ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Линейная комбинация функций, содержащих знак модуля, и методика построения их графиков // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – Специальное приложение к № 6 (июнь). – 0,2 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170138.htm.

ART 170138 **УДК 372.851**

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Головина Анастасия Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nastya_gm@mail.ru

Линейная комбинация функций, содержащих знак модуля, и методика построения их графиков

Аннотация. *В работе предлагается методика изложения темы «Графики линейных комбинаций функций, содержащих знак модуля». Кратко рассматриваются теоретические сведения в области функциональной зависимости элементарных функций. Детально разобраны графики функций, заданных в виде суммы или разности модулей линейных функций. Продемонстрированы практические методы, позволяющие выполнить построение эскизов графиков функций различного уровня сложности. Приведены примеры типовых задач, необходимые для совершенствования навыков. Цель статьи – дать систематизированное изложение методов построения графиков функций с модулем. При этом главное внимание уделяется методам построения графиков, а не изучению отдельных видов функций.*
Ключевые слова: *линейная комбинация функций, сумма модулей, разность модулей, графики функций.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Ранее в статье [1] была изложена методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля. Усложним задачу. Рассмотрим графики функций, заданных в виде суммы или разности нескольких функций, также содержащих знак модуля. Приведем некоторые теоретические сведения из [2], необходимые для дальнейшего изложения.

Определение. Функцией называется закон (соответствие или правило) f, по которому каждому элементу x из множества X ставится в соответствие единственный элемент y из множества Y.

Иногда говорят короче: однозначная функция – это закон отображения множества X на множество Y. Множество X называют обычно областью определения функции, а множество Y – множеством значений функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется однозначной, если каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции.

Определение. Множество значений x, при которых функция $y = f(x)$ определена (существует), называется областью определения функции.

Для обозначения области определения функции обычно используют обозначение Df или $D(f)$.

Определение. Множеством значений функции называют все значения, которые принимает переменная y.

Для обозначения множества значений функции обычно используют символ Ef или $E(f)$.

Обобщением понятия однозначной функции является многозначная функция, которая допускает наличие нескольких значений функции для одного аргумента.

Определение. Многозначной функцией называется закон (соответствие или правило) f, по которому хотя бы одному элементу x из множества X ставится в соответствие более одного значения y из множества Y.

Функция или функциональная зависимость может быть задана различными способами: таблицей, аналитически или графически. Часто используется аналитический способ задания функции (т. е. через формулу, устанавливающую зависимость между переменными x и y).

Под графиком функции будем понимать множество точек плоскости XOY, прямоугольные декартовые координаты которых x и y удовлетворяют уравнению $y = f(x)$. Напомним, что ось Ox в прямоугольной декартовой системе координат называется осью абсцисс, а ось Oy – осью ординат.

По графику функции можно определить ее область определения и область значения. Для нахождения области определения нужно спроектировать график функции на ось абсцисс, а для нахождения области значений функции – на ось ординат.

Так как целью статьи является не просто рассмотрение функций, а построение графиков функций, содержащих знак модуля, введем это понятие.

Определение. Модулем числа называется выражение:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

Как видно из определения, модуль всегда является положительной величиной.

Пользуясь определением модуля, можно записать следующие равенства:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0, \\ -f(x), f(x) < 0. \end{cases} \quad f(|x|) = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0, \\ f(-x), f(x) < 0. \end{cases}$$

Замечание 1. Отметим, что функция $f(|x|)$ является четной – это легко проверить. Действительно, $f(|x|) = f(|-x|)$. Следовательно, ее график симметричен относительно оси ординат. Это свойство поможет нам при построении графика функции $f(|x|)$.

Замечание 2. Функция $|f(x)|$ неотрицательна.

Следовательно, график данной функции расположен не ниже оси абсцисс. Данным свойством также будем пользоваться при построении графиков.

Методы построения графиков функций, заданных в виде суммы или разности нескольких линейных функций, содержащих знак модуля

Методы построения таких графиков в корне отличаются от методов, описанных в [3]. Сформулируем вначале общий алгоритм построения графиков линейных комбинаций функций с модулем, а затем рассмотрим его применение на конкретных примерах.

Рассмотрим две функции вида: $y = |x-a| + |x-b|$, $y = |x-a| - |x-b|$.

<u>1-й шаг</u>: разобьем числовую ось на промежутки точками, в которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль.

2-й шаг: в каждом из полученных промежутков раскроем модуль с нужным знаком и выпишем аналитическое представление функции для каждого из промежутков.

3-й шаг: построим в каждом из промежутков график соответствующей функции.

Рассмотрим случай $a < b$, тогда числовая ось разобьется на следующие промежутки: $(-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, +\infty)$. Разберем первую функцию, представленную в виде суммы двух модулей: $y = |x-a| + |x-b|$.

При $x < a$, $x - a < 0$, $x - b < 0$, следовательно, функция $y = |x-a| + |x-b|$ примет вид $y = a - x + b - x = -2x + (a+b)$. Графиком данной функции является прямая с угловым коэффициентом $k = -2$.

При $a < x < b$, $x - a > 0$, $x - b < 0$, следовательно, функция $y = |x-a| + |x-b|$ примет вид $y = x - a + b - x = b - a$. Графиком данной функции является прямая, параллельная оси абсцисс.

При $x > b$, $x - a > 0$, $x - b > 0$, следовательно, функция $y = |x-a| + |x-b|$ примет вид $y = x - a + x - b = 2x - (a+b)$. Графиком данной функции является прямая с угловым коэффициентом $k = 2$.

Таким образом, запишем общий вид функции:

$$y = \begin{cases} -2x + (a+b), x < a, \\ b - a, a < x < b \\ 2x - (a+b), x > b \end{cases}$$

Приведем график первой разобранной функции (рис. 1).

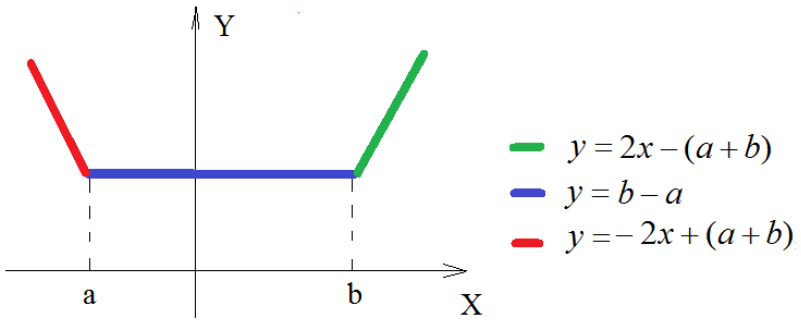

Рис. 1. График функции $y = |x-a| + |x-b|$

Замечание 3. График таких функций будем называть «корытом».

Замечание 4. В случае $a > b$ описанный метод построения графика остается прежним.

Проиллюстрируем изложенный метод на примере.

Пример 1. Построить график функции $y = |x-2| + |x+1|$.

Здесь $a = 2$, $b = -1$, $a > b$.

1-й шаг: имеем три промежутка: $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

2-й шаг: при $x < -1$, $x - 2 < 0$, $x + 1 < 0$, следовательно, функция $y = |x-2| + |x+1|$ примет вид $y = 2 - x - x - 1 = -2x + 1$.

При $-1 < x < 2$, $x - 2 < 0$, $x + 1 > 0$, следовательно, функция $y = |x-2| + |x+1|$ примет вид $y = 2 - x + x + 1 = 3$.

При $x>2$, $x-2>0$, $x+1>0$, следовательно, функция $y=|x-2|+|x+1|$ примет вид $y=x-2+x+1=2x-1$. В точке $x=-1$, $y=3$. В точке $x=2$, $y=3$.

<u>3-й шаг</u>: строим график (рис. 2) функции $y=\begin{cases}-2x+1, x<-1,\\ 3, -1\le x\le 2,\\ 2x-1, x>2.\end{cases}$

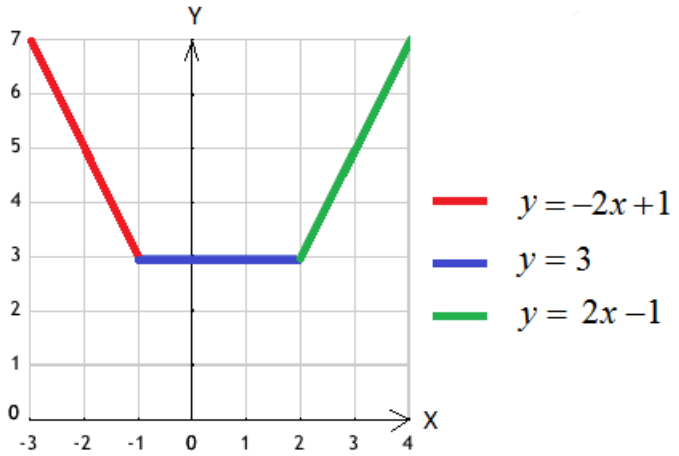

Рис. 2. График функции $y=|x-2|+|x+1|$

Рассмотрим теперь вторую функцию, представленную в виде разности двух модулей: $y=|x-a|-|x-b|$.

При $x<a$, $x-a<0$, $x-b<0$, следовательно, функция $y=|x-a|-|x-b|$ примет вид $y=a-x+x-b=a-b$. Графиком данной функции является прямая, параллельная оси абсцисс.

При $a<x<b$, $x-a>0$, $x-b<0$, следовательно, функция $y=|x-a|-|x-b|$ примет вид $y=x-a+x-b=2x-(a+b)$. Графиком данной функции является прямая с угловым коэффициентом $k=2$.

При $x>b$, $x-a>0$, $x-b>0$, следовательно, функция $y=|x-a|-|x-b|$ примет вид $y=x-a-x+b=b-a$. Графиком данной функции вновь является прямая, параллельная оси абсцисс.

Таким образом, запишем общий вид функции:

$$y=\begin{cases}a-b, x<a,\\ 2x-(a+b), a<x<b,\\ b-a, x>b.\end{cases}$$

Приведем график второй разобранной функции (рис. 3).

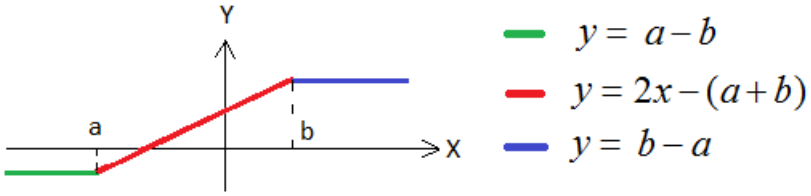

Рис. 3. График функции $y=|x-a|-|x-b|$

Замечание 5. Графики таких функций будем называть «ступеньками».

Замечание 6. В случае $a > b$ алгоритм построения графика остается прежним. Отличие заключается в том, что на промежутке (b, a) получим прямую с угловым коэффициентом $k = -2$. На двух остальных промежутках также будут прямые, параллельные оси абсцисс.

Проиллюстрируем изложенный метод на примере.

Пример 2. Построить график функции $y = |x-2| - |x+1|$.

Здесь $a = 2$, $b = -1$, $a > b$.

1-й шаг: имеем три промежутка на числовой оси: $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

2-й шаг: при $x < -1$, $x - 2 < 0$, $x + 1 < 0$, следовательно, функция $y = |x-2| - |x+1|$ примет вид $y = 2 - x + x + 1 = 3$. Графиком этой функции является прямая, параллельная оси абсцисс.

При $-1 < x < 2$, $x - 2 < 0$, $x + 1 > 0$, следовательно, функция $y = |x-2| - |x+1|$ примет вид $y = 2 - x - x - 1 = -2x + 1$. Графиком данной функции является прямая с угловым коэффициентом $k = -2$.

При $x > 2$, $x - 2 > 0$, $x + 1 > 0$, следовательно, функция $y = |x-2| - |x+1|$ на этом промежутке имеет вид $y = x - 2 - x - 1 = -3$. В точке $x = -1$, $y = 3$. В точке $x = 2$, $y = 3$.

3-й шаг: строим график (рис. 4) функции $y = \begin{cases} 3, x \le -1, \\ -2x + 1, -1 < x < 2, \\ -3, x \ge 2. \end{cases}$

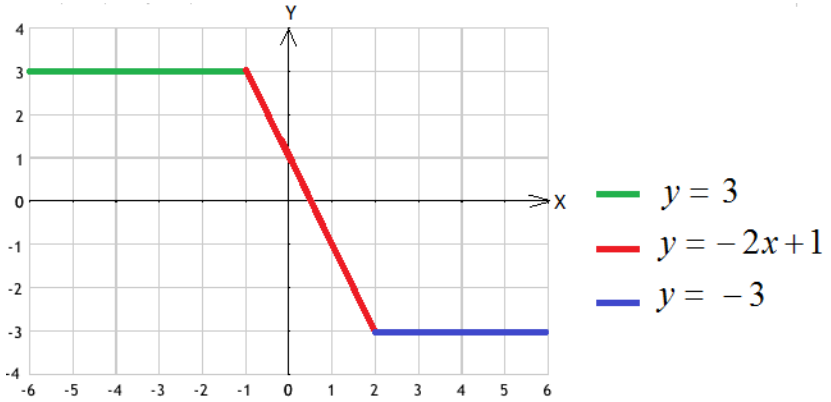

Рис. 4. График функции $y = |x-2| - |x+1|$

Овладение навыками построения графиков будет полезным при выполнении целого спектра задач. Более того, геометрическая интерпретация удобна и доступна для понимания некоторых алгебраических задач, которые перестают быть абстрактными и отвлеченными. Таким образом, формируется геометрическое мышление, т. е. развивается умение оперировать различными геометрическими объектами, интерпретировать алгебраические задачи геометрически.

Ссылки на источники

1. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – С. 159–170. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm.
2. Там же.
3. Там же.

Faniya Akhmetova,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
dobrich2@mail.ru
Anastasiya Golovina,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
nastya_gm@mail.ru

Linear combination of functions containing modulus sign and the method of their curves plotting

Abstract. The paper offers technique for presenting the topic " Linear combinations functions curves containing a modulus sign ". The article contains brief presentation of theoretical information in the field of functional dependence of elementary functions. The functions curves presented in the form of linear functions moduli sum or difference are analyzed in detail. The authors demonstrate practical methods that allow you to plot sketches of functions curves with different complexity levels. They give examples of typical tasks necessary for skills improving. The purpose of this work is to provide a systematic description of methods for functions with modulus curves plotting. At the same time, the main attention is paid to the methods of plotting, and not to the study of certain functions types.

Key words: linear combination of functions, the sum of moduli, the difference of moduli, functions curves.

References

1. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Metodika postroenija grafikov linejnyh funkcij, soderzhashhih znak modulja”, *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal “Koncept”,* № 5 (maj), pp. 159–170. Available at: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm (in Russian).
2. Ibid.
3. Ibid.

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	09.06.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	20.06.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	20.06.17	Опубликована *Published*	30.06.17

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2017
© Ахметова Ф. Х., Головина А. М., 2017