ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Елаховский Д. В. Оценка температурных полей элементов строительных конструкций в программе физического образования студентов строительной специальности // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V7. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170154.htm.

ART 170154 **УДК 378.147**

Елаховский Дмитрий Вячеславович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет», г. Петрозаводск
Elahovsky@mail.ru

Оценка температурных полей элементов строительных конструкций в программе физического образования студентов строительной специальности

Аннотация. *Внедрение в программу курса общей физики элементов строительной физики с целью повышения мотивационной составляющей процесса обучения предполагает более глубокое рассмотрение физических явлений, играющих важную роль в строительстве, но выходящих за рамки традиционного курса физики. Рассмотренный нами ранее механизм теплопроводности, ответственный за теплообмен, соответствовал стационарности его реализации. Реальные условия эксплуатации зданий осуществляются при изменяющейся температуре наружного воздуха и работе отопительных систем, с учетом этого температурное поле ограждения уже не является стационарным и его расчет основан на теории нестационарной теплопроводности. Учет начальных и граничных условий значительно осложняет процесс получения аналитических решений для наиболее важных ситуаций, поэтому используются альтернативные математические методы, рассмотренные на примере одномерной модели.*
Ключевые слова: *стационарная и нестационарная теплопроводность, температурное поле, уравнение теплопроводности, метод конечных разностей.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Использование элементов строительной физики в базовом курсе физического образования студентов строительной специальности университетов способствует повышению мотивационной составляющей процесса обучения [1]. Включение раздела строительной физики под названием «Физические основы архитектурной климатологии» вызвано тем обстоятельством, что эксплуатация зданий различного предназначения предполагает наличие соответствующего теплового режима, обеспечивающего ощущение теплового комфорта людей, реализацию производственных процессов в соответствии с техническим заданием и долговечность элементов конструкций самого здания. Тепловая обстановка помещения формируется в зависимости от температуры наружного воздуха и температуры внутри помещения, наличия отопительного оборудования и эксплуатационных характеристик. Требуемые условия санитарных норм помещений вызывают необходимость при проектировании ограждающих конструкций зданий учитывать как наружные условия их эксплуатации, так и полный спектр процессов, протекающих в помещении. В работе [2] достаточно подробно (по сравнению с традиционным курсом общей физики) рассмотрен процесс теплопроводности, существенно влияющий на формирование климатической среды помещения. Учитывая рамки журнальной статьи, данный процесс рассматривали в условиях, обеспечивающих его стационарность. На практике обеспечить такие условия достаточно сложно. Среди факторов, нарушающих режим стационарности, следует отметить, например, суточные колебания температуры наружного воздуха, достигающие в некоторых регионах 30^0. Система отопления помещений (особенно печи, использующие дрова) также не обеспечивает постоянство температуры воздуха в течение суток,

и это не способствует тепловому комфорту. Ослабление влияния колебательных процессов воздуха внутри помещений связано со способностью ограждения аккумулировать тепловую энергию за счет их теплоемкостных свойств. Все сказанное вызывает необходимость оценки нестационарных полей температуры, что будет способствовать более детальному знакомству студентов с проблемами формирования тепловой среды помещений и улучшению их профессиональных навыков.

Как отмечалось в [3], явление теплопроводности играет важную роль в проектировании конструктивных элементов зданий, но в традиционном курсе физики это явление представлено достаточно поверхностно в виде уравнения Фурье и зависимости коэффициента теплопроводности от различных параметров. Поэтому необходимо знакомить студентов с наиболее важными особенностями теплопроводности, особенно твердых тел, а также с некоторой терминологией, не встречающейся в обычном учебнике физики. Общее уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\rho \cdot c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right) + q. \qquad (1)$$

где ρ – плотность материала ограждения, c_v – удельная теплоемкость, $j_x = -æ(dT/dx)$ – плотность теплового потока вдоль оси x (аналогично для других проекций вектора j). Стоящая в правой части уравнения (1) величина q учитывает мощностные характеристики внешних и внутренних источников тепловой энергии, но так как они находятся вне строительного ограждения, то их наличие при решении дифференциальных уравнений учитывается заданием граничных условий на поверхностях ограждения.

С учетом этого уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\rho \cdot c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(æ \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(æ \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(æ \frac{\partial T}{\partial z}\right). \qquad (2)$$

Коэффициент теплопроводности æ можно считать постоянной величиной благодаря его слабой зависимости от температуры. Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$\rho \cdot c_V \frac{\partial T}{\partial t} = æ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \qquad (3)$$

Отношение $k = æ/(c_V\rho)$ называется температуропроводностью данного материала и характеризует интенсивность нестационарных процессов. Тогда в окончательном виде уравнение нестационарной теплопроводности принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \Delta T. \qquad (4)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Данное уравнение – это дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, а постоянство коэффициента теплопроводности обеспечивает его линейность. Это обстоятельство облегчает процедуру его решения за счет использования определенных математических методик, однако явный или удобный для конкретных расчетов аналитический вид решения данного уравнения может быть получен далеко не для всех важных с точки зрения практических приложений случаев. Наиболее используемое математическое обеспечение – это операционный метод и

метод частных производных. Аналитическое решение данного уравнения, как правило, представляется в виде быстро сходящихся бесконечных рядов в определенных интервалах изменения переменных или в виде протабулированных специальных функций. Главная проблема решения такого уравнения связана с необходимостью использования начальных и граничных условий, которым должно удовлетворять решение данного уравнения для конкретной задачи:

1. Искомое нестационарное распределение температур T (x, y, z, t) должно при t = 0 соответствовать начальному распределению:

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z). \tag{5}$$

2. На поверхностях ограждения для любой конкретной задачи должны быть заданы поддерживаемые на этих поверхностях температуры или подводимые потоки. К примеру, если поверхность граничит с воздушной средой заданной температуры Твозд, то должно выполняться условие:

$$-æ\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{пов} = \alpha\left(T_{пов} - T_{возд}\right), \tag{6}$$

3. Для неоднородных ограждений (æ – непостоянная величина) решения для соседних областей T1 (x, y, z, t, æ1) и T2 (x, y, z, t, æ2) на границе зон должны удовлетворять условию непрерывности температуры

$$T_{1\,гран} = T_{2\,гран} \tag{7}$$

и непрерывности тепловых потоков

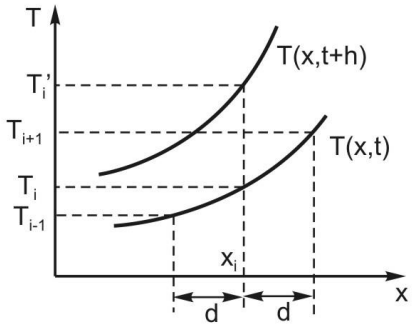
$$-æ_1\left.\frac{\partial T_1}{\partial x}\right|_{гран} = -æ_2\left.\frac{\partial T_2}{\partial x}\right|_{гран}. \tag{8}$$

Перечисленные начальные и граничные условия весьма затрудняют решение уравнения нестационарной теплопроводности (особенно в случаях сложной конфигурации ограждений). В связи с этим аналитические решения удается получать для плоских, цилиндрических и сферических поверхностей. Даже для стационарных температурных полей при решении уравнения Лапласа с учетом граничных условий (5)–(8) аналитический вид T(x,y,z) удается получить только для простых конфигураций. Это обстоятельство вызывает необходимость замены реального решения уравнения его приближенным численным интегрированием методом конечных разностей.

Для простоты (не умаляющей суть процедуры) рассмотрим одномерную задачу.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Разобьем ось x на ряд интервалов шириной d (см. рисунок) и пронумеруем значения температур на границах интервалов: T_1, T_2, … T_{i-1}, T_i. На данном i-м интервале производную $\partial T/\partial x$ заменим на $\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_i = \frac{T_i - T_{i-1}}{d}$ и т. д.



Метод конечных разностей [4]

Аналогично поступаем со вторыми производными:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{d}\left[\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{i+1}-\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{i}\right]=\frac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{d^2}.$$

Тогда одно уравнение в частных производных (9) заменится системой обыкновенных связанных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dT_i}{dt}=k\frac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{d^2}, \qquad (10)$$

где i = 1, 2, … с заданными начальными условиями $T_i(0)$ и определенными граничными условиями для крайних значений T_i.

Если еще и время разбить на малые конечные интервалы h и повторить вышеприведенные действия, то получим алгоритм для вычисления значений температур спустя интервал времени h.

$$T_i^{'}=T_i+h\cdot k\frac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{d^2}. \qquad (11)$$

Найдя отсюда все T_i, то есть распределение температур в момент времени t + h, можно аналогичным путем вычислить T_i" в момент времени t + 2h и т. д. Для большей точности необходимо уменьшать интервалы d и h, что резко увеличивает объем необходимых вычислений. Современные ЭВМ легко справляются с этой задачей, поэтому метод конечных разностей с успехом используется при анализе нестационарных температурных полей.

Рассмотрим пример аналитического решения уравнения (9). При этом используется такая модель.

Плоская стенка толщиной d и температуропроводностью k имеет при t < 0 температуру, равную температуре окружающей среды $T_н$. В момент времени t = 0 за счет внутреннего источника тепла температура левой поверхности мгновенно приняла значение $T_в$ и в дальнейшем не изменялась. Требуется вычислить нестационарное температурное поле в стенке T (x, t) в любой ее точке (0 ≤ x ≤ d) в любой последующий момент времени (0 < t < ∞). Для этого требуется решить одномерное уравнение теплопроводности (9) с начальными и граничными условиями:

$$T(x, 0) = T_н \text{ при } x > 0; \qquad (12)$$

$$T(0, t) = T_в,\ T(d, t) = T_н\ (t > 0). \qquad (13)$$

Для простоты будем считать, что коэффициенты теплоотдачи на граничных поверхностях $\alpha_в$ и $\alpha_н$ бесконечно большие.

В подобной формулировке при решении такой задачи значения параметров $T_н$, $T_в$, d, k варьируются в широких пределах. Но некоторые преобразования позволяют унифицировать данную задачу.

Исходное уравнение (9) запишем в эквивалентном виде (для разности температур $T(x, t) – T_н$) с учетом постоянства $T_н$

$$\frac{\partial(T-T_н)}{\partial t}=k\frac{\partial^2(T-T_н)}{\partial x^2}$$

с начальными и граничными условиями:

$$T(x, 0) – T_н = 0,\ T(d, t) – T_н = 0,\ T(0, t) – T_п = T_в – T_н.$$

Таким образом, при одинаковой величине перепада температур $T_в – T_н$ температурный ход для разности температур $T – T_н$ не зависим от абсолютного значения температуры среды $T_н$.

Если ввести в рассмотрение *относительный разогрев*

$$\theta(x,t)=\frac{T(x,t)-T_н}{T_в-T_н}, \tag{14}$$

(при этом $0 \le \theta \le 1$), то искомое уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{15}$$

с начальными и граничными условиями:

$$\theta(x, 0) = 0,\ \theta(d, t) = 0,\ \theta(0, t) = 1.$$

Это уравнение не содержит температурных параметров $T_н$ и $T_в$, тем самым для данной стенки при самых различных значениях $T_н$ и $T_в$ относительный разогрев θ (x, t) в тех же точках и в те же моменты времени t будет одинаков.

Дальнейшее упрощение задачи связано с введением относительных координат, т. е. для стенок различной толщины d следует анализировать относительные разогревы не на одинаковых расстояниях x от края пластины, а на одинаковых относительных расстояниях $a = x / d$, где $0 \le a \le 1$. Переходя от абсолютных координат к относительным, имеем:

$$dx=d\cdot da,\ \frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{d}\frac{\partial}{\partial a},\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{1}{d^2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}.$$

Тогда искомое уравнение переходит в

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{k}{d^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial a^2}. \tag{16}$$

Из этого уравнения следует, что ход относительного разогрева в соответственных точках для стенок разной толщины d одинаков только в том случае, если температуропроводность стенок k пропорциональна d^2.

Если разделить обе части дифференциального уравнения (16) на k /d^2, внести эту величину под знак дифференциала и ввести безразмерную величину $y = \frac{k}{d^2} t = \frac{t}{t^*}$, то получим уравнение:

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial^2\theta}{\partial a^2}, \qquad (17)$$

при этом θ (a, 0) = 0, θ (1, y) = 0, θ (0, y) = 1.

Величина t* – естественный масштаб времени для всей данной группы задач:

$$\left[t^*\right] = \frac{м^2}{м^2/с} = с.$$

Таким образом, для всей совокупности значений параметров Тн, Тв, k и d получим единое уравнение и единое его решение – некоторую функцию θ (a, y). Это значит, что для всех стенок на одинаковых относительных расстояниях a = x /d в сходственные моменты времени y = t /t* будут одинаковые значения относительных разогревов θ = (T – Тн) / (Тв – Тn).

В том случае, когда y = t /t* → ∞, получается стационарное состояние, при этом θ (a, y) уже не зависит от времени ($\partial\theta/\partial y = 0$) и уравнение (17) принимает вид:

$$\frac{d^2\theta}{da^2} = 0. \qquad (18)$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющего граничным условиям при a = 0 и a = 1, будет:

$$\theta (a, \infty) = \theta_{стац}(a) = 1 - a. \qquad (19)$$

Для конечных значений y при аналитическом решении уравнения (17) это решение представляется в виде бесконечного ряда по различным функциям. В частности, при y > 1 (то есть t > t*) используются тригонометрические и показательные функции, которые быстро сходятся для больших времен. Кривые θ (a, y) протабулированы для ряда значений y = t /t*.

Из решения уравнения (17), представленного в виде ряда по тригонометрическим функциям, можно получить оценку значения yk ≈ 0,1, при котором нестационарное распределение θ (a, y) практически переходит в стационарное. Отсюда можно оценить время тепловой релаксации:

$$t_k \sim y_k t^* \sim 0.1\frac{d^2}{k}. \qquad (20)$$

Если стенка имеет толщину d = 0,1 мм и температуропроводность k = 10^{-6} м^2/с, то время тепловой релаксации t_k ≈ 20 мин.

Если наружная температура $T_н$ изменяется так, что δT << $T_в$ – $T_н$ (1÷2° в течение часа), то распределение температуры внутри стенки все время практически «подстраивается» под изменение $T_н$, что обеспечивает линейное снижение температуры, как и в стационарном случае, но наклон ($T_в$ – $T_н$) /d постепенно будет изменяться в соответствии с изменением $T_н$ (t). В этом случае формула (19) описывает квазистационарное распределение температуры и, перейдя к размерным переменным, получим:

$$T_{квазист}(x,t) = T_н(t) + \left[T_в - T_п(t)\right]\frac{d-x}{d}. \quad (21)$$

Таким образом, рассмотрение нестационарной теплопроводности расширяет кругозор будущих строителей, что позволяет оценить возможности теоретического рассмотрения теплофизических свойств ограждающих конструкций, обеспечивающих режим комфортного проживания людей.

Ссылки на источники

1. Елаховский Д. В. Повышение мотивационной составляющей физического образования студентов строительной специальности вуза // Физическое образование в вузах. – 2013. – Т. 19. – № 4. – С. 74.
2. Елаховский Д. В. Элементы архитектурной климатологии как фрагменты физического образования студентов строительной специальности университетов // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2015. – № 5 (май). – С. 86–90. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15146.htm.
3. Там же.
4. Тодес О. М. Курс лекций и заданий по строительной физике. – Л., 1972.

Dmitry Elakhovskiy,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, General Physics Chair, Petrozavodsk State University, Petrozavodsk
Elahovsky@mail.ru

Building components temperature field estimation in the program of physics for civil engineering students

Abstract. Introduction of building physics elements in the course of general physics with the purpose of learning process motivational component increasing involves a deeper studying of the physical phenomena that play an important role in construction, but beyond the scope of traditional physics course. The mechanism of thermal conductivity considered earlier is responsible for heat transfer in steady state conditions. But the temperature field of retaining walls in real environment is not stationary because of varying outdoor air temperature and heating system operation. That is why its estimation should be based on the theory of unsteady-state conductivity. Calculation of initial and boundary conditions significantly complicates the process of analytical solutions obtaining for the most important cases so we suggest the use of alternative mathematical methods presented here on example of one-dimensional model.

Key words: steady-state and unsteady-state thermal conductivity; temperature field; heat conductivity equation; finite-difference method.

References

1. Elahovskij, D. V. (2013). “Povyshenie motivacionnoj sostavljajushhej fizicheskogo obrazovanija studentov stroitel'noj special'nosti vuza”, *Fizicheskoe obrazovanie v vuzah*, t. 19, № 4, p. 74.
2. Elahovskij, D. V. (2015). “Jelementy arhitekturnoj klimatologii kak fragmenty fizicheskogo obrazovanija studentov stroitel'noj special'nosti universitetov”, *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal “Koncept”,* № 5 (maj), pp. 86–90. Available at: http://e-koncept.ru/2015/15146.htm.
3. Ibid.
4. Todes, O. M. (1972). *Kurs lekcij i zadanij po stroitel'noj fizike*, Leningrad.

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	15.05.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	22.05.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	22.05.17	Опубликована *Published*	31.07.17

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2017
© Елаховский Д. В., 2017