ISSN 2304-120X
научно-методический электронный журнал

*Ахметова Ф. Х., Буякевич А. Е. Исследование некоторых вопросов поведения функций и построение графиков с привлечением среды MathCAD // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V9. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/171024.htm.*

**ART 171024** **УДК 378.147:004.9**

***Ахметова Фания Харисовна,***
*кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва*
dobrich2@mail.ru

***Буякевич Александр Евгеньевич,***
*старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва*
alexanderbuy@mail.ru

## Исследование некоторых вопросов поведения функций и построение графиков с привлечением среды MathCAD

***Аннотация.*** *В работе приведена методика применения среды MathCAD в учебном процессе на примерах исследования некоторых вопросов поведения функций и построения графиков. Указаны особенности представления графика в MathCAD при наличии точек разрыва функции. Разобранные задачи и примеры представляют собой методические рекомендации по выполнению домашних заданий. Авторы рассматривают их как одну из форм организации обучения студентов и выявления остаточных школьных знаний на первых занятиях первого курса по математике. Приведены методические указания по использованию пакета прикладных программ при обучении студентов, и показана перспективность их применения, повышающая эффективность восприятия материала. Простота интерфейса MathCAD сделала эту систему одной из самых популярных среди систем поддержки математики и, безусловно, самой распространенной в студенческой среде. Активное использование программных средств позволит сформировать необходимые профессиональные компетенции у студентов технических специальностей. Содержание статьи будет полезным преподавателям и студентам при подготовке к занятиям.*
***Ключевые слова:*** *среда MathCAD, область определения, четность, нечетность функции, графики функций.*
***Раздел:*** *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

MathCAD – это программная среда компьютерной алгебры, позволяющая выполнять на компьютере разнообразные математические и технические расчеты. В отличие от других систем компьютерной алгебры, MathCAD – это не язык программирования, а средство работы с документами, допускающее проведение вычислений непосредственно в документе. Это позволяет сделать взаимодействие пользователя со средой MathCAD простым и наглядным, доступным для людей, далеких от программирования.

Ранее в работе [1] было описано пошаговое изложение построения графиков в декартовой и полярных системах координат в MathCAD. В [2, 3] продемонстрирована методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля. Поэтому не будем вновь описывать основные моменты, в частности то, с чего начинать построение графиков в MathCAD. Будем предполагать, что читатель с этим знаком или может посмотреть в указанных работах.

### 1. Исследование некоторых вопросов поведения функций

На первых занятиях предмета «Математический анализ» первокурсники на базе школьных знаний разбирают такие вводные понятия, как область определения, чет-

ISSN 2304-120X
научно-методический электронный журнал
Ахметова Ф. Х., Буякевич А. Е. Исследование некоторых вопросов поведения функций и построение графиков с привлечением среды MathCAD // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V9. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/171024.htm.

ность, нечетность функций, построение их графиков с помощью элементарных преобразований. Студентам выдаются индивидуальные домашние задания, которые выполняются самостоятельно.

В свою очередь, авторы статьи ставят перед собой задачу описать все тонкости и разобрать возможные ошибки при выполнении заданий. На примерах задач мы покажем два способа решения поставленных задач: аналитический и графический – с применением среды MathCAD. Привлечение программных средств повысит скорость решения задач и качество подготовки заданий.

Отметим важность обучения студентов различным методам решения задач. При этом не следует отдавать предпочтение какому-то одному из них. Необходимо, чтобы каждый студент был готов к выбору наиболее целесообразного и эффективного пути рассуждения. Большое внимание следует уделять накоплению у студентов опыта самостоятельного поиска решений.

Итак, перейдем непосредственно к некоторым вопросам исследования функций, а именно нахождения области определения, четности, нечетности. Известно, что **область определения** – это множество, на котором задается функция. В каждой точке этого множества значение функции должно быть задано. Рассмотрим пример нахождения области определения и построим график функции в MathCAD.

**Пример 1.** Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{5^x \cdot (2 + x - x^2)}.$$

На область определения функции накладывает ограничения корень – подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$5^x \cdot (2 + x - x^2) \geq 0.$$

Так как для любого *x* выполняется неравенство $5^x > 0$, то получаем условие:

$$2 + x - x^2 \geq 0.$$

Чтобы решить неравенство, находим корни квадратного трёхчлена: $x1 = -1;\ x2 = 2$. Методом интервалов получаем решение неравенства и область определения функции: $x \in [-1;\ 2]$.

Построим график заданной функции $f(x)$ с использованием среды MathCAD (рис. 1).

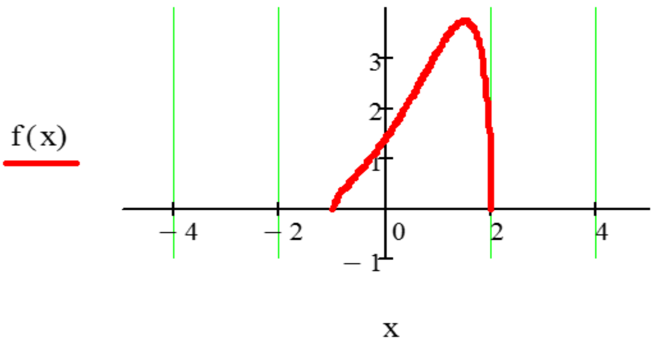


*Рис. 1. График функции* $f(x) = \sqrt{5^x \cdot (2 + x - x^2)}$

Из графика видно, что область определения функции найдена верно. Таким образом, аналитический и графический методы показали одинаковый результат.

В следующих задачах необходимо исследовать функции на четность, нечетность. Прежде чем перейти к рассмотрению функции, дадим необходимые определения.

**Определение 1.** Функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется **четной**, если область её определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента $x \in X$ верно равенство: $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.

График любой четной функции симметричен относительно оси ординат $OY$.

**Определение 2.** Функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется **нечетной**, если область ее определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента $x \in X$ верно равенство: $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.

График любой нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Заметим, что не всякая функция является четной или нечетной. В тех случаях, когда функция не является ни четной, ни нечетной, то её называют функцией **общего вида.** График такой функции не обладает симметрией. Рассмотрим три примера на все перечисленные случаи.

**Пример 2.** Исследовать функцию на четность, нечетность:

$$f1(x) = \sqrt{3^x + 3^{-x}}\,.$$

Для того чтобы вычислить $f1(-x)$, нужно открыть «Панель вычислений» и нажать стрелку <→>, которая выполняет символьные вычисления заданной функции.

Вычислим $f1(-x) \to \sqrt{3^x + \frac{1}{3^x}}$. Так как $f1(-x) = f1(x)$, то функция будет четной.

Построим график функции в среде MathCAD и проверим выполнение свойства четной функции (рис. 2).

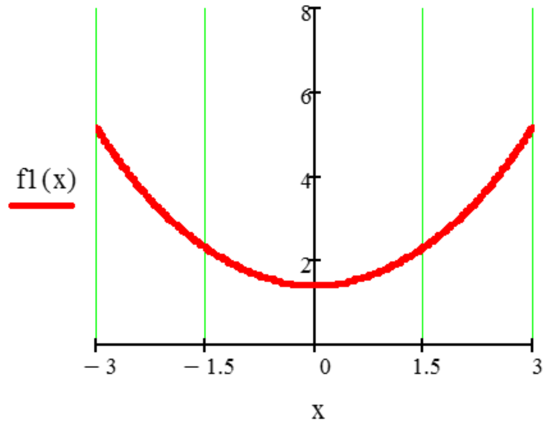


*Рис. 2. График функции $f1(x) = \sqrt{3^x + 3^{-x}}$*

Как видим, график симметричен относительно оси $OY$, то есть функция $f1(x)$ действительно четная.

**Пример 3.** Исследовать функцию на четность, нечетность:

$$f2(x) = \arcsin(x) \cdot \arccos(x^2).$$

Вычислим $f2(-x) \to -\mathrm{asin}(x) \cdot \mathrm{acos}(x^2)$. Так как $f2(-x) = -f2(x)$, то функция нечетная.

Построим график функции $f2(x)$ в среде MathCAD и проверим выполнение свойства нечетной функции (см. рис. 3).

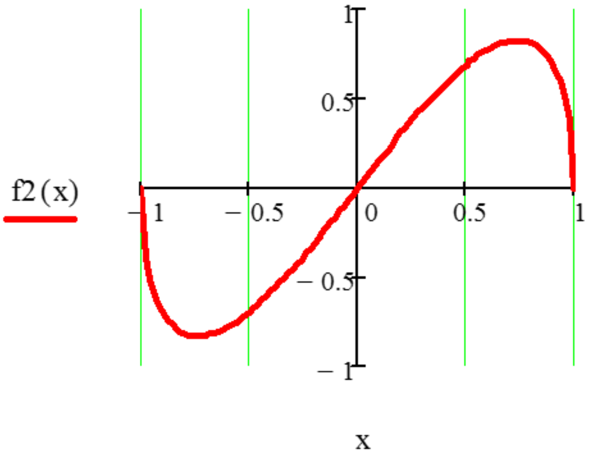


*Рис. 3. График функции* $f2(x) = arcsin(x) \cdot arccos(x^2)$

Видим, что график симметричен относительно начала координат, то есть функция $f2(x)$ нечетная.

**Пример 4.** Исследовать функцию на четность, нечетность:

$$f3(x) = \arccos(2^x - 2^{-x}).$$

Вычислим $f3(-x) \to \text{acos}(\frac{1}{2^x} - 2^x)$.

Построим график функции $f3(x)$ в MathCAD (рис. 4) и проанализируем результаты.

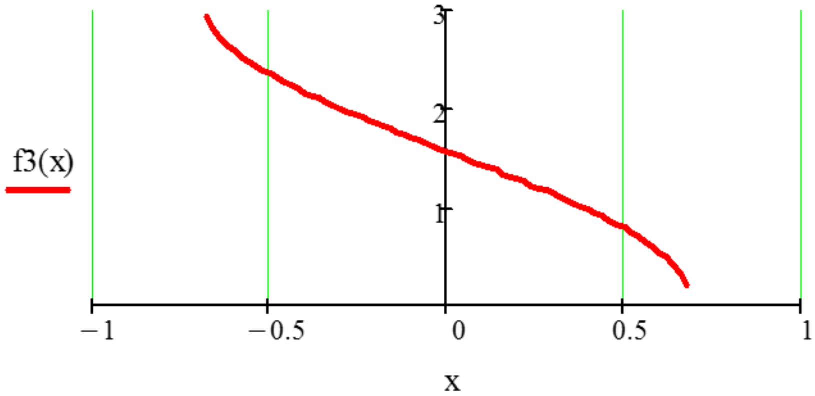


*Рис. 4. График функции* $f3(x) = arccos(2^x - 2^{-x})$

Из свойств функции арккосинус мы знаем, что $f3(-x) = \pi - f3(x)$. Учитывая это, имеем:

$$f3(-x) = \pi - f3(x) \neq f3(x).$$

График $f3(x)$ не симметричен относительно оси OY. Значит, функция не является четной. Кроме того, имеем: $f3(-x) = \pi - f3(x) \neq -f3(x)$.

График $f3(x)$ не обладает центральной симметрией относительно начала координат. Значит, функция не является нечетной. Делаем вывод, что $f3(x)$ – функция общего вида.

На примерах задач мы показали два способа решения: аналитический и графический – с применением среды MathCAD. Оба метода имеют место.

## 2. Применение элементарных преобразований и возможности их отображения на графике с помощью средств MathCAD

В следующих задачах необходимо применить элементарные преобразования к графикам функций, описать этапы построения и изобразить эти графики с применением среды MathCAD.

Обратим внимание, что реализация этого задания требует от студентов школьных знаний об элементарных преобразованиях графиков функций. Опираясь на них, они должны составить последовательность функций: от элементарной к данной функции. При построении графиков требуется указать, какое именно преобразование было применено. Заметим, что благодаря использованию программного средства MathCAD студенты избавятся от необходимости «поточечного» построения графиков.

Напомним, что, как правило, различают три вида **элементарных преобразований** графиков функций в декартовой системе координат:

– первый вид – масштабирование (сжатие или растяжение) вдоль осей абсцисс и ординат;

– второй вид – симметричное (зеркальное) отображение относительно координатных осей;

– третий вид – параллельный перенос (сдвиг) вдоль координатных осей.

В полярной системе координат применяется поворот на угол α, растяжение (сжатие) относительно начала координат (этот случай будет рассмотрен в примере 8).

Итак, рассмотрим задачи, к функциям которых применены элементарные преобразования.

**Пример 5.** Построить график функции $y = arcctg(x) + \frac{\pi}{6}$.

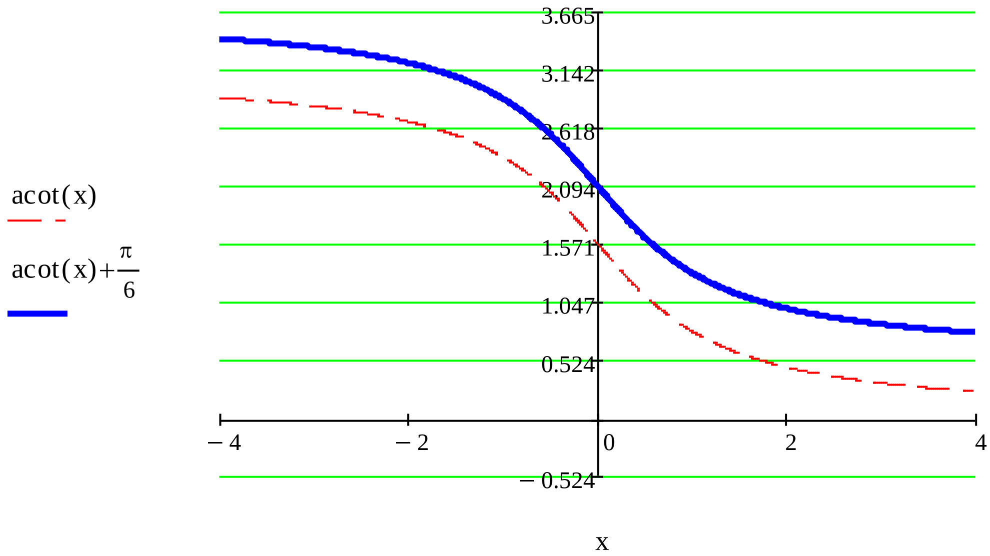


*Рис. 5. График функции $y = arcctg(x) + \frac{\pi}{6}$*

К функции $arcctg(x)$ прибавляется $\frac{\pi}{6}$. В этом случае происходит параллельный перенос, график смещается вверх на $\frac{\pi}{6}$. Вместе с графиком смещаются и асимптоты. Горизонтальными асимптотами графика функции $arcctg(x) + \frac{\pi}{6}$ являются прямые $y = \frac{\pi}{6}$ и $y = \frac{7\pi}{6}$.

**Пример 6.** Построить график функции $y = \arccos(\sqrt{2} \cdot x)$.

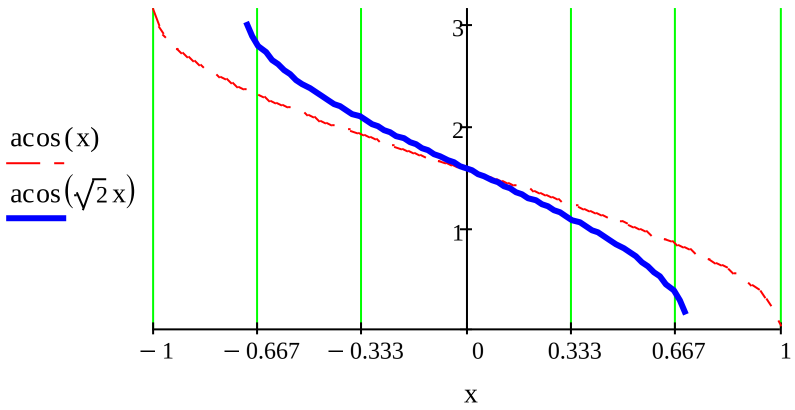


*Рис. 6. График функции $y = arccos(\sqrt{2} \cdot x)$*

Когда аргумент функции умножается на $\sqrt{2}$, то происходит сжатие графика вдоль оси OX в $\sqrt{2}$ раз. Область определения функции также сжимается в $\sqrt{2}$ раз. Если функция $\arccos(x)$ определена на отрезке $[-1; 1]$, то для функции $\arccos(\sqrt{2} \cdot x)$ областью определения является отрезок $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

**Пример 7.** Построить график функции $y = |x^2 + 6x|$.

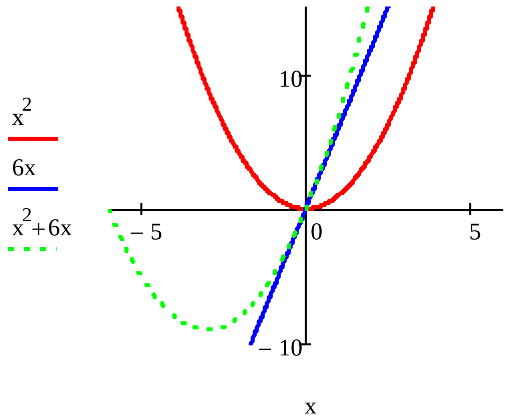


*Рис. 7. Графики функций: $x^2$, $6x$, $x^2 + 6x$*

Обратим внимание, во избежание ошибки рассуждений, что сложение двух функций $x^2$ и $6x$ не является элементарным преобразованием графиков функций. Поэтому сначала преобразуем функцию, выделив полный квадрат:

$$|x^2 + 6x| = |(x + 3)^2 - 9|.$$

Теперь при помощи элементарных преобразований построим последовательно графики функций (рис. 8):

1) $y = x^2$;
2) $y = (x + 3)^2$;
3) $y = (x + 3)^2 - 9$;
4) $y = |(x + 3)^2 - 9|$.

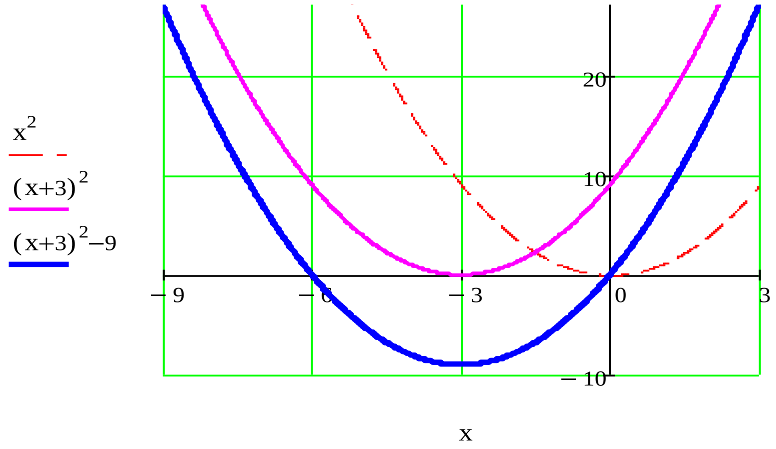


*Рис. 8. Графики функций:* $x^2$, $(x+3)^2$, $(x+3)^2-9$

График $x^2$ сдвигается на 3 единицы влево.
Затем график$(x+3)^2$ сдвигается на 9 единиц вниз.

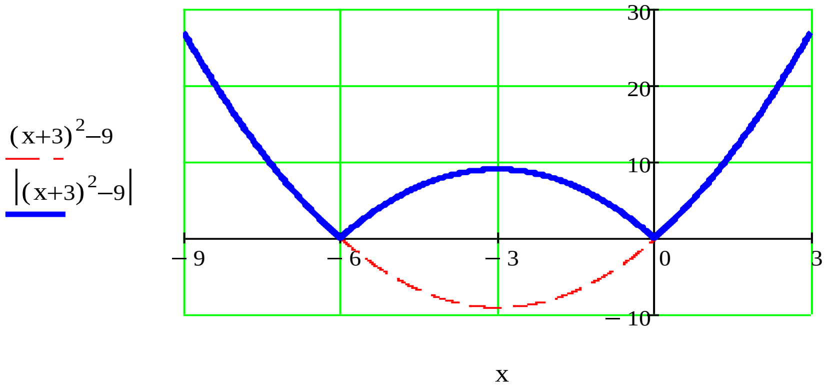


*Рис. 9. Итоговый график функции* $y=|x^2+6x|=|(x+3)^2-9|$

Добавление модуля ко всей функции приводит к тому, что часть графика, расположенного ниже оси ОХ, отображается вверх симметрично относительно оси ОХ (рис. 9).

**Пример 8.** Построить кривую в полярных координатах:

$$r(\varphi)=\cos(\varphi)+\sin(\varphi).$$

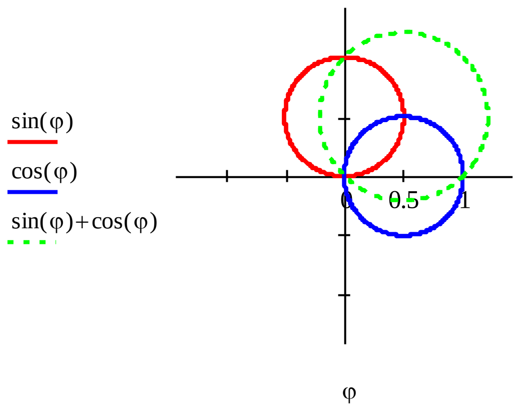


*Рис. 10. Графики функций:* $cos(\varphi), sin(\varphi),\ cos(\varphi)+sin(\varphi)$

Вновь обратим внимание, во избежание ошибки рассуждений, что «сложение двух окружностей» также не является элементарным преобразованием графиков функций. Поэтому необходимы тригонометрические преобразования функции:

$$\cos(\varphi) + \sin(\varphi) = \sqrt{2} \cdot \sin(\varphi + \tfrac{\pi}{4}).$$

При помощи элементарных преобразований построим последовательно графики функций (рис. 11, рис. 12):

1) $r(\varphi) = \sin(\varphi)$;
2) $r(\varphi) = \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$;
3) $r(\varphi) = \sqrt{2} \cdot \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$.

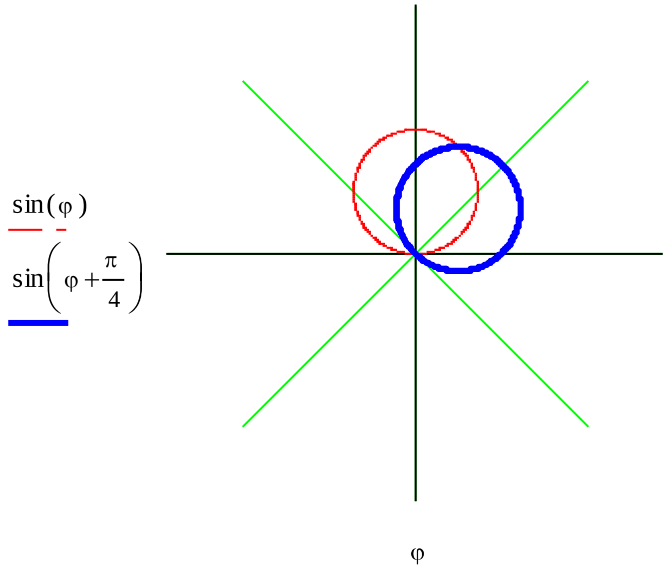


*Рис. 11. Графики функций:* $sin(\varphi)$, $sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$

График функции $\sin(\varphi)$ поворачивается на угол $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке.

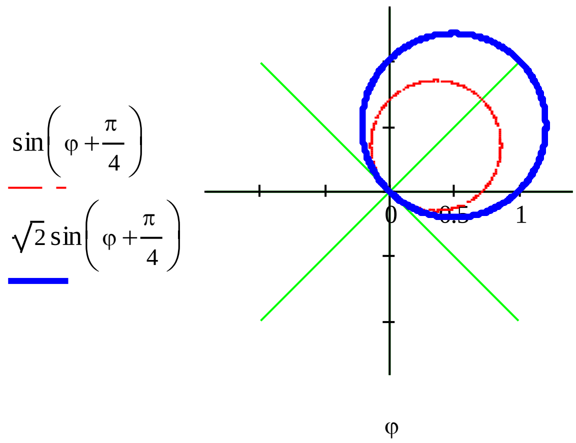


*Рис. 12. Итоговый график функции* $cos(\varphi) + sin(\varphi) = \sqrt{2} \cdot sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$

График функции $\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$ растягивается в $\sqrt{2}$ раз относительно начала координат, и получаем итоговый график (рис. 12).

## 3. Особенности построения графиков в MathCAD при наличии у функции точек разрыва

Перейдем к рассмотрению графика функции в MathCAD, имеющего точку разрыва, и отметим его особенности.

**Пример 9.** Пусть дана функция $f(x) = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x+3}{x-1}$, которая в точке $a = 1$ имеет устранимый разрыв. Как правило, MathCAD рисует график так, как будто функция разрыва не имеет (рис. 13).

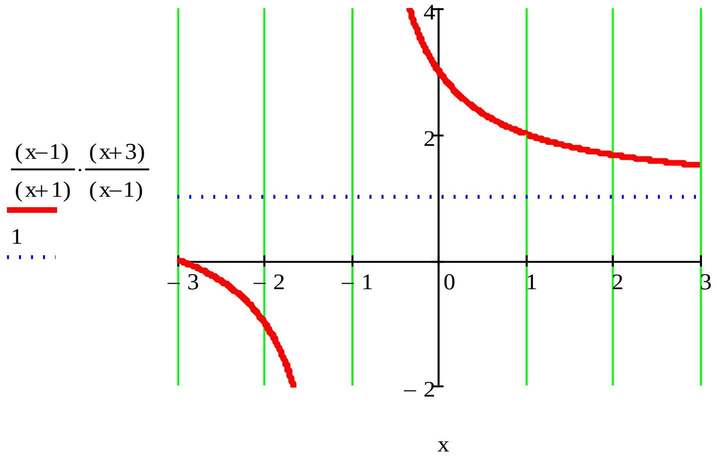


*Рис. 13. График функции* $f(x) = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x+3}{x-1}$

В этом случае необходимо самостоятельно отметить выколотую точку (рис. 14).

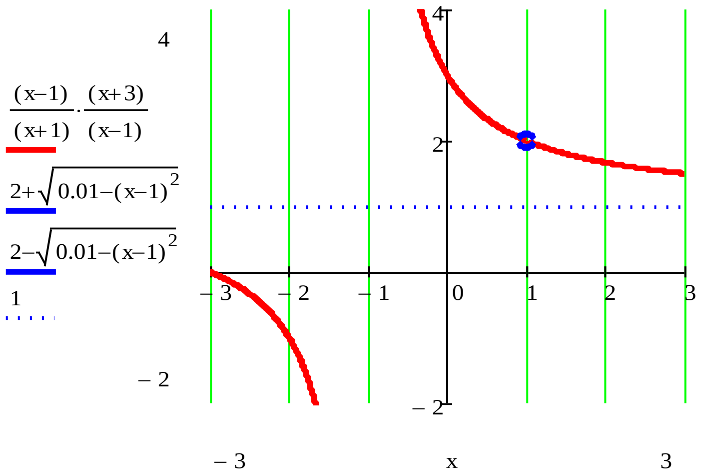


*Рис. 14. График функции* $f(x) = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x+3}{x-1}$ *с указанием точки разрыва*

Если у графика функции есть асимптоты (горизонтальные, наклонные, вертикальные), они также должны быть изображены как неотъемлемая часть графика.

Поскольку на первых занятиях первокурсники еще не знают классификацию точек разрыва, то мы решили подробно не освещать этот вопрос. Но нельзя не отметить, что при построении графиков в MathCAD существуют особенности их представления при наличии точек разрыва функции. Если читателю будет интересен этот вопрос, то он подробно освещен в [4].

Отметим, что построение графиков с использованием пакета прикладных программ MathCAD является несколько непривычным для студентов с точки зрения метода. Однако если инструмент усвоен, то решение задач сводится к построению графиков известных элементарных функций, результат получается весьма быстро и без необходимости «поточечного» построения графика. Чрезвычайная простота интерфейса MathCAD сделала эту систему одной из самых популярных среди систем поддержки математики и, безусловно, самой распространенной в студенческой среде. В работах [5–12] наглядно показано использование пакета MathCAD при дифференцировании, при построении графиков в различных системах координат и так далее. Таким образом, MathCAD – прекрасный инструмент для помощи студентам в их самостоятельной работе.

Наш опыт работы с первокурсниками показывает, что студенты с интересом воспринимают этот материал, их привлекает новизна использования программной среды MathCAD и скорость решения задач. Это существенно влияет на качество подготовки, приобретение определенного опыта и формирование необходимых профессиональных компетенций.

## Ссылки на источники

1. Ахметова Ф. Х., Буякевич А. Е. Методологические аспекты применения среды Mathcad в учебном процессе. Графики функций // Инженерный вестник (МГТУ им. Н.Э. Баумана). Электронный журнал. – 2015. – № 8. – URL: http://engbul.bmstu.ru/doc/789549.html.
2. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – С. 159–170. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm.
3. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Линейная комбинация функций, содержащих знак модуля и методика построения их графиков // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V6 (июнь). – С. 49–54. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170138.htm.
4. Ахметова Ф. Х., Буякевич А. Е. Указ. соч.
5. Там же.
6. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля.
7. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Линейная комбинация функций, содержащих знак модуля и методика построения их графиков.
8. Ахметова Ф. Х., Чигирева О. Ю. Обучение студентов дифференцированию в среде MathCAD //Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 8. – С. 86–91. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16168.htm.
9. Плис А. И., Сливина Н. А. Mathcad: Математический практикум для инженеров и экономистов: учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.
10. Бидасюк Ю. М. Mathsoft MathCAD 11: самоучитель. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2004. – 224 с.
11. Кирьянов Д. В. Mathcad 13. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 598 с.
12. Ахметова Ф. Х., Власов П. А. MathCAD. Решение задач математического анализа: интегрирование: метод. указ. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. – 36 с.

***Faniya Akhmetova,***
*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*
dobrich2@mail.ru
***Alexander Buyakevich,***
*Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*
alexanderbuy@mail.ru

**Investigation of some functions behavioral problems and graphs plotting using MathCAD environment**

**Abstract.** In this paper, a technique is presented for applying MathCAD environment in the learning process by investigating some problems of functions behavior and graphs plotting. Specific features of the graph representation in MathCAD are given when there are points of function discontinuity. The tasks and examples being solved are methodical recommendations for doing homework. The authors consider them as one of the forms of students' education organization and residual school mathematics knowledge revealing in first-year

students. They give the methodical instructions on the applied programs package use for students teaching and show the prospects of their application, which increases the efficiency of the material perception. The simplicity of MathCAD interface made this system one of the most popular among mathematics support systems and, certainly, the most common among students. Active use of software will create the necessary professional competencies for students of technical specialties. The content of the article will be useful for teachers and students preparing for classes.
**Keywords**: MathCAD environment, domain, even function, odd function, functions graphs.

**References**

1. Ahmetova, F. H. & Bujakevich, A. E. (2015). “Metodologicheskie aspekty primenenija sredy Mathcad v uchebnom processe. Grafiki funkcij”, *Inzhenernyj vestnik (MGTU im. N.Je. Baumana). Jelektronnyj zhurnal*, № 8. Available at: http://engbul.bmstu.ru/doc/789549.html (in Russian).
2. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Metodika postroenija grafikov linejnyh funkcij, soderzhashhih znak modulja”, *Nauchno-metodich,eskij jelektronnyj zhurnal “Koncept”*, № 5 (maj), pp. 159–170. Available at: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm (in Russian).
3. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Linejnaja kombinacija funkcij, soderzhashhih znak modulja i meto-dika postroenija ih grafikov”, *Nauchno-metodich,eskij jelektronnyj zhurnal “Koncept”*, № V6 (ijun'), pp. 49–54. Available at: http://e-koncept.ru/2017/170138.htm (in Russian).
4. Ahmetova, F. H. & Bujakevich, A. E. (2015). Op. cit.
5. Iibid.
6. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Metodika postroenija grafikov linejnyh funkcij, soderzhashhih znak modulja”.
7. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Linejnaja kombinacija funkcij, soderzhashhih znak modulja i meto-dika postroenija ih grafikov”.
8. Ahmetova, F. H. & Chigireva, O. Ju. (2016). “Obuchenie studentov differencirovaniju v srede MathCAD”, *Nauchno-metodich,eskij jelektronnyj zhurnal “Koncept”*, № 8, pp. 86–91. Available at: http://e-koncept.ru/2016/16168.htm (in Russian).
9. Plis, A. I. & Slivina, N. A. (2003). *Mathcad: Matematicheskij praktikum dlja inzhenerov i jekonomistov: ucheb. posobie,* 2-e izd., pererab. i dop., Finansy i statistika, Moscow, 656 p. (in Russian).
10. Bidasjuk, Ju. M. (2004). *Mathsoft MathCAD 11: samouchitel'*, Izd. dom “Vil'jams”, Moscow, 224 p. (in Russian).
11. Kir'janov, D. V. (2006). *Mathcad 13*, BHV-Peterburg, St. Petersburg, 598 p. (in Russian).
12. Ahmetova, F. H. & Vlasov, P. A. (2008). *MathCAD. Reshenie zadach matematicheskogo analiza: integrirovanie: metod. ukaz.,* Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow, 36 p. (in Russian).

***Рекомендовано к публикации:***
*Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Поступила в редакцию *Received* | 24.08.17 | Получена положительная рецензия *Received a positive review* | 31.08.17 |
| Принята к публикации *Accepted for publication* | 31.08.17 | Опубликована *Published* | 30.09.17 |

ISSN 2304-120X
09
9 772304 120173
**www.e-koncept.ru**