ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Ласковая Т. А., Пелевина И. Н. Методические аспекты изложения темы «Непрерывность функции в точке и точки разрыва» в курсе математического анализа // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V10. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/171037.htm.

ART 171037 **УДК 378.147:372.851**

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Ласковая Татьяна Алексеевна,
старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
talaskovy@mail.ru

Пелевина Ирина Николаевна,
старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
pdv62@mail.ru

Методические аспекты изложения темы «Непрерывность функции в точке и точки разрыва» в курсе математического анализа

Аннотация. *В статье предлагается вариант изложения материала по теме «Непрерывность функции в точке». Необходимый теоретический материал подкреплен примерами. Задачи по данной теме подобраны таким образом, чтобы наглядно проиллюстрировать основные понятия темы. Кроме того, разобранные задачи и примеры представляют собой методические рекомендации по выполнению домашнего задания и подготовке к рубежному контролю. Авторы рассматривают их как одну из форм организации обучения студентов и выявления остаточных знаний по указанной теме. Для удобства восприятия изложенного материала классификация точек разрыва представлена в виде таблицы с иллюстрацией в ней типовых примеров. Содержание статьи будет полезным преподавателям и студентам.*
Ключевые слова: *непрерывная функция, пределы функции слева и справа, точка непрерывности, точка разрыва.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Прежде всего, отметим, что в курсе «Математический анализ» основным объектом изучения является функция. На первых занятиях первокурсники на базе школьных знаний разбирают такие вводные понятия, как область определения, четность, нечетность функций, построение их графиков с помощью элементарных преобразований [1, 2]. Однако при рассмотрении математических моделей многих физических процессов используются функции с различным характером поведения. Они могут обладать свойствами непрерывности или иметь точки разрыва, но в любом случае для точного решения математических задач интуитивных представлений об этих понятиях недостаточно. Необходимо знать условия, при выполнении которых функция считается непрерывной, и теоремы, необходимые при решении задач [3–6].

Перейдем к рассмотрению основного определения непрерывности функции. Пусть функция $y=f\left(x\right)$ определена в некоторой окрестности точки *a* числовой прямой.

Определение 1. Функцию $f\left(x\right)$ называют **непрерывной** в точке a, если в этой точке существует конечный предел функции и он совпадает со значением $f\left(a\right)$ в этой точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Ласковая Т. А., Пелевина И. Н. Методические аспекты изложения темы «Непрерывность функции в точке и точки разрыва» в курсе математического анализа // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V10. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/171037.htm.

Точку, в которой функция непрерывна, называют точкой непрерывности этой функции.

Следует отметить, что предел функции в точке существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют и правый, и левый пределы и они равны.

Определение 2. Точка a называется **точкой непрерывности** функции $f(x)$, если выполнены все следующие условия:

1. Функция определена в самой точке a (т. е. существует $f(a)$) и в некоторой ее окрестности.
2. Существуют односторонние конечные пределы функции: $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.
3. Эти односторонние пределы совпадают, т. е. $f(a+0)=f(a-0)$.
4. Совпадающие односторонние пределы равны значению функции в точке a, т. е. $f(a+0)=f(a-0)=f(a)$.

Таким образом, при исследовании функции на непрерывность студент должен проверить все четыре пункта определения 2 и убедиться в их выполнении.

Полезно напомнить важные теоремы о свойствах функций, непрерывных в точке.

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $a\in\mathbb{R}$, то $cf(x)$ (c – постоянная), сумма $f(x)+g(x)$, произведение $f(x)g(x)$, и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при условии что $g(a)\neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке $a\in\mathbb{R}$.

Теорема 2. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, а функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y=b=f(a)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке $x=a$.

Таким образом, операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия непрерывной функции, то есть $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$.

Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется просто **элементарной** функцией. Поэтому из приведенных выше теорем и рассуждений вытекает следующее важное утверждение.

Утверждение 1. Всякая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

Таким образом, если точка $x=a$ принадлежит области определения элементарной функции, то значение предела этой функции при $x\to a$ совпадает с ее значением $f(a)$ в этой точке.

Например, $\lim\limits_{x\to a} 3^{\frac{x}{4-x^2}}=3^{\frac{a}{4-a^2}}$, если $a\neq -2$ и $a\neq 2$.

Определение 3. Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $a\in\mathbb{R}$, то эта точка называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, а функция $f(x)$ называется разрывной в этой точке.

Точки разрыва можно разделить на две группы согласно причинам, вызвавшим разрыв. Рассмотрим классификацию точек разрыва.

Определение 4. Точка разрыва a называется **точкой устранимого разрыва**, если в ней существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a+0)=f(a-0)$, но в точке a функция $f(x)$ либо не определена, либо имеет значение $f(a)$, отличное от значения предела в этой точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$.

Таким образом, в точке устранимого разрыва не выполняется условие 4 из определения 2.

Название «точка устранимого разрыва» обусловлено тем, что в этой точке функцию $f(x)$ можно видоизменить или доопределить (если она не была определена в точке a), положив $f(a)=f(a+0)=f(a-0)$. Видоизмененная таким образом функция будет непрерывной в точке a, и в этом случае говорят, что разрыв в точке a можно устранить.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$. Эта функция имеет в точке $x=5$ разрыв, так как она не определена в ней. Поскольку существует конечный $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x+5)}{(x-5)}=10$, то точка $x=5$ является точкой устранимого разрыва. График функции представлен на рис. 1.

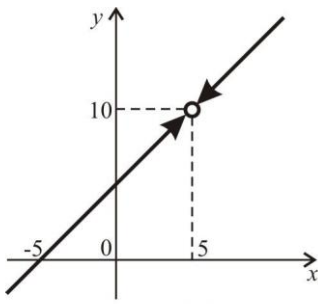

Рис. 1. График функции $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$

Доопределим функцию до непрерывной:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5}, & x\neq 5\\ 10 & , x=5\end{cases}.$$

Измененная таким образом функция будет непрерывной на всей числовой оси.

Определение 5. Точка разрыва a называется **точкой разрыва первого рода,** если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы: $f(a+0)\neq f(a-0)$.

Итак, для точки разрыва первого рода выполнено, по крайней мере, условие 2 непрерывности функции в точке. Величина $\triangle f(a)=f(a+0)-f(a-0)$ называется скачком функции в точке a.

Таким образом, из определений 3 и 4 видно, что общим для точек устранимого разрыва и точек разрыва первого рода является наличие конечных пределов $f(a-0)$ и $f(a+0)$.

Пример 2. Примером функции, имеющей разрыв первого рода, может служить функция $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}$. Она является элементарной и поэтому непрерывна во всех точках своей области определения. Единственной точкой разрыва является точка $x=4$, так как в ней функция не определена. Однако при $x\to 4$ функция имеет конечные левый и правый пределы, причем эти пределы различны:

$$f(4-0)=\lim_{x\to 4-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}=\{\operatorname{arctg}(-\infty)\}=-\frac{\pi}{2}$$

$$f(4+0)=\lim_{x\to 4+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}=\{\operatorname{arctg}(+\infty)\}=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, согласно определению 5, точка $x=4$ является точкой разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке:

$$\triangle f(4)=f(4+0)-f(4-0)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

График функции в окрестности точки $x=4$ изображен на рис. 2.

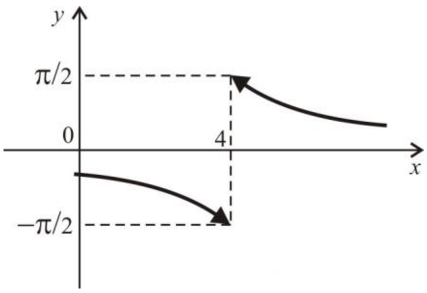

Рис. 2. График функции $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}$

Все остальные точки разрыва относятся к точкам разрыва второго рода.

Определение 6. Точка разрыва a называется **точкой разрыва второго рода,** если в ней хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен или не существует.

Пример 3. Хорошо известная студентам функция $f(x)=\operatorname{tg}x$ является основной элементарной функцией и непрерывна во всех точках своей области определения. Следовательно, точками разрыва будут точки $x_k=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ (k\in Z)$, так как $f(x_k)$ не существует. Чтобы определить вид точек разрыва, вычислим односторонние пределы функции:

$$f(x_k-0)=\lim_{x\to x_k-0}\operatorname{tg}x=+\infty\ ,$$

$$f(x_k+0)=\lim_{x\to x_k+0}\operatorname{tg}x=-\infty\ .$$

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Ласковая Т. А., Пелевина И. Н. Методические аспекты изложения темы «Непрерывность функции в точке и точки разрыва» в курсе математического анализа // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V10. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/171037.htm.

Согласно определению 6, точки $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \left(k \in Z\right)$ являются точками разрыва второго рода. Поскольку в этом случае функция имеет бесконечные односторонние пределы, то говорят, что функция имеет бесконечный разрыв. График этой функции изображен на рис. 3.

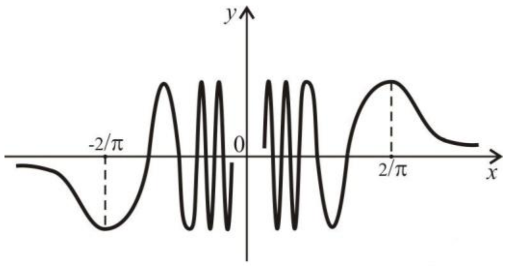

Рис. 3. График функции $f(x) = \operatorname{tg} x$

Пример 4. В качестве еще одного примера функции, имеющей разрыв второго рода, рассмотрим функцию $f\left(x\right) = \sin\frac{1}{x}$. Она определена, а следовательно, и непрерывна всюду, кроме точки $x = 0$. Однако эта функция при $x \to 0$ не имеет ни правого, ни левого предела, ни конечного, ни бесконечного.

Следовательно, $x = 0$ – точка разрыва второго рода. График этой функции изображен на рис. 4.

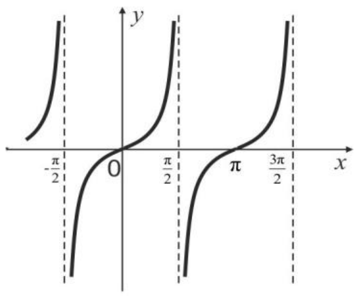

Рис. 4. График функции $f\left(x\right) = \sin\frac{1}{x}$

Для систематизации теоретического материала и удобства восприятия классификации точек разрыва представим изложенные выше результаты в виде таблицы.

В таблице указаны разобранные выше примеры. Для лучшего закрепления материала полезно будет предложить студентам заполнить третью графу самостоятельно, подобрав соответствующие примеры.

В заключение рассмотрим функцию, которая задается различными аналитическими выражениями на разных интервалах множества изменения переменной X. В этом случае необходимо дополнительно исследовать на непрерывность функцию на границах этих интервалов.

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию $f\left(x\right)$. Указать все точки разрыва и определить их характер. Дать графическую иллюстрацию.

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{4^x - 2}{2x - 1}, & x \le 1 \\ \sqrt{x+3}, & x > 1 \end{cases}$$

Точка разрыва	***Определение***	***Пример***
$x=a$ **точка устранимого разрыва**	Существуют конечные правый $f(a+0)$ и левый $f(a-0)$ пределы, причем $f(a+0)=f(a-0)$, но $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$	$f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ $x=5$ – точка устранимого разрыва; $f(5+0)=f(5-0)=10$, но $f(5)$ не существует
$x=a$ **точка разрыва первого рода**	Существуют конечные правый $f(a+0)$ и левый $f(a-0)$ пределы, но $f(a+0)\neq f(a-0)$	$f(x)=arctg\dfrac{1}{x-4}$ $x=4$ – точка разрыва первого рода; $f(4+0)=\dfrac{\pi}{2}\neq-\dfrac{\pi}{2}=f(4-0)$
$x=a$ **точка разрыва второго рода**	Хотя бы один из пределов $f(a+0)$, $f(a-0)$ не существует или равен бесконечности	1) $f(x)=\operatorname{tg}x$ $x_k=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,(k\in Z)$ – точка разрыва второго рода, $f(x_k-0)=+\infty$, $f(x_k+0)=-\infty$ (бесконечный разрыв); 2) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ $x=0$ – точка разрыва второго рода, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ не существует

Решение. Сразу отметим, что точками разрыва будут те точки, в которых не определены функции, входящие в выражение, задающее функцию. Кроме того, точкой возможного разрыва будет точка $x=1$, поскольку в этой точке правый и левый пределы могут не совпадать.

Таким образом, имеем две точки: $x_1=1/2$ – точка разрыва функции и $x_2=1$ – точка возможного разрыва функции.

Определим характер разрыва в точке $x_1=1/2$; для этого вычислим односторонние пределы:

$$f\left(\frac{1}{2}-0\right)=f\left(\frac{1}{2}-0\right)=\lim_{x\to 1/2}\frac{4^x-2}{2x-1}=\left|\begin{array}{l}Замена\ t=x-1/2,\\ x\to 1/2\Rightarrow t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{4^{t+1/2}-2}{2t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2(4^t-1)}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\ln 4}{t}=\ln 4.$$

Поскольку пределы конечны и равны, при $x_1=1/2$ функция имеет устранимый разрыв.

Теперь определим характер разрыва в точке $x_2 = 1$, для этого также вычислим односторонние пределы, не забывая о том, что слева и справа от этой точки функции определены по-разному:

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{4^x-2}{2x-1} = 2,$$

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \sqrt{x+3} = 2.$$

Таким образом, оба предела конечны и совпадают; кроме того, они равны значению функции в этой точке: $f(1-0) = f(1+0) = f(1) = 2$. Следовательно, согласно определению 1, функция непрерывна в точке $x_2 = 1$. График функции в окрестностях точек разрыва изображен на рис. 5.

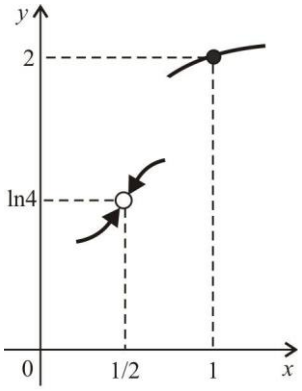

Рис. 5. График функции $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4^x-2}{2x-1}, & x \le 1 \\ \sqrt{x+3}, & x > 1 \end{cases}$

Функцию можно видоизменить так, чтобы она стала непрерывной:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4^x-2}{2x-1}, & x < 1/2 \\ \ln 4 \quad , & x = 1/2 \\ \dfrac{4^x-2}{2x-1}, & 1/2 < x \le 1 \\ \sqrt{x+3}, & x > 1 \end{cases}$$

Подводя итог, можно сказать, что предложенная в статье методика позволит достаточно быстро сформировать прочные навыки решения задач на непрерывность функции в точке. Сформулируем основные положения и этапы решения:

1. Исследовать функцию на непрерывность – это значит ответить на вопрос: есть ли точки разрыва или нет? Для этого студент должен проверить все четыре пункта определения 2, убедиться в их выполнении и считать функцию непрерывной.
2. Если функция имеет точки разрыва, то необходимо определить их характер и классифицировать.

3. Если функция задана различными аналитическими выражениями на разных интервалах множества изменения переменной x, то необходимо проверить левый и правый пределы в точках возможного разрыва и в точках «стыковки» функции, т. е. на границах этих интервалов.

4. Для наглядности полезно дать геометрическую иллюстрацию в окрестностях точек разрыва и на границах различных интервалов, если они имеются.

Овладение навыками исследования функций на непрерывность в точках будет полезным при выполнении целого спектра задач.

Ссылки на источники

1. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – С. 159–170. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm.
2. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Линейная комбинация функций, содержащих знак модуля и методика построения их графиков // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V6. – С. 49–54. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170138.htm.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: в 2 т. Т. 1. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2001. – 646 с.
4. Морозова В. Д. Введение в анализ. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. – 408 с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие для втузов: в 2 т. Т. 1. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 416 с.
6. Ахметова Ф. Х., Ласковая Т. А., Пелевина И. Н. Введение в анализ. Теория пределов: метод. указания к решению задач по теме «Предел и непрерывность функций»: в 3 ч. Ч. 3. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 24 с.

Faniya Akhmetova,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, N. E. Bauman Moscow State Technical University, Moscow
dobrich2@mail.ru
Tatiana Laskovaya,
Senior lecturer, N.E. Bauman Moscow State Technical University, Moscow
talaskovy@mail.ru
Irina Pelevina,
Senior lecturer, N.E. Bauman Moscow State Technical University, Moscow
pdv62@mail.ru

Methodical aspects of the topic presentation "Continuity of a function at a point. Points of discontinuity" in "Mathematical Analysis" course

Abstract. In this article, a version of the topic "Continuity of a function at a point" presentation is proposed. The necessary theoretical material is supported by examples. The tasks on this topic are selected in such a way that clearly illustrates the basic concepts of the topic. In addition, the selected tasks and examples represent methodological recommendations for homework doing and preparation for control work. The authors consider them as one of the students' education organizing forms and revealing residual knowledge on the topic. For convenience of the stated material perception, points of discontinuity classification is presented in the form of a table with illustration of typical examples. The content of the article will be useful for teachers and students.

Key words: continuous function, left and right limits of function, a point of continuity, a point of discontinuity.

References

1. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Metodika postroenija grafikov linejnyh funkcij, soderzhashhih znak modulja”, *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal “Koncept”,* № 5 (maj), pp. 159–170. Available at: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm (in Russian).
2. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Linejnaja kombinacija funkcij, soderzhashhih znak modulja i metodika postroenija ih grafikov”, *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal “Koncept”,* № V6, pp. 49–54. Available at: http://e-koncept.ru/2017/170138.htm (in Russian).
3. Il'in, V. A. & Poznjak, Je. G. (2001). *Osnovy matematicheskogo analiza: v 2 t. T. 1*, 4-e izd., pererab. i dop., Fizmatlit, Moscow, 646 p. (in Russian).
4. Morozova, V. D. (2005). *Vvedenie v analiz,* Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow, 408 p. (in Russian).

5. Piskunov, N. S. (2006). *Differencial'noe i integral'noe ischislenie: ucheb. posobie dlja vtuzov: v 2 t. T. 1*, Integral-Press, Moscow, 416 p. (in Russian).
6. Ahmetova, F. H., Laskovaja, T. A. & Pelevina, I. N. (2014). *Vvedenie v analiz. Teorija predelov: metod. ukazanija k resheniju zadach po teme “Predel i nepreryvnost' funkcij”: v 3 ch. Ch. 3*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow, 24 p. (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru

Поступила в редакцию *Received*	01.10.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	15.10.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	15.10.17	Опубликована *Published*	29.10.17