+g)$. Следовательно, имеет место следующая замена: «Множитель $|f|-g$ (где $g\geq 0$) в неравенстве $(|f|-g)MV0$ можно заменить на f^2-g^2, т.е. на $(|f|-g)(|f|+g)$.» Т.е. разность неотрицательных чисел заменяем на разность их квадратов. Эти замены целесообразно вводить в 9 классе, когда учащиеся освоили метод интервалов.

Изучение темы «Числовые функции» в 9 классе расширяет возможности метода замены множителей при решении неравенств. Знание определений возрастающей и убывающей функции позволяет ввести следующие утверждения.

1.Если $f(x)$ – строго возрастающая функция, то $(a - b)$ совпадает со знаком $(f(a)-f(b))$, где $a\in D(f)$, $b\in D(f)$.

2. Если $f(x)$ строго убывающая функция, то $(a-b)$ совпадает со знаком $(f(b)-f(a))$, где $a\in D(f)$, $b\in D(f)$.

Эти утверждения позволяют ввести две основные замены (*):

1. Множитель $(f(a)-f(b))$, где $f(x)$- строго возрастающая функция, в неравенстве $(f(a)-f(b))MV0$ можно заменить в области допустимых значений на $(a-b)$.

2. Множитель $(f(a)-f(b))$, где $f(x)$- строго убывающая функция, в неравенстве $(f(a)-f(b))MV0$ можно заменить в области допустимых значений на $(b-a)$.

Тема «Свойства числовых функций» зачастую изучается учащимися формально, они не видят ее применения. Метод замены множителей уже в 9 классе демонстрирует обучающимся широкие возможности свойств функций в решении конкретных задач, а именно, решении неравенств.

При изучении темы «Функции вида y=$\sqrt[n]{x}$, их свойства и графики» вводятся следующие замены множителей (**).

1. **($\sqrt{f}$ - g) при $g≥0$ можно заменить ОДЗ на (f-g^2), а (g-$\sqrt{f}$) при $g≥0$ можно заменить в ОДЗ на (g^2-f).**

2. **$\sqrt{f}-\sqrt{g}$ в ОДЗ можно заменить на (f-g).**

3. **$\sqrt{|f|}-\sqrt{|g|}$ можно заменить на (f-g)(f+g).**

Расширяя круг функций, с которыми знакомятся старшеклассники, формулируются новые замены множителей.

При изучении показательной функции, опираясь на основные замены (*), учитывающие характер монотонности функции, вводятся такие замены множителей (***) при решении неравенств:

1. **(a^f -a^q) на (f-q)(a-1);**

2. $\frac{a^{f1}-a^{g1}}{a^{f2}-a^{g2}}$ **на** $\frac{f_1-g_1}{f_2-g_2}$.

Следующие замены основаны на применении множества значений показательной функции:

1. **a^f на 1;**
2. **a^f +|g| на 1;**
3. **a^f +$\sqrt{g}$ на 1 при $g≥0$;**
4. **a^f +g на 1 при $g≥0$.**

Изучение логарифмической функции и решение логарифмических неравенств позволяет ввести замены с логарифмической функцией. Имея навык работы с показательными неравенствами, обучающиеся могут самостоятельно определить замену множителей в неравенствах, полученную из (*) на основании монотонности логарифмической функции, а именно, ($\log_a f$ - $\log_a g$) на (f-g)(a-1) с учетом ОДЗ.

Далее проводится работа с ($\log_a f + \log_a h$); $\log_a f + \log_a h= \log_a (fh)$;

$\log_a f + \log_a h= \log_a (fh)- \log_a 1$, т.е.

вводится следующая замена множителей (****) при решении неравенств:

($\log_a f + \log_a h$) на (fh-1)(a-1) с учетом ОДЗ.

Полагая в первой замене, что $q=1$, имеем $\log_a f- \log_a 1= \log_a f-0= \log_a f$, т.е. $\log_a f$ можно заменить с учетом ОДЗ при решении неравенств на (f-1)(a-1). Делая ссылку на учет области определения и проводя аналогичную работу, получаем замены множителей (*****):

($\log_a f$ - g) на (f- a^q)(a - 1),

($\log_a f$ + g) на (fg^a - 1)(a - 1),

($\log_a f$ - 1) на (f - a)(a - 1).

Применение замен множителей (****) и (*****), основанных на свойствах логарифмической функции, отрабатывается на семинарских занятиях.

Содержание курса математики позволяет учащимся отрабатывать навык решения одной и той же задачи, искать пути решения проблемы различными способами. Обучение методу замены множителей при решении неравенств позволяет на примере конкретной темы школьного курса математики от «знаю, что» в традиционном подходе к обучению (знаю свойства числовых функций) перейти к «знаю, как» в компетентностном подходе (знаю, как применить свойства числовых функций при решении конкретных задач). Школьный предмет «Математика» предоставляет широкие возможности личностного развития учащихся. Знания в курсе математики должны рассматриваться не как самоцель, а как средство развития мышления учащихся, творческих способностей и мотивов деятельности.