ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Грибов А. Ф., Котович А. В. Построение эскизов плоских кривых, заданных в полярных координатах // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V7. – 0,2 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170152.htm.

ART 170152 **УДК 378.147.34**

Грибов Александр Федорович,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alexandr-gribov@list.ru

Котович Александр Валерианович,
кандидат технических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
shurik.kot@gmail.com

Построение эскизов плоских кривых, заданных в полярных координатах

Аннотация. *Рассматривается построение (эскизирование) кривых, заданных в полярной системе координат на плоскости. Приведены примеры построения кривых, заданных в полярной системе координат. Представлены варианты задания для самостоятельной работы. Материал доступен школьникам старших классов и может быть предложен для их знакомства с полярной системой координат, а также для работы со студентами первого семестра.*
Ключевые слова: *графики, эскизы, функция, полярная система, декартова система.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

В некоторых случаях, например при исследовании вращательных движений, для задания кривых на плоскости удобно использовать полярную систему координат [1]. Поэтому, как и при рассмотрении графиков функций, заданных в декартовой системе координат, возникает задача эскизирования кривых, заданных в полярной системе координат. Под эскизированием графика функции (кривой на плоскости) понимают построение эскиза (наброска) графика функции (кривой на плоскости) без проведения полного исследования функции (функций или уравнений, задающих кривую) с привлечением первой и второй производной [2]. Однако такой эскиз должен достаточно точно отражать основные особенности поведения функции (кривой).

Известно, что положение любой точки на плоскости можно задать при помощи различных систем координат. Для определения полярных координат зададим произвольную точку *O*, называемую полюсом, и луч *O*р, называемый полярной осью (см. рис. 1). Выберем на полярной оси точку *E* так, что длина отрезка $|OE|$ задает величину масштаба для измерения длин отрезков. Тогда положение произвольной точки *M* на плоскости характеризуется полярным радиусом ρ, равным расстоянию от полюса *O* до точки *M*, выраженному в единицах выбранного масштаба, и полярным углом φ – углом, выраженным в радианах, между полярной осью и радиусом вектором $\overrightarrow{OM}$. Числа ρ и φ называют полярными координатами точки *M*. При этом если угол φ откладывается против часовой стрелки от полярной оси, то он считается положительным и может изменяться от 0 до +∞, а если по часовой стрелке – то отрицательным и может изменяться от -∞ до 0. Для полюса (ρ = 0) угол φ не имеет определенного значения. Для остальных точек плоскости полярный радиус всегда принимает положительные значения, так как он является длиной радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, а полярный угол имеет бесконечно много возможных значений, отличающихся друг от друга на

величину 2π*n*, где $n \in Z$. Таким образом, каждой паре полярных координат (ρ, φ), за исключением (0, φ), однозначно соответствует точка на плоскости. Обратное же утверждение неверно.

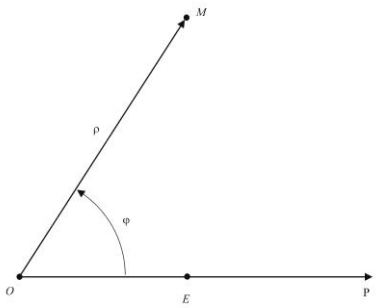

Рис. 1

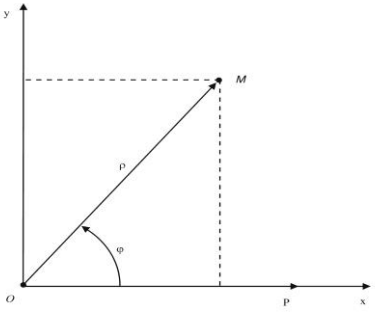

Рис. 2

Если на плоскости ввести полярную систему координат так, что полярная ось *O*p совпадает с положительной осью *O*x декартовой системы координат и для измерения ρ, *x* и *y* выбраны равные единицы масштаба (рис. 2), то тогда из очевидных геометрических соотношений в прямоугольном треугольнике декартовы координаты (*x*, *y*) произвольной точки *M* связаны с её полярными координатами (ρ, φ) формулами:

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi ,$$

и, наоборот,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

причем угол φ в последней формуле выбирается в соответствии со знаками декартовых координат *x* и *y* рассматриваемой точки.

Рассматривая функциональную зависимость $\rho = \rho(\varphi)$, заданную на некотором множестве значений φ, можно построить график заданной функции. При этом рассматриваемые функции могут быть как однозначные, так и многозначные (одному значению аргумента соответствует два или более значений функции). Мы не будем разделять их, называя графики этих функций кривыми на плоскости.

Построение кривой, задаваемой уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, можно осуществлять по точкам. Задавая значение φ из области определения рассматриваемой функции, проводим луч из полюса *O* под углом φ к полярной оси и затем на этом луче отмечаем точку *M*(φ, $\rho(\varphi)$) искомой кривой, находящуюся на расстоянии $\rho = \rho(\varphi)$ с учетом выбранного масштаба от точки *O*.

Для построения кривой в полярных координатах (ρ, φ) целесообразно использовать вспомогательный график, откладывая значения φ и ρ как значения *x* и *y* в декартовой системе координат, по двум взаимно перпендикулярным осям.

Пример 1. Построить на плоскости кривую, заданную в полярных координатах уравнением ρ = |φ| (спираль Архимеда).

Основываясь на определении модуля числа, нетрудно заметить, что в заданном уравнении при положительных значениях полярного угла φ полярный радиус ρ совпадает с этим значением, а при отрицательных значениях – принимает противоположные по знаку, но равные по абсолютной величине полярному углу φ значения.

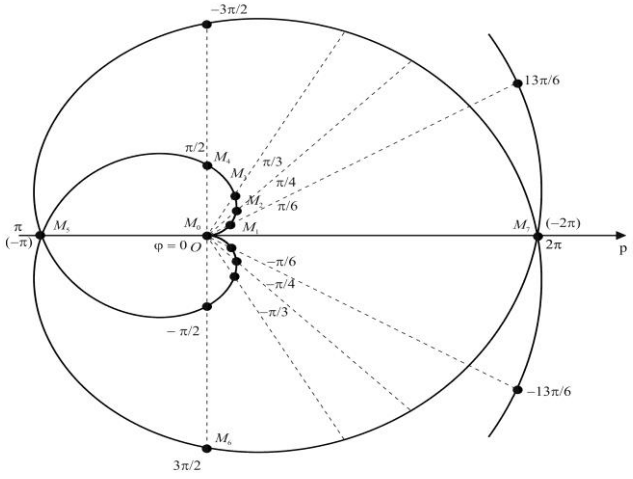

Рис. 3

Задавая на плоскости полярную систему координат (рис. 3), проводим из полюса *O* лучи, соответствующие нескольким выбранным значениям полярного угла φ (например, 0, $\pm\pi/6, \pm\pi/4, \pm\pi/3, \pm\pi/2, \pm\pi, \pm 3\pi/2, \pm 2\pi, \ldots$). Откладываем в выбранном масштабе на каждом луче отрезок OM_i, равный абсолютному значению (модулю) соответствующего ему значению полярного угла φ_i. Соединяя полученные точки M_i, получаем искомую кривую (рис. 3). Заметим, что, во-первых, полученная кривая состоит из двух бесконечных ветвей, одна из которых раскручивается против хода часовой стрелки ($\varphi > 0$), а другая – по ходу часовой стрелки ($\varphi < 0$); во-вторых, она симметрична относительно полярной оси, на которой лежат точки пересечения двух ее ветвей и, в-третьих, расстояние между двумя соседними точками пересечения любого луча с началом в точке *O* с одной из ветвей равно 2π.

Пример 2. Построить на плоскости кривую, заданную в полярных координатах уравнением $\rho = 3(\sin\varphi + 1)$ (кардиоида).

По заданному уравнению строим вспомогательный график (рис. 4), расположив оси φ и ρ как соответственно оси x и y декартовой системы координат и выбрав необходимые масштабы по этим осям [3].

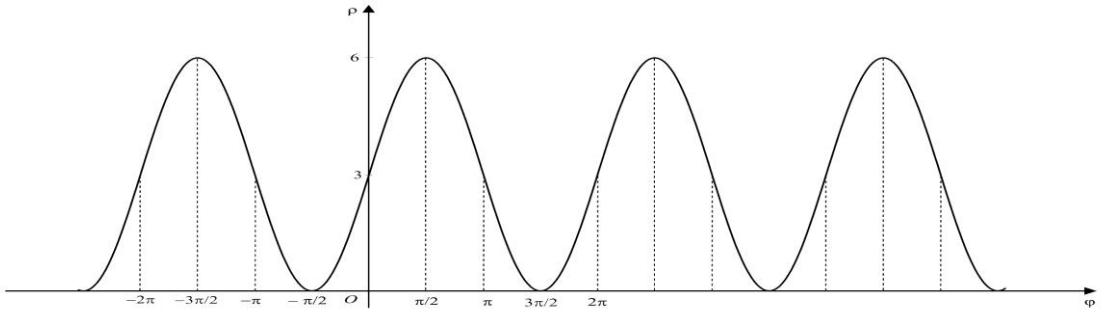

Рис. 4

Заметим, что построенный график является периодическим с периодом, равным 2π. Таким образом, достаточно найти точки, принадлежащие кривой лишь в пределах одного периода, например в диапазоне φ от 0 до 2π (рис. 5).

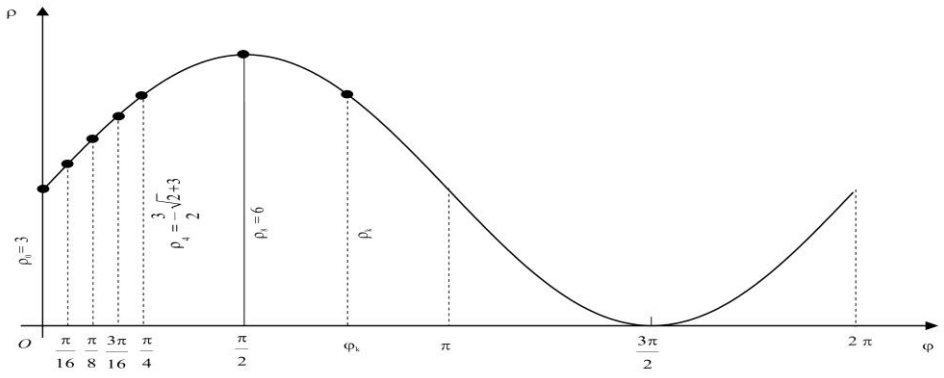

Рис. 5

Для этого выбираем на оси φ несколько точек φ_k в пределах выбранного интервала, например 0; π/16; π/8; 3π/16; π/4; и т. д. Для каждого значения φ_k находим по вспомогательному графику соответствующий ему отрезок ρ_k. Вычисляем или замеряем его длину. Откладываем на луче, образующем угол с полярной осью *О*р, отрезок *ОМ*к длиной равной ρ_k (рис. 6).

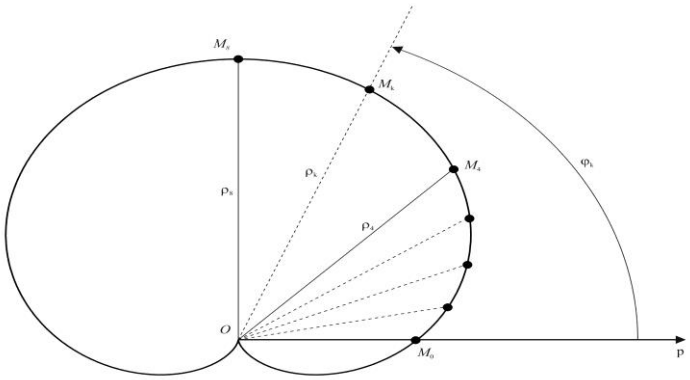

Рис. 6

Точка *М*к будет принадлежать искомой кривой. Для рассматриваемого уравнения, например, точке $\varphi_0 = 0$ соответствует отрезок ρ_0 длиной равной трем, точке $\varphi_4 = \pi/4$ – отрезок ρ_4 длиной равной ($3\sqrt{3}/2+3$) ≈5,1, точке $\varphi_8 = \pi/2$ – отрезок длиной равной шести и т. д. (рис. 5). Соединяя плавной кривой точки *М*0, *М*1, *М*2, *М*3 и т. д., получаем искомую кривую, которую называют кардиоида (рис. 6).

Пример 3. Построить на плоскости кривую, заданную в полярных координатах уравнением $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли).

Заметим, что угол φ не может принимать значения в интервалах от $\pi/4+\pi k$ до $3\pi/4+\pi k$, $k \in Z$, т. е. те значения, при которых $\cos 2\varphi$ меньше нуля, так как правая часть данного уравнения должна быть неотрицательна. Таким образом, в указанных интервалах точек, принадлежащих искомой кривой, не будет. Учитывая это, так же как

и в примере 2, строим вспомогательный график (рис. 7), откладывая значения φ и соответствующие им значения ρ по двум взаимно перпендикулярным осям, как значения *x* и *y* в декартовой системе координат [4]. Отметим, что график построенной функции является периодическим, с периодом равным 2π. Таким образом, с учетом выявленных особенностей исследуемого графика функции, достаточно найти точки, принадлежащие кривой, только, например, в интервале значений φ от $-\pi/4$ до $\pi/4$ и от $3\pi/4$ до $5\pi/4$ (рис. 8).

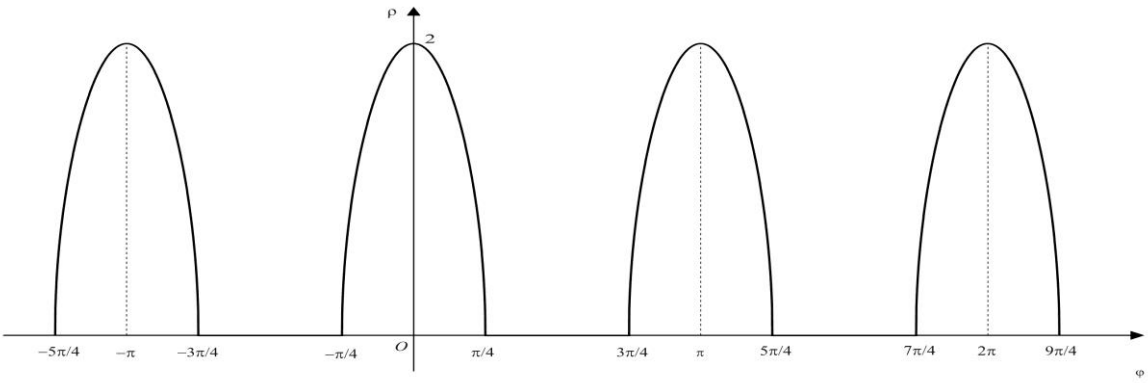

Рис. 7

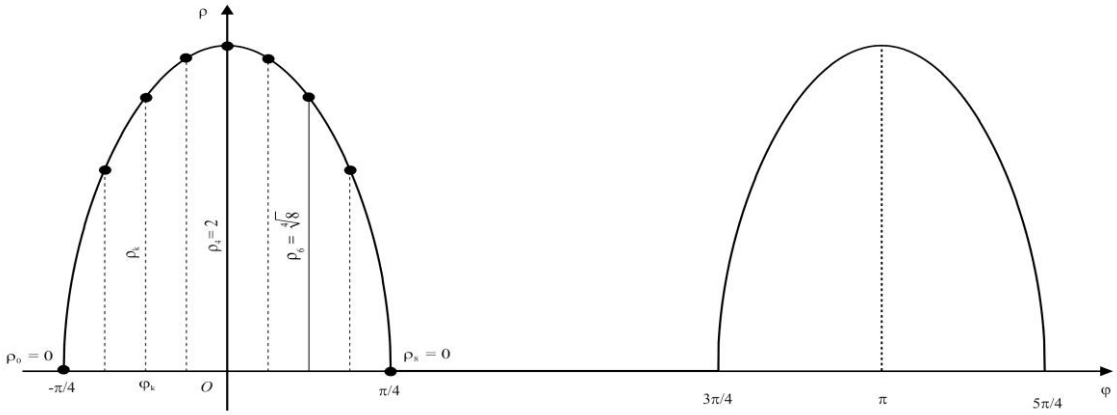

Рис. 8

Выбираем на оси φ несколько точек φ_k в указанном интервале, например $-\pi/4, -3\pi/16, -3\pi/8, \ -\pi/8, -\pi/16, 0,$ и т. д. Для каждого значения φ_k находим по вспомогательному графику соответствующий ему отрезок ρ_k. Вычисляем или замеряем его длину. Откладываем на луче, образующем угол φ_k с полярной осью *O*р, отрезок *OM*к длиной равной ρ_k (см. рис. 9). Точка *M*к будет принадлежать искомой кривой. Для рассматриваемого уравнения, например, точке $\varphi_0 = -\pi/4$ соответствует отрезок ρ_0 длиной равной нулю, точке $\varphi_4 = 0$ – отрезок ρ_4 длиной равной двум, точке $\varphi_6 = \pi/8$ – отрезок ρ_6 длиной равной $\approx 1{,}7(\sqrt[4]{8})$, точке $\varphi_8 = \pi/4$ соответствует отрезок ρ_8 длиной равной нулю и т. д. (рис. 8). Соединяя плавной кривой точки *M*0, *M*1, *M*2, *M*3 и т. д., получаем искомую кривую, состоящую из двух лепестков, которую называют лемниската Бернулли.

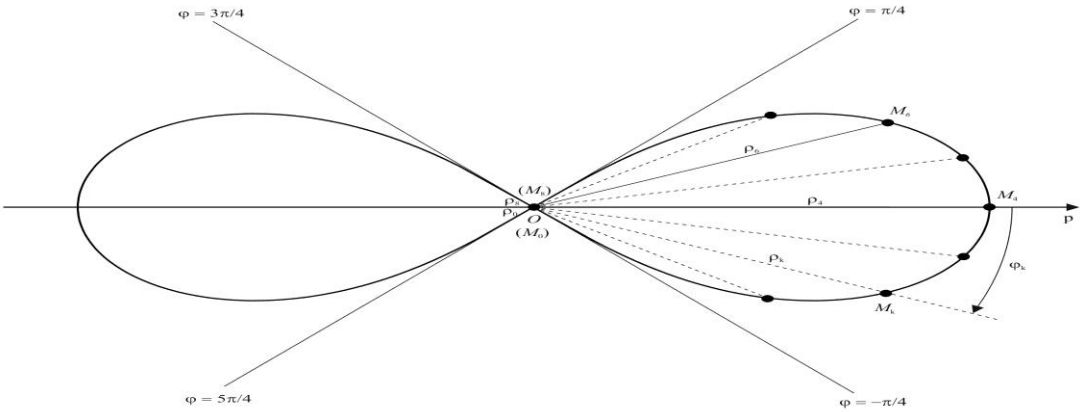

Рис. 9

Анализируя проведенное построение кривой (вид вспомогательного графика, получающиеся значения φ и ρ), можно заключить, что она имеет две оси симметрии: полярная ось и прямая, проходящая через полюс перпендикулярно полярной оси.

При необходимости более точного построения кривой, заданной в полярной системе координат, можно увеличить число точек φ_k, а в некоторых случаях бывает целесообразно задавать значения φ_k неравномерно, сгущая их на тех интервалах вспомогательного графика функции, на которых производная функции резко изменяется, т. е. функция сильно возрастает или сильно убывает.

Построить эскизы кривых на плоскости, заданных в полярной системе координат.

1	$\rho = 3\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$	11	$\rho = 2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$	21	$\rho = \mathrm{arctg}\varphi+\frac{\pi}{2}$
2	$\rho = 2+2\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$	12	$\rho = 2\cos3\varphi+3$	22	$\rho = \sin^2\varphi$
3	$\rho = \cos4\varphi+2$	13	$\rho^2 = 2\cos3\varphi$	23	$\rho = \left\lvert\cos2\varphi-\frac{1}{2}\right\rvert$
4	$\rho^2 = 4\cos2\left(\varphi+\frac{\pi}{8}\right)$	14	$\rho = 2\sin\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)$	24	$\rho = 3\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$
5	$\rho = \left\lvert\cos2\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rvert$	15	$\rho = 3+3\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$	25	$\rho = \mathrm{arcctg}\varphi$
6	$\rho = 4\sin2\left(\varphi-\frac{\pi}{8}\right)$	16	$\rho = 4\sin\varphi+1{,}5$	26	$\rho = \sin5\varphi+1$
7	$\rho = \lvert\cos4\varphi\rvert$	17	$\rho = 2+2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{8}\right)$	27	$\rho = 2\sin5\varphi$
8	$\rho = 1+\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$	18	$\rho = \sin2\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}$	28	$\rho = \cos4\varphi+1$
9	$\rho = 4\cos3\varphi$	19	$\rho = 4\sin3\varphi$	29	$\rho = \left\lvert\sin\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rvert$
10	$\rho = 3\lvert\cos2\varphi\rvert$	20	$\rho^2 = 4\cos2\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$	30	$\pi^2\rho^2+9\varphi^2=\pi^2$

Ссылки на источники

1. Канатников А. Н., Крищенко А. П. Аналитическая геометрия: учеб. для вузов / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 392 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. III).
2. Райхмист Р. Б. Графики функций: справ. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1991. – 160 с.
3. Там же.
4. Там же.

Alexander Gribov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow N. E. Bauman State Technical University, Moscow
Alexandr-gribov@list.ru
Alexander Kotovich,
Candidate of Technical Sciences, Associate professor, Moscow N. E. Bauman State Technical University, Moscow
Shurik.kot@gmail.com

Plotting sketches of planar curves defined in polar coordinates

Abstract. The plotting (sketching) of curves defined in polar coordinate system on the plane is studied. Examples of plotting curves defined in polar coordinate system are given. The variants of the tasks for independent work are presented. The material is available to high school students and can be suggested for their acquaintance with the polar coordinate system, as well as for working with students of the first semester**.**

Keywords: graphics, sketches, function, polar system, Cartesian system.

References

1. Kanatnikov, A. N. & Krishhenko, A. P. (2017). *Analiticheskaja geometrija: ucheb. dlja vuzov,* Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow, 392 p. (Ser. Matematika v tehnicheskom universitete; Vyp. III) (in Russian).
2. Rajhmist, R. B. (1991). *Grafiki funkcij: sprav. posobie dlja vuzov*, Vyssh. shk., Moscow, 160 p. (in Russian).
3. Ibid.
4. Ibid.

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	26.04.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	05.05.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	05.05.17	Опубликована *Published*	31.07.17

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2017
© Грибов А. Ф., Котович А. В., 2017