ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Обучение школьников различным способам решения задач с параметрами // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V7. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170161.htm.

ART 170161 **УДК 372.851**

Здоровенко Марина Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров
zdorovenko.s@mail.ru

Зеленина Наталья Алексеевна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров
sezel@mail.ru

Крутихина Марина Викторовна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров
krumarvik@mail.ru

Обучение школьников различным способам решения задач с параметрами

Аннотация. *Задача с параметром традиционно входит в контрольно-ельные материалы Единого государственного экзамена по математике и оценивается максимальным баллом. В то же время в школе по разным причинам таким задачам уделяется очень мало времени. Авторы, имеющие богатый опыт проверки работ ЕГЭ, на примере одной задачи, уровень сложности которой соответствует требованиям, предъявляемым к такого рода заданиям на ЕГЭ по математике в последние годы, показывают различные способы ее решения: аналитический (разные варианты), графический в системе* $(x; y)$ *и графический в системе* $(x; a)$*. Предложенные решения изложены подробно с указаниями типичных ошибок, которые допускают учащиеся. Приведены некоторые методические рекомендации, позволяющие более доступно организовать обучение школьников решению задач с параметрами.*
Ключевые слова: *задачи с параметрами, различные способы решения задач с параметрами, Единый государственный экзамен по математике, обучение математике.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Задачи с параметрами занимают в школьной математике особое место и всегда играли важную роль в процедурах конкурсного отбора, что вполне оправданно [1]. Умение решать такие задачи свидетельствует прежде всего о высокой математической культуре учащихся. С помощью задач с параметрами можно проверить знание основных разделов школьной программы, уровень логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности, умение обосновывать свои действия, аргументировать полученные выводы и в конечном итоге оформить получившееся решение в виде математически правильного, логически ясного и полного текста.

Однако практика показывает, что у большинства школьников и некоторой части учителей задачи с параметрами вызывают как минимум робость. Причин этого явления видится несколько. Одна из них – психологическая и/или предметная неготовность учителей включать такие задачи в материал урока. Особо остро эта проблема стоит перед выпускниками математических факультетов последних 10 лет, в учебных планах которых время на изучение элементарной математики существенно сокращено. Решению задач с параметрами на уроках математики уделяется мало внимания и потому, что в школь-

ных учебниках отсутствует система заданий данной тематики. Чаще такие задачи рассматриваются в старших классах в рамках элективных курсов, преследуя при этом почти всегда одну цель – подготовиться к итоговой аттестации. Но, на наш взгляд, основная трудность при этом заключается в том, что ученики должны усвоить методы решения данного вида задач, осознать эти методы и овладеть ими, что требует немалого времени. С этой точки зрения задачи с параметрами целесообразнее начать рассматривать в 8–9-х классах, постепенно применяя разные методы на различных классах задач. И такая возможность, как показывает опыт, существует [2].

Традиционно для решения задач с параметрами используются аналитические и/или графические методы. Наиболее часто применяемым при аналитическом способе рассуждений является сведение задачи к решению уравнений, неравенств, их систем или совокупностей. Хорошие результаты в отдельных случаях дает нахождение необходимых условий, применение свойств функций. Графические решения, как правило, выполняются в декартовой системе координат либо системе «переменная-параметр» [3].

Важно обучать учащихся различным методам решения задачи, а не отдавать предпочтение какому-то одному из них, чтобы каждый был готов к выбору наиболее целесообразного и эффективного пути рассуждения. Большое внимание следует уделять накоплению у учащихся опыта самостоятельного поиска решений.

Рассмотрим на примере решения одной из задач высокого уровня сложности разнообразие приемов рассуждений и способов ее решения, обращая при этом внимание на возможные ошибки и недочеты учеников.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$ *имеет единственное решение* [4].

Опыт работы со школьниками показывает, что в этой ситуации интуитивно первой приходит идея, связанная с представлениями учащихся о решении систем уравнений методом подстановки. Ученикам психологически проще подставить $y = ax + 1$ в первое уравнение системы, чем задумываться о разложении его левой части на множители или графических способах решения. Тогда исходная система приобретает вид:

$$\begin{cases} (ax+1)^2 + x(ax+1) - 4x - 9(ax+1) + 20 = 0, \\ x > 2. \end{cases} \quad (1)$$

После соответствующих преобразований получаем:

$$\begin{cases} (a^2 + a)x^2 - (7a+3)x + 12 = 0, \\ x > 2. \end{cases} \quad (2)$$

Заметим, что каждому значению x соответствует ровно одно значение $y = ax + 1$. Это означает, что число решений исходной системы равно числу решений системы (2).

Переформулируем задачу.

При каких значениях a уравнение $(a^2 + a)x^2 - (7a+3)x + 12 = 0$ (3) имеет ровно один корень, больший двух?

Это возможно в следующих случаях.

Случай 1. *Уравнение является линейным и имеет один корень, больший 2.*

Уравнение (3) линейное, если $a^2 + a = 0$, то есть $a = 0$ или $a = -1$.

При $a = 0$ уравнение принимает вид $-3x + 12 = 0$ и имеет один корень $x = 4$, больший 2.

При $a = -1$ уравнение имеет вид $4x + 12 = 0$ и не имеет корней, больших 2.

Заметим, что рассмотренный случай 1 (уравнение не является квадратным) школьники часто упускают из вида, зачастую теряя при этом удовлетворяющие условию задачи значения параметра.

Случай 2. *Уравнение является квадратным и имеет только один корень, который больше 2 или имеет два различных корня, но только один из них больше, чем 2.*

Уравнение (3) квадратное, если $a^2 + a \neq 0$, то есть $a \neq 0$ и $a \neq -1$.

Число корней квадратного уравнения зависит от знака его дискриминанта. Найдем дискриминант уравнения (3).

$$D = (7a + 3)^2 - 48(a^2 + a) = a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2.$$

Заметим, что дискриминант является «хорошим» – он представляет собой полный квадрат выражения $(a - 3)$, поэтому корни уравнения (3) легко выражаются через параметр a:

$$x_1 = \frac{7a+3+(a-3)}{2(a^2+a)} = \frac{4}{a+1};\ x_2 = \frac{7a+3-(a-3)}{2(a^2+a)} = \frac{3}{a}.$$

Если $D = 0$, то есть $a = 3$, то $x_1 = x_2 = 1 < 2$ и уравнение (3) не имеет корней, больших двух.

Если $D > 0$, то есть $a \neq 3$, то $x_1 \neq x_2$ и условие задачи выполняется при

$$\begin{cases} x_1 > 2; \\ x_2 \leq 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 \leq 2; \\ x_2 > 2. \end{cases} \qquad (4)$$

Заметим, что школьники часто ошибаются при построении отрицания к условию $x > 2$, рассматривая только случай $x < 2$, что приводит к ошибочному ответу.

Подставляя в (4) выражения для корней квадратного уравнения, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a+1} > 2; \\ \dfrac{3}{a} \leq 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{4}{a+1} \leq 2; \\ \dfrac{3}{a} > 2. \end{cases} \qquad (5)$$

Решением (5) являются $a \in (-1; 0) \cup a \in [1; \frac{3}{2})$.

Объединяя случаи 1 и 2, окончательно получаем: $a \in (-1; 0] \cup [1; \frac{3}{2})$.

При рассмотрении случая 2 далеко не всегда дискриминант квадратного уравнения получается «хорошим», то есть представляет собой полный квадрат выражения, зависящего от параметра a. В этой ситуации выражения для корней квадратного уравнения могут быть иррациональными и совокупность (5) приобретает «устрашающий» для школьников вид. Как правило, в этом случае ученики отказываются от решения задачи или, решая иррациональные неравенства, тратят на это неоправданно много времени. В гораздо более выигрышной ситуации здесь оказываются школьники, которые знакомы с основными утверждениями о расположении корней квадратного трехчлена и могут применить к случаю 2 соответствующие графические иллюстрации. Приведем еще один способ рассмотрения этого случая, основанный на вышеупомянутых рассуждениях.

Если уравнение (3) является квадратным ($a^2 + a \neq 0$), то для выполнения условий задачи оно должно иметь хотя бы один корень ($D \geq 0$).

Случай $D = 0$ $(a = 3)$ следует рассмотреть отдельно. Как было показано выше, для $a = 3$ условие задачи не выполняется.

Пусть $D > 0$ и $a^2 + a \neq 0$, тогда уравнение (3) равносильно уравнению

$$x^2 - \frac{7a+3}{a^2+a}x + \frac{12}{a^2+a} = 0. \qquad (6)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - \frac{7a+3}{a^2+a}x + \frac{12}{a^2+a}$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Парабола пересекает ось Ox в двух различных точках, соответствующих корням уравнения (3).

Заметим, что рассмотрение приведенного квадратного уравнения (6) вместо уравнения (3) позволяет уменьшить количество рассматриваемых случаев расположения параболы.

Число 2 может располагаться относительно точек пересечения параболы с осью Ox пятью различными способами:

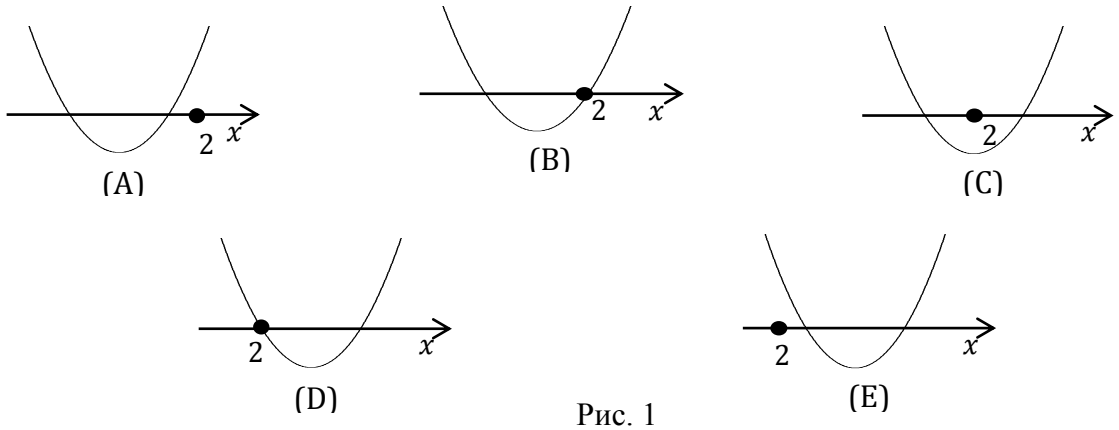

Рис. 1

Так как ровно один корень уравнения должен быть больше 2, условию задачи удовлетворяют случаи (C) и (D) (рис. 1).

В случае (C) число 2 лежит между корнями уравнения $x^2 - \frac{7a+3}{a^2+a}x + \frac{12}{a^2+a} = 0$, что равносильно условию $f(2) < 0$. Решим соответствующее неравенство.

$$4 - \frac{7a+3}{a^2+a} \cdot 2 + \frac{12}{a^2+a} < 0;\ \frac{4a^2-10a+6}{a(a+1)} < 0;\ \frac{2(a-1)\left(a-\frac{3}{2}\right)}{a(a+1)} < 0.$$

Итак, в случае (C) $a \in (-1; 0) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

В случае (D) один из корней уравнения $x^2 - \frac{7a+3}{a^2+a}x + \frac{12}{a^2+a} = 0$ равен двум, то есть $f(2) = 0$. Из этого условия найдем возможные значения для a. $f(2) = \frac{4a^2-10a+6}{a(a+1)} = 0$ при $a = 1$ или $a = \frac{3}{2}$. Проверим найденные для a значения.

При $a = 1$ получаем уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, у которого ровно один из корней больше 2, что удовлетворяет условию задачи.

При $a = \frac{3}{2}$ получаем уравнение $x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{16}{5} = 0$, у которого нет корней, больших 2, что не удовлетворяет условию задачи.

Окончательно получаем $a \in (-1; 0] \cup [1; \frac{3}{2})$.

Обратим внимание, что реализация приведенных выше способов рассуждений требует от учащихся: знания определений линейного и квадратного уравнений; знаний о числе корней квадратного уравнения в зависимости от знака дискриминанта и умения находить эти корни; свободного владения методом интервалов при решении дробно-рациональных неравенств, хорошо сформированных представлений о виде графика квадратичной функции и его расположении в системе координат в зависимости от знака дискриминанта. Все перечисленные знания и умения формируются в 8–9-х классах.

Приведем еще одно аналитическое решение задачи, которое позволит нам легко перейти к рассмотрению графических способов ее решения.

Преобразуем первое уравнение исходной системы:

$$y^2 + xy - 4x - 5y - 4y + 20 = 0;\ y(y-4) + x(y-4) - 5(y-4) = 0;$$
$$(y-4)(y+x-5) = 0.$$

Нельзя не заметить, что здесь можно обсудить со школьниками и другие способы разложения на множители многочлена от двух переменных.

Можно рассмотреть его как квадратный трехчлен от переменной $y - y^2 + (x - 9)y - 4x + 20$, найти корни – $y = 4$ или $y = -x + 5$ и применить теорему о разложении квадратного трехчлена на множители.

Можно применить другую группировку: $y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = (y^2 - 9y + 20) + xy - 4x$.

Тогда после разложения на множители квадратного трехчлена получаем: $(y-4)(y-5) + x(y-4) = (y-4)(y-5+x)$.

Итак, в результате разложения на множители левой части первого уравнения исходная система принимает вид:

$$\begin{cases} (y-4)(y+x-5) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases} \qquad (7)$$

Из системы (7) получим:

$$\begin{cases} y = 4\,, \\ 4 = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases} \quad (A) \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} y = 5 - x, \\ 5 - x = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases} \quad (B)$$

Рассматривая систему (А), имеем $\begin{cases} y = 4, \\ ax = 3, \\ x > 2 \end{cases}$

При $a = 0$ система решений не имеет. При $a \neq 0$ получим $\begin{cases} y = 4, \\ x = \frac{3}{a}, \\ x > 2 \end{cases}$

Эта система имеет решение, причем единственное, если $\frac{3}{a} > 2$, то есть при $a \in (0; \frac{3}{2})$.

Рассматривая систему (В), получим $\begin{cases} y = 5 - x, \\ (a+1)x = 4, \\ x > 2. \end{cases}$

При $a = -1$ система решений не имеет.

При $a \neq -1$ получим $\begin{cases} y = 5 - x, \\ x = \frac{4}{a+1}, \\ x > 2. \end{cases}$

Эта система имеет решение, причем единственное, если $\frac{4}{a+1} > 2$, то есть при $a \in (-1;\ 1)$.

Система (7) имеет единственное решение в следующих случаях:

– (А) имеет единственное решение, (В) решений не имеет;
– (В) имеет единственное решение, (А) решений не имеет;
– (А) и (В) имеют единственное решение, но эти решения совпадают.

Найдем значения a, при которых решения систем (А) и (В) совпадают: $\begin{cases} \frac{4}{a+1} = \frac{3}{a}; \\ 5 - \frac{4}{a+1} = 4; \\ a \in (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a \in (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow$ нет таких a.

Отметим полученные выше результаты на оси a (рис. 2).

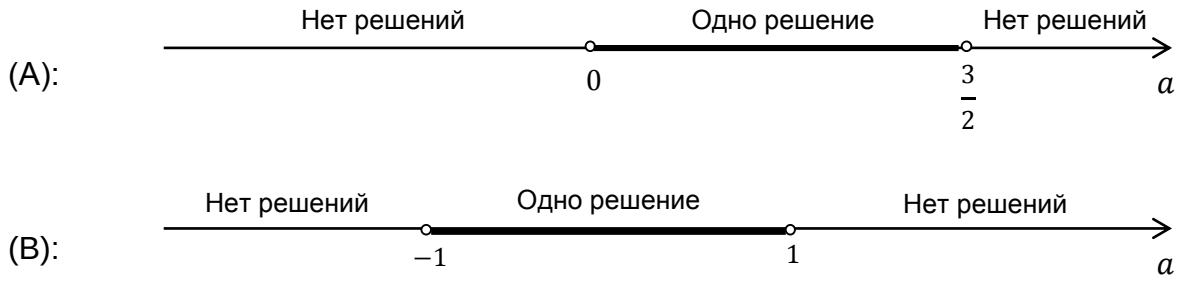

Рис. 2

Таким образом, по рис. 2 определяем, что единственное решение система (7) имеет при $a \in (-1; 0] \cup [1; \frac{3}{2})$.

Заметим, что при работе с учениками в качестве дополнения к рис. 2 может быть построена еще одна числовая прямая, на которой показаны все возможные варианты количества решений исходной системы в зависимости от значений параметра a. При записи ответа следует обратить особое внимание на включение (исключение) концов промежутков.

Это решение требует от учащихся более глубоких и гибких знаний и умений. Разложение многочлена с двумя переменными на множители существенно упрощает решение задачи. Вооружить учащихся таким приемом рассуждений – значит открыть им путь к графическим способам решения. Заметим также, что учащиеся допускают логические ошибки при выборе единственного решения совокупности двух систем. Однако и этот материал не выходит за рамки программы основной школы.

Как показывает практика, школьники, знакомые с графическими методами решения задач с параметрами, гораздо охотнее применяют именно их.

Решим задачу графическим методом **в системе** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$**.**

Из системы (7) получаем $\begin{cases} y - 4 = 0 \text{ или } y + x - 5 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$, далее

$$\begin{cases} y = 4 \text{ или } y = 5 - x, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases} \qquad (8)$$

В системе координат (x, y) будем рассматривать те части прямых $y = 4$ и $y = 5 - x$, которые лежат в полуплоскости $x > 2$ (рис. 3).

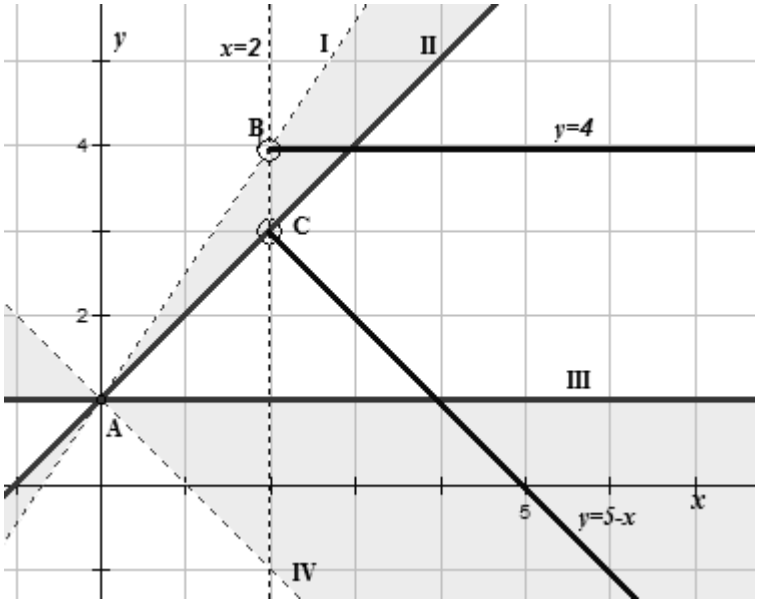

Рис. 3

Уравнение $y = ax + 1$ задает на плоскости прямую, проходящую через точку $A(0; 1)$ с угловым коэффициентом, равным a, принимающим всевозможные значения. Удобно представлять себе не семейство прямых, а «движущуюся» прямую, которая «вращается» вокруг точки $A(0; 1)$. Мысленно вращая прямую $y = ax + 1$, определим такие ее положения, когда она имеет ровно одну общую точку с частями прямых $y = 4$ и $y = 5 - x$. На рис. 3 выделены области, в которых должна лежать прямая $y = ax + 1$, чтобы выполнялось данное условие. Найдем значения a, которые соответствуют положениям прямой, ограничивающей данные области.

I. Прямая $y = ax + 1$ проходит через точку $B(2; 4)$, следовательно, $4 = a \cdot 2 + 1$, отсюда $a = \frac{3}{2}$.

II. Прямая $y = ax + 1$ проходит через точку $C(2; 3)$, следовательно, $3 = a \cdot 2 + 1$, отсюда $a = 1$.

III. Прямая $y = ax + 1$ параллельна оси OX, следовательно, $a = 0$.

IV. Прямая $y = ax + 1$ параллельна прямой $y = 5 - x$, значит $a = -1$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют $a \in (-1; 0] \cup [1; \frac{3}{2})$.

Для использования такого метода необходимо научить школьников изображать различные множества точек на плоскости, что можно сделать при изучении конкретных классов функций.

Решим задачу графическим методом **в системе** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$.

Подставим $y = ax + 1$ в первое уравнение системы (7), получим:

$$\begin{cases}(ax-3)(ax+x-4)=0,\\ x>2.\end{cases} \qquad (9)$$

Заметим, что каждому значению x соответствует ровно одно значение $y=ax+1$ при каждом фиксированном значении параметра a, то есть исходная система имеет столько же решений, сколько и система (9). Найдем все значения a, при которых система (9) имеет единственное решение.

Из системы (9) получаем $\begin{cases}x>2,\\ ax-3=0 \text{ или } ax+x-4=0\end{cases}$.

Поскольку $x>2$, то $x\neq 0$ и

$$\begin{cases}x>2,\\ a=\dfrac{3}{x} \text{ или } a=\dfrac{4}{x}-1.\end{cases} \qquad (10)$$

Построим в системе координат (x,a) множество всех точек, координаты которых удовлетворяют системе (10). Для этого в полуплоскости $x>2$ построим гиперболы $a=\frac{3}{x}$ и $a=\frac{4}{x}-1$ (рис. 4).

Найдем точку пересечения гипербол, решив систему $\begin{cases}a=\frac{3}{x},\\ a=\frac{4}{x}-1\end{cases}$, откуда $\frac{3}{x}=\frac{4-x}{x}$, то есть $x=1$, что не удовлетворяет условию $x>2$. Это значит, что в полуплоскости $x>2$ гиперболы не пересекаются.

Заметим, что при $x=2$ значение $a=\frac{3}{x}$ равно $\frac{3}{2}$, значение $a=\frac{4}{x}-1$ равно 1, то есть при $x>2$ имеем $\frac{3}{x}>\frac{4-x}{x}$.

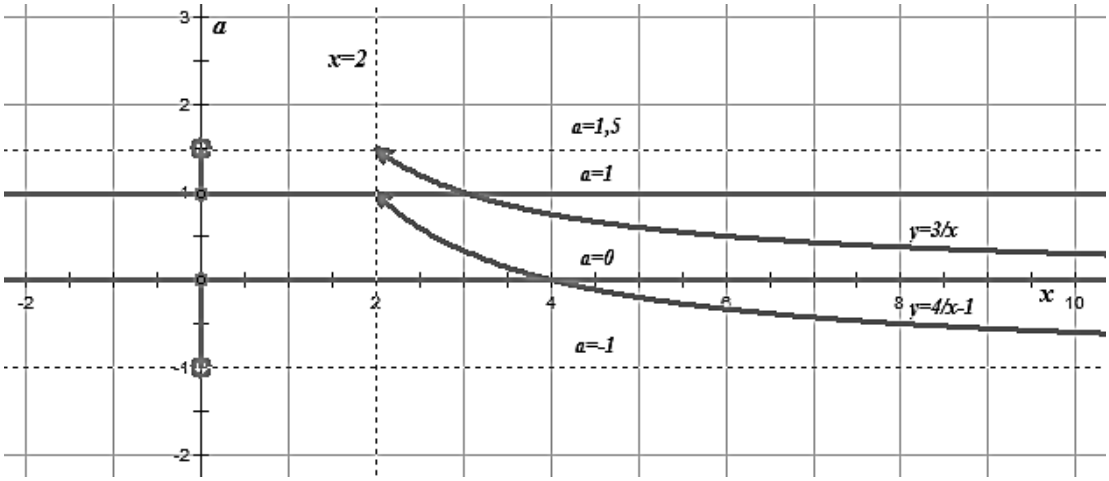

Рис. 4

Мысленно перемещая прямую $a=const$ вдоль оси Oa «снизу вверх», фиксируем такие ее положения, при которых эта прямая имеет ровно одну общую точку с частями гипербол (на рис. 4 соответствующие этим положениям значения параметра a выделены на оси Oa).

Таким образом, исходная система имеет единственное решение при $a\in(-1;0]\cup[1;\frac{3}{2})$.

Отметим, что работа в системе «переменная-параметр» является несколько непривычной для учащихся с точки рения получения ответа. Однако если метод знаком и усвоен, мы видим, что решение задачи сводится к построению графиков известных функций и решению знакомых уравнений, неравенств и их систем.

Вне всякого сомнения, решение задач с параметрами требует глубины рассуждений, твердых базовых знаний, определенного уровня логического мышления, волевых качеств. Далеко не все школьники готовы в силу своих способностей и мотивации работать с такими задачами. Однако наш опыт работы с учениками 8–9-х классов показывает, что некоторые из них с интересом воспринимают этот материал, их привлекает новизна задач и рассуждений, необычность методов решений, а при достижении определенных успехов интерес к задачам с параметрами возрастает. Это существенно влияет на качество подготовки учащихся по математике, в том числе и к различного рода аттестациям, позволяет снять психологический барьер перед такого рода задачами и к концу 11-го класса приобрести определенный опыт решения задач с параметрами.

Ссылки на источники

1. Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Некоторые проблемы обучения математике в контексте результатов ЕГЭ // Актуальные вопросы обучения математике и информатике в условиях стандартизации образования: материалы Всерос. Науч.-практ. конф. препод. мат., информ. школ и вузов / под общ. ред. Н. В. Сидоровой. – Ульяновск: УлГПУ, 2016. – С. 55–64.
2. Токарева В. А., Зеленина Н. А. Обучение учащихся графическим методам решения задач с параметрами средствами программного комплекса «Живая математика» // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: материалы Всерос. науч.-практ. конф. студ. матем. фак-тов / ред. кол.: И. В. Косолапова; А. Ю. Скорнякова, под общ. ред. А. Ю. Скорняковой; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2017. – Вып. 10. – 85 с.
3. Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Использование различных методов решения задач с параметром на Едином государственном экзамене по математике // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 8 (август). – С. 139–150. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16176.htm.
4. Материалы для подготовки экспертов ЕГЭ-2012 (математика): учеб.-метод. пособие / сост. Л. М. Бронникова, И. В. Кисельников, И. В. Пономарев. – Барнаул: АлтГПА, 2012. – 62 с. – URL: http://www.barnaul-obr.ru/upload/files/materialy_dlya_podgotovki_ekspertov_ege_2012_po_matematike.pdf.

Marina Zdorovenko,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Fundamental Informatics and Applied Mathematics Chair, Vyatka State University, Kirov
zdorovenko.s@mail.ru
Natalya Zelenina,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of Fundamental and Computer-Related Mathematics Chair, Vyatka State University, Kirov
sezel@mail.ru
Marina Krutikhina,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of Fundamental and Computer-Related Mathematics Chair, Vyatka State University, Kirov
krumarvik@mail.ru

Teaching students various ways of solving the tasks with parameters

Abstract. The task with parameter is traditionally included in the control materials of the Unified state examination(USE) in mathematics and is evaluated with maximum points. At the same time for various reasons these tasks are devoted very little time in school. The authors who have great experience in checking exam papers show on example of a task, its level of difficulty corresponding with the requirements to such tasks at the examination(USE) in mathematics in recent years, different ways of solving it: analytical (different options), graphical in the system (x;y) and graphical in the system (x;a). Proposed solutions are described in detail with

the indication of typical mistakes made by students. The authors give some methodological recommendations which enable to organize teaching of students to solve tasks with parameters more effectively**.**

Key words: tasks with parameters, different ways of solving tasks with parameters, Unified state examination in mathematics, teaching mathematics.

1. Zelenina, N. A. & Krutihina, M. V. (2016). “Nekotorye problemy obuchenija matematike v kontekste rezul'tatov EGJe”, in Sidorova, N. V. (ed.). *Aktual'nye voprosy obuchenija matematike i informatike v uslovijah standartizacii obrazovanija: materialy Vseros. Nauch.-prakt. konf. prepod. mat., inform. shkol i vuzov,* UlGPU, Ul'janovsk, pp. 55–64 (in Russian).
2. Tokareva, V. A. & Zelenina, N. A. (2017). “Obuchenie uchashhihsja graficheskim metodam reshenija zadach s parametrami sredstvami programmnogo kompleksa «Zhivaja matematika»”, in Skornjakova A. Ju. (ed.). *Voprosy matematiki, ee istorii i metodiki prepodavanija v uchebno-issledovatel'skih rabotah: materialy Vseros. nauch.-prakt. konf. stud. matem. fak-tov*, Perm. gos. gumanit.-ped. un-t, Perm', vyp. 10, 85 p. (in Russian).
3. Zdorovenko, M. Ju., Zelenina, N. A. & Krutihina, M. V. (2016). “Ispol'zovanie razlichnyh metodov reshenija zadach s parametrom na Edinom gosudarstvennom jekzamene po matematike”, *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal “Koncept”*, № 8 (avgust), pp. 139–150. Available at: http://e-koncept.ru/2016/16176.htm (in Russian).
4. Bronnikova, L. M., Kisel'nikov, I. V. & Ponomarev, I. V. (2012). *Materialy dlja podgotovki jekspertov EGJe-2012 (matematika): ucheb.-metod. posobie*, AltGPA, Barnaul, 62 p. Available at: http://www.barnaul-obr.ru/upload/files/materialy_dlya_podgotovki_ekspertov_ege_2012_po_matematike.pdf (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	07.06.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	06.07.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	06.07.17	Опубликована *Published*	30.07.17

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2017
© Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В., 2017