ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Кандаурова И. Е. Методика применения признака Куммера при исследовании числовых рядов на сходимость // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V7. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170156.htm.

ART 170156 **УДК 378.147:517.521**

Кандаурова Ирина Евгеньевна,
старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
iriskan6591@mail.ru

Методика применения признака Куммера при исследовании числовых рядов на сходимость

Аннотация. *Тема, связанная с исследованием числовых рядов на сходимость, сложна и важна в дальнейшем изучении курса математики. Вследствие этого необходимо, чтобы студенты умели хорошо, легко и быстро ориентироваться в выборе признаков сходимости рядов. В данной статье на примере задач представлена методика применения признака Куммера, из которого как первоисточника следуют известные достаточные признаки: и Даламбера, и Коши, и Раабе, и Бертрана, и Гаусса, и иные признаки исследования на сходимость числовых рядов с положительными членами. Материал статьи рассчитан на студентов технических специальностей и будет полезен всем тем, кто интересуется теорией рядов. Статья представляет собой рекомендации в виде задач и примеров для подготовки к экзаменам, практическим занятиям, контрольным и рубежным работам и выполнения домашних заданий. Материал работы может быть использован преподавателями, ведущими практические и теоретические занятия. Статья написана на основе многолетнего опыта преподавания и по существу является планом для проведения практических занятий по указанной теме. Автор предполагает, что читатель владеет навыками вычисления пределов, основными понятиями теории бесконечно малых и больших величин, их сравнения.*
Ключевые слова: *числовой ряд, остаточный член ряда, сумма ряда, общая схема исследования рядов, признак Куммера, необходимый и достаточные признаки сходимости, методика исследования на сходимость числовых рядов с положительными членами.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Для начала отметим, что для преодоления трудностей, связанных с интегрированием, Ньютон и Лейбниц выражали подынтегральную функцию в виде многочлена с бесконечным числом членов. Применяя к таким выражениям обычные правила алгебры, математики XVIII в. сделали множество замечательных открытий. Однако обнаружилось, что если безоговорочно применять эти правила к бесконечным суммам, то можно прийти к ошибкам. Стало необходимым точно сформулировать основные понятия и строго доказать свойства бесконечных рядов.

Напомним основные определения, формулировки, свойства и понятия теории положительных числовых рядов [1, 2].

Определение 1. Выражение $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n ..... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1)

называется числовым рядом. Это сумма чисел, занумерованная в определенном порядке, a_n называется членом ряда. Сумма первых n слагаемых называется частичной суммой ряда; $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = S_n$.

Определение 2. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся, а S – суммой ряда. Если этот предел не существует или равен ∞, то ряд называется расходящимся.

Определение 3. Ряд $a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + ... + a_{k+m} + ... = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ (2)

называется остатком ряда (или на жаргоне «хвостом») ряда.

Если все члены ряда $a_n \geq 0$, то ряд называется знакоположительным. Если все члены ряда $a_n > 0$, то ряд называется строго положительным.

Для положительного ряда очевидно, что $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$, т. е. последовательность частичных сумм оказывается возрастающей. Вспоминая теорему о пределе монотонной последовательности, приходим к следующему основному в теории положительных рядов утверждению.

Положительный ряд (1) всегда имеет сумму. Эта сумма может быть конечной, и, следовательно, ряд называется сходящимся, и бесконечной, и тогда ряд расходящийся. Все признаки исследования рядов с положительными членами на сходимость и расходимость основаны на этой теореме.

Теорема 1. Если сходится ряд (1), то сходится и любой из остатков ряда (2), обратно, из сходимости остатка ряда (2) вытекает сходимость ряда (1).

Иными словами, отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение в начале его нескольких новых членов не отражается на поведении ряда в смысле его сходимости или расходимости.

Теорема 2**.** Если ряд сходится, то сумма его остатка после m-го члена с возрастанием m стремится к 0.

Теорема 3. Если члены сходящегося ряда (1) умножить на один и тот же множитель, то его сходимость не нарушается, а сумма лишь умножается на этот множитель.

Теорема 4. Два сходящихся ряда можно почленно складывать (или вычитать), так что ряд $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + ... + (a_n \pm b_n)$..... также сходится, и его сумма равна $A \pm B$, где A и B – сумма складываемых рядов [3].

Сходящиеся ряды широко используются в математике. При этом $\lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n) = 0$. На практике важно уметь отличать сходящиеся ряды от расходящихся рядов. При исследовании сходимости числового ряда обычно не пытаются составлять частичные суммы и искать $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Это слишком сложно. Существует ряд признаков, позволяющих по свойствам общего члена ряда a_n судить о сходимости или расходимости ряда. Для этого используют необходимый признак и достаточные признаки.

Качество признака сходимости определяется его применимостью, практичностью и чувствительностью. Как выбрать признак сходимости? Для этого необходимо проверить сначала необходимый признак. Затем переходить к использованию достаточных признаков; для этого проверить, применим ли он, удобен ли для применения, нет ли способа проще [4].

Необходимый признак: если ряд сходится, то его n-й член стремится к 0 при неограниченном возрастании n.

При нарушении этого признака ряд заведомо расходится. И именно в этом случае ответ готов: ряд расходится. Однако важно подчеркнуть, что это условие не является само по себе достаточным для сходимости ряда. Иными словами, даже при его выполнении ряд может расходиться.

Начинать исследование ряда на сходимость удобно с необходимого признака. Схема исследования такая: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ пока ничего о сходимости сказать нельзя. Значит, для этого случая следует использовать достаточные признаки.

Пример 1. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{7n+5}$.

Начнем исследование ряда с помощью необходимого признака $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{7n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}{n\left(7+\frac{5}{n}\right)} = \frac{3}{7} \neq 0$. Ответ: по необходимому признаку ряд расходится. Вывод из этого примера очень важный: исследование любого ряда полезно начинать с исследования с помощью необходимого признака, потому что в случае $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ответ готов сразу: ряд расходится.

Пример 2. Исследуем ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Этот ряд называется гармоническим. Используем необходимый признак $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Но при этом этот ряд расходится. Покажем это. Гармонический ряд имеет вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{n} + ...$

Сгруппируем слагаемые в группы из 1, 2 ,4, 8,… членов: $1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}\right) + ...$, так, что в k-й группе будет 2^{k-1} членов. Если в каждой группе заменим все члены последними членами группы, то получим ряд: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 4 + \frac{1}{16}\cdot 8 + ... = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$, сумма первых n членов которого равна $\left[1 + \frac{1}{2}(n-1)\right]$, стремится, очевидно, к $(+\infty)$. Взяв достаточно большое число членов гармонического ряда, мы можем получить какое угодно число n групп, и сумма этих членов будет еще больше, чем $\left[1 + \frac{1}{2}(n-1)\right]$, и отсюда видно, что для гармонического ряда $S_n \to +\infty$.

Пример 3. Исследуем ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Используем необходимый признак $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 0$. Он ответа не дает. Тогда представим общий член ряда в виде суммы $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+.....+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=S_n$. Отсюда получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$. Ряд сходится, его сумма стремится к 1 [5].

Признак Куммера. В статье рассмотрена предложенная в 1837 г. Куммером общая схема исследования сходимости рядов с положительными членами. Она была сформулирована им в виде одного общего признака сходимости, из которого как частные случаи получаются достаточные признаки Даламбера, Раабе, Бертрана, Гаусса и другие. Эта схема позволяет также установить для определенного класса рядов оценку их остаточных членов. Впоследствии Куммер нашел преобразование рядов, позволяющее улучшить также их сходимость.

При исследовании числовых рядов на сходимость полезно подчеркнуть, что изучение ряда следует начинать с применения необходимого признака. И если ответ не получен, тогда продолжить исследование, используя выбранный достаточный признак. Именно из предложенного Куммером признака, который редко встречается в литературе, следуют известные достаточные признаки.

Суть признака Куммера состоит в следующем. Пусть дан положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+a_3+.....+a_n+.....$, $a_n>0$.

Пусть $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел $c_n>0$.

Составим последовательность $k_n=c_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}$.

Тогда:

а) если $\exists\delta>0,\ \exists N=N(\delta):\ \forall n>N(\delta)\ k_n\geq\delta\Rightarrow\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится;

б) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}=\infty$ и $\exists N:\forall n>N(\delta), k_n\leq 0\Rightarrow\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

В предельной форме схема Куммера выглядит так: если существует $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=k$, то

а) $k>0\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}=+\infty$ и $k<0\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится [6, 7].

Покажем теперь, как с помощью признака Куммера можно получить основные важные признаки сходимости как частные случаи этого признака [8].

Признак Даламбера. Пусть, например, $c_n=1$, условие, при котором ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ расходится, соблюдено. Имеем $k_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{l_n}-1$.

Если последовательность l_n стремится к пределу l, то k_n стремится к пределу $k=\frac{1}{l}-1$ ($k=+\infty$, если $l=0$; $k=-1$, если $l=+\infty$). При l > 1, очевидно, k < 0, и по схеме Куммера ряд расходится; если же l < 1, то k > 0 b и ряд сходится. Таким образом, мы получаем признак Даламбера. Если для положительного ряда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$, при λ < 1 ряд сходится, при λ > 1 ряд расходится (т. е. не выполняется необходимый признак). В случае $\lambda=1$ признак Даламбера ответа о сходимости ряда не дает и надо использовать другие признаки.

Доказательство признака основано на сравнении ряда с геометрической прогрессией. Ряд, члены которого составляют геометрическую прогрессию, при знаменателе $|q|$ > 1 быстро расходится, а при $|q|$ < 1 быстро сходится. Поэтому признак Даламбера, хотя и удобный при использовании, недостаточно «чувствительный». Он действует, когда ряд быстро сходится или быстро расходится. Например, его удобно использовать, когда общий член ряда содержит показательную функцию, или представляет собой произведение n сомножителей, или содержит факториалы [9].

Пример 4. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

Проверим необходимый признак $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=0$, так как показательная функция с основанием больше 1 возрастает быстрее любой степенной, что можно проверить, используя правило Бернулли – Лопиталя. Необходимый признак ответа не дает. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 3^n}{3\cdot 3^n\cdot n^2}=\frac{1}{3}$ < 1, ряд сходится по признаку Даламбера.

Пример 5. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5....(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8....(3n-1)}$.

Здесь использовать необходимый признак непросто. Начнем исследование с достаточного признака. Подставив вместо n $n+1$, получаем $2(n+1)-1=2n+1$, $3(n+1)-1=3n+2$, составим предварительно $a_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5.....(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8.....(3n-1)(3n+2)}$.

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5....(2n-1)(2n+1)\cdot 2\cdot 5\cdot 8....(3n-1)}{2\cdot 5\cdot 8....(3n-1)(3n+2)\cdot 1\cdot 3\cdot 5....(2n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\frac{2}{3}$ < 1.

Ряд сходится по признаку Даламбера [10].

Пример 6. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,a^n}{n^n}$, $a\neq e$.

Вспомним, $n!=n(n-1)(n-2).....4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

Составим $a_{n+1}=\frac{(n+1)!\,a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\frac{(n+1)n.....3\cdot 2\cdot 1\cdot a^n a}{(n+1)^n\cdot(n+1)}$. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n.....3\cdot 2\cdot 1)(a^n)a\cdot n^n}{(n+1^n)(n+1)n!\cdot a^n}=a\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{e}.$$

Таким образом, при $a > e$ ряд расходится, а при $a < e$ ряд сходится по признаку Даламбера [11].

Пример 7. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$.

Составим последующий и предыдущий члены ряда: $a_n = \frac{n^n}{2^n n!}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$.

Находим их частное: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n}{2^n n!} : \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{n^n 2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^n (n+1) 2^n n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{2(n+1)}{(n+1)} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Тогда $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$.

Исходный ряд сходится по признаку Даламбера [12].

Признак Раабе. Пусть $c_n = n$, и отметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится как гармонический. Выражение k_n получит вид: $k_n = n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = R_n - 1$.

Если последовательность R_n стремится к пределу l, то k_n стремится к пределу $k = R - 1$ ($k = \pm\infty$, если $R = \pm\infty$). При $R > 1$ имеем $k > 0$, и по признаку Куммера ряд сходится. Если же $R < 1$, то $k < 0$ и ряд расходится. Мы вновь получили признак Раабе [13].

Пусть для положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ..., a_n > 0$, существует предел $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$. Тогда при $l > 1$ ряд сходится, при $l < 1$ расходится. При $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 8. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{1}{k}$.

Заменяем k на $k+1$, получаем $a_{k+1} = \frac{[2(k+1)-1]!!}{(k+1)(2(k+1))!!} = \frac{(2k+1)!!}{(k+1)(2k+2)!!}$.

Сначала попробуем воспользоваться признаком Даламбера: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+1)!!}{(k+1(2k+2))!!} : \frac{(2k-1)!!}{k(2k)!!} = \frac{(2k+1)!!\cdot(2k)!!\cdot k}{(2k-1)!!(2k+2)!!(k+1)} = \frac{(2k+1)\cdot k}{(2k+2)(k+1)} = \frac{2k^2+k}{2k^2+4k+2}$.

Находим предел отношения $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k^2+k}{2k^2+4k+2} = \frac{2}{2} = 1$.

Признак ответа о сходимости ряда не дает. Обратимся к признаку Раабе:

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{2k^2+4k+2}{2k^2+2} - 1\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{2k^2+k+3k+2}{2k^2+r} - 1\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(1 + \frac{3k+2}{2k^2+k} - 1\right) =$$

$= \lim_{k\to\infty} k \cdot \frac{3k+2}{2k^2+k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k^2+2k}{2k^2+k} = \frac{3}{2} = l > 1$. Исходный ряд сходится по признаку Раабе [14].

Признак Бертрана. Для получения этого признака возьмем $c_n = n\ln n$, такой выбор допустим, ибо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится. В этом случае имеем $k_n = n\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1)$, что можно также представить в виде $k_n = \ln n\cdot\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \beta_n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Если обозначим через β_n новую последовательность $\beta_n = \ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] = \ln n\cdot(R_n - 1)$, то получим признак Бертрана: если последовательность β_n имеет предел (конечный или бесконечный) $\beta = \lim_{n\to\infty}\beta_n$, то при β > 1 сходится, а при β < 1 ряд расходится.

Действительно, так как $\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \ln e = 1$, последовательность Куммера стремится к пределу $k = \beta - 1$ ($k = \pm\infty, \beta = \pm\infty$) [15].

Данную последовательность положительных чисел, все более и более точных («чувствительных», но и все более сложных), возможно продолжать до бесконечности. Допустим, например, $c_n = n\ln\ln n$ и т. д., или придумаем пример еще более сложной последовательности c_n, но ни один из перечисленных случаев не дает ответа на вопрос о том, что будет с рядом, если $k = 1$. Ответ на этот вопрос дает признак Гаусса.

Признак Гаусса. Предположим, что дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n\ldots\ldots$ и для него отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ может быть представлено $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$, где λ и μ – положительные постоянные, а $|\theta_m| \le L$. Тогда ряд сходится, если λ > 1, и расходится, если λ < 1, если же $\lambda = 1$, то при μ > 1 ряд сходится, а при μ <1 ряд расходится. Случаи λ > 1 (λ < 1) приводят к признаку Даламбера, ибо $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$.

Пусть теперь $\lambda = 1$, тогда $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \mu + \frac{\theta_n}{n}$, $R_n = \mu$ и случаи μ > 1 (μ < 1) исчерпываются признаком Раабе. Наконец, если $\mu = 1$, то имеем $\beta_m = \ln n(R_n - 1) = \frac{\ln n}{n}\cdot\theta_n$, так как $\frac{\ln n}{n}$, как известно, стремится 0 при $n\to\infty$, а θ_N ограничена, то $\beta = \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$ и по признаку Бертрана ряд расходится [16].

Пример 9. Исследуем на сходимость гипергеометрический ряд Гаусса $F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1).....(\alpha+n-1)\beta(\beta+1).....(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1).....(\gamma+n-1)}=$

$=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+.....$, предполагаем, что α,β,γ,x >0. Здесь $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x\to x$, так что по признаку Даламбера сразу устанавливается сходимость при x < 1 и расходимость при x > 1. Если же $x=1$, то возьмем отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}$ и, пользуясь разложениями: $\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}=1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{1+\frac{\alpha}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}$ и $\frac{1}{1+\frac{\beta}{m}}=1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{1+\frac{\beta}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}$, представим его в виде: $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$, где θ_n ограничена. Применяя признак Гаусса, видим, что ряд $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ сходится при $\gamma-\alpha-\beta$ > 0 и расходится при $\gamma-\alpha-\beta\le0$ [17].

Пример 10. Исследуем ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n}$.

Составим $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2n^2+4n+2}{2n^2+n}=\frac{2n^2+n+3n+2}{2n^2+n}=1+\frac{3n+2}{2n^2+n}=1+\frac{\frac{3}{2}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{2}{2n^2+n}$.

Здесь $\lambda=1,\mu=\frac{3}{2}$ > 1. Отсюда ряд сходится по признаку Гаусса.

Пример 11. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

Данный ряд можно было бы исследовать с помощью признака сравнения, но мы применим известные нам достаточные признаки, а именно Даламбера и Раабе. Покажем, что они не дают ответа, а затем применим признак Гаусса.

$a_n=\frac{1}{2n-1}$, $a_{n+1}=\frac{1}{2n+1}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2n+1}:\frac{1}{2n-1}=\frac{2n-1}{2n+1}$.

Поскольку $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{2}{2}=1$, то вопрос о сходимости ряда с помощью признака Даламбера решить нельзя. Применим признак Раабе:

$n\to\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n-1+2}{2n-1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1+\frac{2}{2n-1}-1\right)=$

$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{2}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}=1$. Как видим, признак ответа о сходимости ряда на дает.

Обращаемся к признаку Гаусса: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+1}{2n-1} = 1 + \frac{2}{2n-1} = 1 + \frac{\frac{2}{2}}{1-\frac{1}{2}}$. Здесь $\lambda = 1, \mu = 1$.

Ряд расходится по признаку Гаусса.

Пример 12. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p$, $p > 1$.

Здесь по формуле Тейлора распишем: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n}{2n-1} \right)^p = \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^{-p} = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right)$. Откуда $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\frac{p}{2}}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$, где θ_n ограниченная. Ряд сходится при $p > 2$ и расходится при $p \le 2$ [18].

Ссылки на источники

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. – Т. 2. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1986. – 472 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 2. – М.: Физматлит, 2006. – 607 с.
3. Григорьев Е. А. Числовые и функциональные ряды. Теория и практика. – СПб.: Научный мир, 2005. – 216 с.
4. Маркушевич А. И. Ряды. Элементарный очерк. – М., 2013. – 32 с.
5. Зимина О. В., Кириллов А. И., Сальникова Т. А. Задачи и упражнения по высшей математике / под ред. А. И. Кириллова. – М.: Физматлит, 2005. – 368 с.
6. Салехов Г. С. Числовые ряды. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1989. – 142 с.
7. Власова Е. А. Ряды / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 673 с.
8. Фихтенгольц Г. М. Указ. соч.
9. Там же.
10. Лунгу К. Н., Норин В. П., Письменный Д. Т., Шевченко Ю. А. Сборник задач по высшей математике. – М.: Айрис Пресс, 2007. – 379 с.
11. Григорьев Е. А. Указ. соч.
12. Зимина О. В., Кириллов А. И., Сальникова Т. А. Указ. соч.
13. Смирнов В. И. Указ. соч.
14. Зимина О. В., Кириллов А. И., Сальникова Т. А. Указ. соч.
15. Фихтенгольц Г. М. Указ. соч.
16. Смирнов В. И. Указ. соч.
17. Григорьев Е. А. Указ. соч.
18. Лунгу К. Н., Норин В. П., Письменный Д. Т., Шевченко Ю. А. Указ. соч.

Irina Kandaurova,
Senior Lecturer, Moscow N. E. Bauman State Technical University., Moscow
iriskan6591@mail.ru

The method of Kummer sign application to the study of numerical series for convergence

Abstract. The theme related to the study of numerical series for convergence is complex and important in the further study of mathematics. Therefore, it is necessary that students could easily and quickly find numerical series convergence signs. In this article on task examples the author presents the application method of Kummer sign from which originally followed well-known sufficient signs of numerical series with positive terms convergence study by d'Alembert, Cauchy, Raabe, Bertrand, Gauss and others. The article material is intended for students of technical specialties and it will be useful to all those who are interested in the theory of series. The article presents recommendations in the form of tasks and examples for exam preparation, practical training, control work and homework. The work material can be used by teachers conducting practical and theoretical classes. The article results from years of teaching experience and it is essentially a plan for practical

classes on this subject. The author presumes that the reader possesses the skills of limits calculation, the basic concepts of infinitely small and large quantities theory and their comparison.

Key words: numerical series, residual term, sum of series, general scheme of series study, Kummer sign, necessary and sufficient signs of convergence, research methodology on the convergence of numerical series with positive terms.

References

1. Smirnov, V. I. (1986). *Kurs vysshej matematiki, T. 2*, Gop. izd-vo tehniko-teoreticheskoj literatury, Moscow, 472 p. (in Russian).
2. Fihtengol'c, G. M. (2006). *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija, T. 2*, Fizmatlit, Moscow, 607 p. (in Russian).
3. Grigor'ev, E. A. (2005). *Chislovye i funkcional'nye rjady. Teorija i praktika*, Nauchnyj mir, St. Petersburg, 216 p. (in Russian).
4. Markushevich, A. I. (2013). *Rjady. Jelementarnyj ocherk*, Moscow, 32 p. (in Russian).
5. Zimina, O. V., Kirillov, A. I. & Sal'nikova, T. A. (2005). *Zadachi i uprazhnenija po vysshej matematike,* Fizmatlit, Moscow, 368 p. (in Russian).
6. Salehov, G. S. (1989). *Chislovye rjady*, Gop. izd-vo tehniko-teoreticheskoj literatury, Moscow, 142 p. (in Russian).
7. Vlasova, E. A. (2000). *Rjady*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow, 673 p. (in Russian).
8. Fihtengol'c, G. M. (2006). Op. cit.
9. Ibid.
10. Lungu, K. N., Norin, V. P., Pis'mennyj, D. T. & Shevchenko, Ju. A. (2007). *Sbornik zadach po vysshej matematike*, Ajris Press, Moscow, 379 p. (in Russian).
11. Grigor'ev, E. A. (2005). Op. cit.
12. Zimina, O. V., Kirillov, A. I. & Sal'nikova, T. A. (2005). Op. cit.
13. Smirnov, V. I. (1986). Op. cit.
14. Zimina, O. V., Kirillov, A. I. & Sal'nikova, T. A. (2005). Op. cit.
15. Fihtengol'c, G. M. (2006). Op. cit.
16. Smirnov, V. I. (1986). p. cit.
17. Grigor'ev, E. A. (2005). Op. cit.
18. Lungu, K. N., Norin, V. P., Pis'mennyj, D. T. & Shevchenko, Ju. A. (2007). Op. cit.

Рекомендовано к публикации:
Утёмовым В. В., кандидатом педагогических наук;
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	01.06.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	10.06.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	10.06.17	Опубликована *Published*	30.07.17

ISSN 2304-120X

www.e-koncept.ru

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2017
© Кандаурова И. Е., 2017