ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Кандаурова И. Е. Применение кривых второго порядка при решении задач с параметром при подготовке к ЕГЭ по математике // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – Специальное приложение к № 6 (июнь). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170131.htm.

ART 170131 **УДК 372.851**

Кандаурова Ирина Евгеньевна,
старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени Н. Э. Баумана», г. Москва
iriskan6591@mail.ru

Применение кривых второго порядка при решении задач с параметром при подготовке к ЕГЭ по математике

Аннотация. *Для повышения уровня математической подготовки школьников и абитуриентов, поступающих на технические и математические специальности университетов, на школьных уроках геометрии и в процессе подготовки к сдаче ЕГЭ по математике (профильный уровень) особое внимание следует уделять тем вопросам математики, без прочного знания которых невозможно успешное обучение в высшем учебном заведении. В данной статье на примерах решения задач с параметрами, предлагаемых в качестве задач повышенной трудности при сдаче ЕГЭ, демонстрируется одна из возможностей дифференцированного подхода в подготовке будущих студентов, которым предстоит среди прочих курсов освоить курс аналитической геометрии. Рассмотренные задачи показывают преимущества применения графического решения с помощью кривых второго порядка. Содержание статьи представляет интерес для учителей, старшеклассников, готовящихся к поступлению в вузы на специальности технического и математического направлений.*
Ключевые слова: *общее уравнение кривых второго порядка, эллипс, окружность, гипербола, парабола, метод выделения полных квадратов, графический метод решения задач с параметрами.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Применение графического метода при решении задач с параметром, в частности при решении задачи 18 Единого государственного экзамена по математике (профильный уровень), позволяет сделать решение более сжатым и алгоритмичным. Умение изобразить графически кривые второго порядка [1–3] часто помогает при решении различных задач с параметрами. В первую очередь это относится к задачам, связанным с определением количества решений систем уравнений в зависимости от параметра. Применение графического метода помогает либо полностью решить задачу, либо существенно упростить решение. И даже при аналитическом решении задачи понимание графического смысла исследуемых уравнений и умение изобразить соответствующий чертеж позволяет убедиться в правильности полученного решения. Отметим, что решение одной задачи различными способами, например аналитическим и графическим, дает возможность показать учащимся одну из эстетических граней математики. Ниже разобраны некоторые примеры решения задач с параметром графическим методом с применением кривых второго порядка.

Пример 1. Найдите число решений, которое имеет система уравнений в зависимости от параметра a: $\begin{cases} x^2+y^2=a \\ |x|+|y|=1 \end{cases}$.

Решение. Очевидно, что при отрицательном a первое уравнение системы решений не имеет, так как сумма квадратов не может быть отрицательной. При a первое уравнение имеет единственное решение $(0,0)$, которое не удовлетворяет второму уравнению.

Рассмотрим теперь случай $a > 0$. Применим графический метод. Все точки, являющиеся решениями первого уравнения, принадлежат окружности a центром в начале координат, радиуса $\sqrt{a}$. Решения второго уравнения лежат на квадрате, вершинами которого являются точки *(1;0), (0;1), (–1;0), (0;–1).* Изобразим эти линии на чертеже (рис. 1). Решениями системы будут все точки пересечения окружности и квадрата. Очевидно, что, пока радиус окружности мал, она квадрат не пересекает. Впервые она касается окружности сразу в четырех точках (одна из них – точка *A*). При этом радиус окружности равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. При увеличении радиуса окружность пересекает квадрат дважды на каждой его стороне, всего в восьми точках. Когда окружность пройдет через вершины квадрата (радиус равен 1), точек пересечения будет четыре, а при дальнейшем увеличении радиуса точек пересечения не будет.

Ответ:

при $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$ система не имеет решений;

при $a \in \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$ система имеет четыре решения;

при $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ система имеет восемь решений.

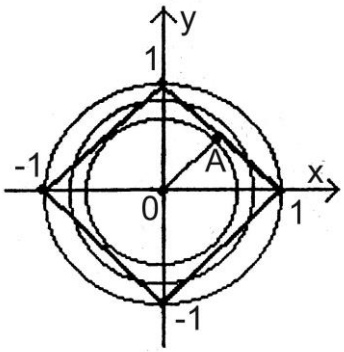

Рис. 1

Пример 2. Решить систему уравнений при всех значениях параметра a:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 = 4y + 2x - 5 \\ y^2 - x^2 = 9 + 2y - 2x \end{cases}.$$

Решение. Выделив полные квадраты, получим: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = a^2 \\ (y-1)^2 - (x-1)^2 = 9 \end{cases}$.

Первое уравнение описывает окружности с центром в точке $C(1;2)$ и радиусами, равными $|a|$. Второму уравнению соответствует гипербола с асимптотами $y = x$, $y = -x + 2$, центр гиперболы – точка с координатами $(1;1)$, ось – вертикальная прямая $x = 1$ (см. рис. 2).

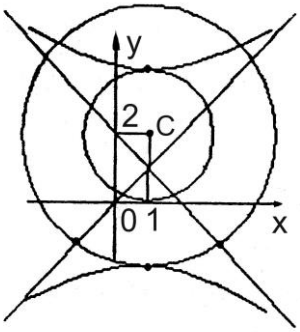

Рис. 2

При каждом значении параметра решением системы уравнений будут координаты общих точек окружности и гиперболы.

Пока окружность имеет радиус меньший 2, общих точек у гиперболы и окружности нет. Значит, при $|a|<2$ решений у системы нет.

При $|a|=2$ окружность касается верхней ветви гиперболы в точке (1;4), ее координаты дают единственное решение системы в этом случае.

При $2<|a|<4$ окружность пересекает одну ветвь гиперболы в двух точках. Исключив переменную x, для другой переменной получаем квадратное уравнение $2y^2-6y-a^2-4=0$. В данном случае подходит только один из его корней: $y=\frac{3+\sqrt{2a^2+17}}{2}$, при этом $x=1\pm\sqrt{\frac{a^2-9+\sqrt{2a^2+17}}{2}}$.

При $|a|=4$ к двум полученным выше решениям добавляется точка $(1;2)$, в которой окружность касается нижней ветви гиперболы.

При $|a|>4$ точек пересечения четыре.

Ответ:

при $a\in(-2;2)$ решений нет;

при $a=\pm2$ единственное решение *(1;4);*

при $a\in(-4,2)\cup(2;4)$ система имеет два решения:

$$\left(1\pm\sqrt{\frac{a^2-9+\sqrt{2a^2+17}}{2}};\frac{3+\sqrt{2a^2+17}}{2}\right);$$

при $a=\pm4$ – три решения *(–1;2);* $(1\pm\sqrt{17};5)$;

при $a\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$ – четыре решения

$$\left(1\pm\sqrt{\frac{a^2-9-\sqrt{2a^2+17}}{2}};\frac{3-\sqrt{2a^2+17}}{2}\right);\left(1\pm\sqrt{\frac{a^2-9+\sqrt{2a^2+17}}{2}};\frac{3+\sqrt{2a^2+17}}{2}\right).$$

Пример 3. Найти наименьшее значение a, при котором система имеет одно решение: $\begin{cases}(x-a\sqrt{3})^2+y^2-2y=0\\ \sqrt{3}|x|-y=4\end{cases}$.

Решение. Первое уравнение системы удобно представить в виде $(x-a\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$.

Это уравнение задает семейство окружностей постоянного радиуса, равного 1, причем центры окружностей лежат на прямой $y=1$ (рис. 3).

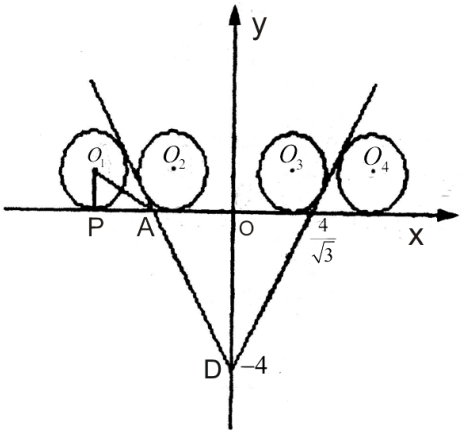

Рис. 3

Построим также график функции $y=\sqrt{3}\,|x|-4$. Система имеет единственное решение, когда окружность из описанного семейства пересекает его в единственной точке. Таких положений окружности четыре. По условию задачи надо выбрать из них такое, при котором значение параметра наименьшее. Очевидно, что это будет окружность, у которой абсцисса центра наименьшая – окружность с центром в точке O_1. Для нее $|a\sqrt{3}|=AP+AO=AP+\frac{4}{\sqrt{3}}$. Из треугольника AOD $\operatorname{tg}\angle AOD=\sqrt{3}$. Отсюда $\angle O_1AP=\frac{1}{2}\angle AOD=30^0$. Тогда из $\square O_1PA$ $PA=O_1P\operatorname{ctg}30^0=\sqrt{3}$. Итак, $|a\sqrt{3}|=\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}$. Поскольку положению центра O_1 соответствует $a<0$, то получаем $a=-\frac{7}{3}$.

Ответ: $a=-\frac{7}{3}$.

Пример 4. Решить неравенство $\log_{\frac{a^2+x^2}{2}} x\ge 1$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{a^2+x^2}{2}<1\\ x>0\\ x\le\frac{a^2+x^2}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{a^2+x^2}{2}>1\\ x\ge\frac{a^2+x^2}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+a^2<2\\ (x-1)^2+a^2\ge 1\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+a^2>2\\ (x+1)^2+a^2\le 1\end{cases}\end{array}\right.$$

На координатной плоскости $(x;a)$ первая система задает множество точек первого и четвертого координатных углов, одновременно лежащих внутри круга с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$ и вне круга с центром $(1;0)$ и радиусом 1. Вторая система – множество точек, одновременно лежащих вне первого круга, но находящихся во втором. Все решения исходного неравенства являются точками заштрихованной области (рис. 4).

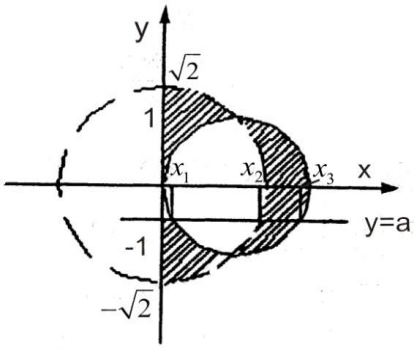

Рис. 4

Заметим, что горизонтальная прямая $y=a$ пересекает окружности в точках с абсциссами: $x_1=1-\sqrt{1-a^2}$, $x_2=\sqrt{2-a^2}$, $x_3=1+\sqrt{1-a^2}$.

Теперь, пользуясь рис. 4, несложно выписать ответ.

Ответ:

если $1\le|a|<\sqrt{2}$, то $0<x<\sqrt{2-a^2}$;

если $|a|<1$, то $0<x\le 1-\sqrt{1-a^2}$ или $\sqrt{2-a^2}<x\le 1+\sqrt{2-a^2}$;

если $|a|\ge\sqrt{2}$, то нет решений.

Пример 5. При каких значениях параметра a система имеет два различных решения $\begin{cases}(x-1)^2+(a-y)^2=2\\ \dfrac{x+|x|}{|y|-y}=1\end{cases}$?

Решение. Первому уравнению системы на плоскости (x,y) соответствует семейство окружностей радиуса $\sqrt{2}$, центры которых, имеющие координаты $(1;a)$, расположены на вертикальной прямой $x=1$ (рис. 5).

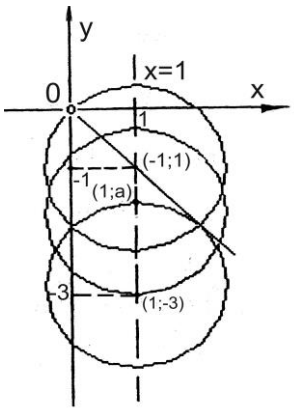

Рис. 5

Второе уравнение имеет смысл только при $y<0$ (в противном случае в знаменателе будет ноль), при $x\le 0$ это уравнение не имеет решений (левая часть обращается в ноль). При положительных значениях x решениями этого уравнения являются все пары чисел (x,y), связанные соотношением $x=-y$. Геометрической иллюстрацией этого соотношения является луч – биссектриса четвертого координатного угла, исключая начало координат. Представим себе, что окружность перемещается так, что ее центр движется по прямой $x=1$ (например, снизу вверх). Окружность и луч не имеют общих точек, пока при $a=-3$ окружность не коснется луча. В этой точке система имеет единственное решение. При движении окружности вверх по прямой окружность пересекает луч в двух точках, пока (при $a=-1$) одной из точек пересечения не станет начало координат, которое уже не принадлежит рассматриваемому лучу. При увеличении параметра a система имеет одно, а затем ни одного решения. Таким образом, два решения возможны лишь при $-3<a<-1$.

Ответ: $-3<a<-1$.

Пример 6. Исследовать количество решений системы уравнений в зависимости от значений параметра a. Выписать соответствующие решения.

$$\begin{cases} x^2+y^2=4y+2y-1 \\ x^2-y^2=a^2+2x-2y \end{cases}.$$

Решение. Чтобы представить, какие кривые на плоскости (x,y) задаются уравнениями, входящими в систему, выделим полные квадраты. В первом уравнении соберем слагаемые таким образом: $(x^2-4x+4)-4+(y^2-2y+1)=0$ или $(x^2-2)+(y-1)^2=2^2$. На плоскости этому уравнению соответствует окружность с центром в точке $C(2;1)$ и радиусом, равным 2.

Второе уравнение преобразуется так: $(x^2-2x+1)-(y^2-2y+1)=a^2$ или $(x-1)^2-(y-1)^2=a^2$.

Кривая на плоскости, соответствующая этому уравнению, зависит от значения параметра.

При $a=0$ уравнение имеет вид $(x-1)^2-(y-1)^2=0$. Представив как разность квадратов, получим $(y-x)(y+x-2)=0$. Уравнение выполняется, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, т. е. имеет место совокупность $\left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x+2 \end{array}\right.$. На плоскости это пара прямых, которые пересекаются в точке $(1;1)$. При каждом значении $a\ne 0$ второе уравнение исходной системы можно записать в таком виде: $\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-1)^2}{a^2}=1$.

На плоскости оно задает гиперболу, для которой рассмотренные прямые являются асимптотами. Расстояние от точек пересечения ветвей гиперболы с ее действительной осью $y=1$ равно $|a|$. Каждым двум значениям параметра, равным по модулю, но отличающимся знаком, соответствует одна и та же гипербола. Решением исходной системы являются координаты точек пересечения окружности и гиперболы, получающиеся для каждого конкретного значения параметра (прямых для $a=0$) (рис. 6).

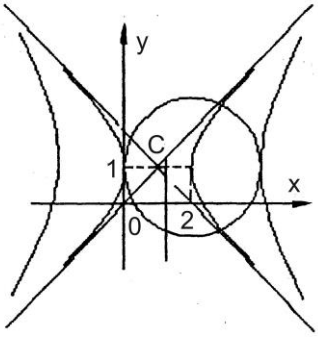

Рис. 6

Рассмотрим такое положение гиперболы, при котором правая ее ветвь касается окружности (это происходит при $|a|=3$), единственная общая точка гиперболы и окружности имеет координаты $(4;1)$.

Если $|a|>3$, то ветви гиперболы удаляются от центра, общих точек нет, а значит, нет решений у системы.

Пусть теперь $1<|a|<3$, окружность пересекает только правая ветвь гиперболы, точек пересечения две. Чтобы найти их координаты, исключим переменную y, вычтя второе уравнение исходной системы из первого. Получим квадратное уравнение $2x^2-6x+1-a^2=0$, его корни $x_1=\frac{1}{2}(3+\sqrt{7+2a^2})$ и $x_2=\frac{1}{2}(3-\sqrt{7+2a^2})$. Подходит только больший из них, а именно x_1. Ему соответствуют два значения y, которые получаются, если подставить x_1 в любое из исходных уравнений. Так, из первого уравнения следует $(y-1)^2=4-(x_1-2)^2=4-\left(\frac{3+\sqrt{7+2a^2}}{2}-2\right)^2$. После преобразований получим $y_1=1-\sqrt{\frac{4-a^2+\sqrt{7+2a^2}}{2}}$ и $y_2=1+\sqrt{\frac{4-a^2+\sqrt{7+2a^2}}{2}}$.

Итак, при $1<|a|<3$ два решения: $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$.

При $|a|=1$ левая ветвь гиперболы касается окружности в точке с координатами $(0;1)$, и есть еще две точки пересечения, их координаты $(3;1\pm\sqrt{3})$. При $0<|a|<1$ уже обе ветви гиперболы пересекают окружность, точек пересечения четыре: $(x_1;y_1)$, $(x_1;y_2)$, $(x_2;y_1)$, $(x_2;y_2)$.

Ответ:

при $a\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$ решений нет;

при $a\pm3$ единственное решение $(4;1)$;

при $a\in(-3;-1)\cup(1;3)$ два решения $\left(\frac{3+\sqrt{2a^2+7}}{2};1\pm\sqrt{\frac{4-a^2+\sqrt{2a^2+7}}{2}}\right)$;

при $a=\pm1$ три решения $(0;1)$; $\left(3;1\pm\sqrt{3}\right)$;

при $a \in (-1;1)$ четыре решения

$$\left(\frac{3+\sqrt{2a^2+7}}{2};1\pm\sqrt{\frac{4-a^2+\sqrt{2a^2+7}}{2}}\right),\ \left(\frac{3-\sqrt{2a^2+7}}{2};1\pm\sqrt{\frac{4-a^2-\sqrt{2a^2+7}}{2}}\right).$$

Пример 7. При каких значениях параметра система уравнений имеет единственное решение: $\begin{cases}9x^2+4y^2-36x=0\\ x^2+y^2-2ax=1-a^2\end{cases}$?

Решение. Выделяя полные квадраты и приводя уравнения к каноническому виду, получим:

$$\begin{cases}\dfrac{(x+2)^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1\\ (x-a)^2+y^2=1\end{cases}.$$

Первое уравнение описывает эллипс с центром в $(-2;0)$, с полуосями длины *2* и *3*. Второе уравнение определяет окружность радиуса, центр которой, точка $(a,0)$, перемещается по действительной оси. Требуется выяснить, при каком положении окружности она имеет с эллипсом только одну общую точку.

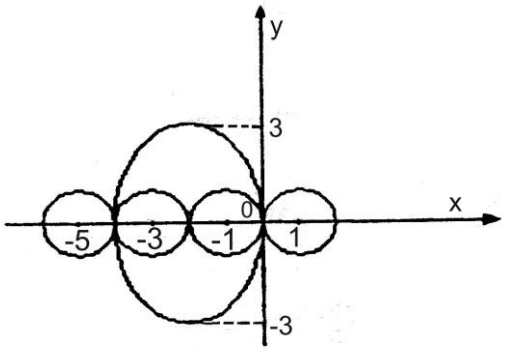

Рис. 7

На рис. 7 показаны все такие положения. Абсцисса центра такой окружности и есть требуемое значение параметра.

Ответ: система имеет единственное решение при $a \in \{-5;-3;-1;1\}$.

В качестве дополнительных задач для самостоятельного решения можно предложить следующие [4–6]:

1. Определить количество решений системы в зависимости от параметра:

$$\begin{cases}x^2+y^2=k^2\\ |x|+|y|=4\end{cases}.$$

2. Определить количество решений системы в зависимости от параметра:

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x+2y=k^2-2\\ |x-1|+|y+1|=2\end{cases}.$$

3. Определить количество решений системы в зависимости от параметра:

$$\begin{cases} x=\sqrt{y^2+4x-3} \\ |x-2|+|y|=p \end{cases}.$$

4. При каких значениях параметра система имеет два различных решения? Найти эти решения.

$$\begin{cases} (x+2a)^2+(y-a-2)^2=2 \\ x+|y|=0 \end{cases}.$$

5. Определить количество решений системы в зависимости от параметра:

$$\begin{cases} (x+2a+3)^2+(y-4a)^2=2 \\ y+|x|=4 \end{cases}.$$

6. При каких значениях параметра система уравнений имеет ровно 3 различных решения? Не имеет решений?

$$\begin{cases} 4x^2-y^2-8x+2y-13=0 \\ 4(x-a)^2+y^2-8y=0 \end{cases}.$$

7. Решить систему уравнений при всех значениях параметра a.

$$\begin{cases} x^2+y^2-a^2=-4y+2x-5 \\ y^2-x^2=4-2y+2x \end{cases}.$$

8. Определить количество решений системы в зависимости от параметра:

$$\begin{cases} (x+4a-1)^2+(y-2a)^2=2 \\ x+\dfrac{2y^2}{y+|y|}=0 \end{cases}.$$

Ссылки на источники

1. Канатников А. Н., Крищенко А. П. Аналитическая геометрия. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1998. – Вып. III. – 387 с.
2. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: ГИФМЛ, 1989. – 272 с.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 2005. – 224 с.
4. Шестаков С. А. Математика, ЕГЭ 2014. Задача С5. Задачи с параметром / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Изд-во МЦНМО, 2014. – 240 с.
5. Ященко И. В., Высотский И. Р. ЕГЭ 2013. Математика: самое полное издание вариантов заданий / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Астрель, 2013. – 110 с.
6. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, 2005. – 326 с.

Irina Kandaurova,
Senior Lecturer, Moscow NE Bauman State University, Moscow
Iriskan6591@mail.ru

Application of second-order curves for solving problems with parameter in preparation for the USE in mathematics

Abstract. To increase the level of mathematical preparation of schoolchildren and university entrants choosing technical and mathematical specialties of universities in school geometry lessons and in the process of preparing for the passing of the USE in mathematics (profile level), special attention should be given to those mathematical questions, without profound knowledge of which successful learning in higher educational institution would be impossible. In this article we give examples of solving problems with parameters. They are offered as increased difficulty problems when passing the USE. One of the differentiated approach possibilities of future students' preparation is demonstrated who will have to learn the analytical geometry course among other courses. The examined problems show the advantages of graphical solution application with the help of second-order curves. The content of the article may be interesting to teachers, high school students, who are

preparing to enter higher educational institutions for technical and mathematical specialties.

Key words: general equation of second-order curves, ellipse, circle, hyperbola, parabola, full squares apportionment method, graphical method for solving problems with parameters.

References

1. Kanatnikov, A. N. & Krishhenko, A. P. (1998). *Analiticheskaja geometrija*, Izd-vo MGTU im. Baumana, Moscow, vyp. III, 387 p. (in Russian).
2. Efimov, N. V. (1989). *Kratkij kurs analiticheskoj geometrii*, GIFML, Moscow, 272 p. (in Russian).
3. Il'in, V. A. & Poznjak, Je. G. (2005). *Analiticheskaja geometrija*, Nauka, Moscow, 224 p. (in Russian).
4. Shestakov, S. A. (2014). *Matematika, EGJe 2014. Zadacha S5. Zadachi s parametrom*, Izd-vo MCNMO, Moscow, 240 p. (in Russian).
5. Jashhenko, I. V. & Vysotskij, I. R. (2013). *EGJe 2013. Matematika: samoe polnoe izdanie variantov zadanij*, Astrel', Moscow, 110 p. (in Russian).
6. Gornshtejn, P. I., Polonskij, V. B. & Jakir, M. S. (2005). *Zadachi s parametrami*, Ileksa, Moscow, 326 p. (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Утёмовым В. В., кандидатом педагогических наук;
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

ISSN 2304-120X

www.e-koncept.ru

Поступила в редакцию *Received*	22.04.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	24.04.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	24.04.17	Опубликована *Published*	30.06.17

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2017
© Кандаурова И. Е., 2017