ISSN 2304-120X
научно-методический электронный журнал «Концепт»

Шабалина М. Р., Хохлова М. В., Ситникова И. В. Особенности изложения темы «Основы векторного исчисления» в техническом вузе // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V10. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/171028.htm.

ART 171028 УДК 378.147:372.851

Шабалина Марина Робертовна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров
mrshab@bk.ru

Хохлова Марина Владиславовна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров
mv_hohlova@mail.ru

Ситникова Ирина Викторовна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров
i.sitn@mail.ru

Особенности изложения темы «Основы векторного исчисления» в техническом вузе

Аннотация. *В статье рассматриваются существующие в учебной литературе подходы к определению понятия «геометрический вектор». Предлагается обоснованное с точки зрения физико-технических дисциплин определение понятия «векторная величина». Исследуется специфика операций над векторами, заданными в реальном физическом пространстве. Рассматривается дифференциация векторных величин, принятая в физических и технических приложениях.*
Ключевые слова: *векторные величины, множество направленных отрезков, отношение эквивалентности, связанные векторы, скользящие векторы, аксиальные векторы, полярные векторы.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

В современном высокотехнологичном обществе стремительное развитие информационных и коммуникационных технологий существенно изменило содержание инженерного труда. Как следствие, значительно возросли требования не только к специальной, но и к фундаментальной подготовке студентов инженерно-технических направлений. Математика для инженерно-технических специальностей является методологической основой для изучения практически всех общетехнических и специальных дисциплин. «Математика – это язык, на котором говорят все точные науки», – говорил Н. И. Лобачевский. Стройная и логичная система математических знаний и методов служит универсальным инструментом в решении естественнонаучных и инженерно-технических задач. Преподавание базового курса математики, изучаемый в инженерно-технических вузах, имеет устоявшиеся традиции. Но, тем не менее, трактовка некоторых фундаментальных понятий, важных не только для математических, но и для целого ряда физико-технических дисциплин, нуждается в переосмыслении. Примером может служить тема «Введение в векторное исчисление». По существу, вузовское изложение данной темы представляет собой расширенное изложение векторной алгебры школьного курса математики. Следует заметить, что основные вопросы данной темы дублируются в школьном курсе физики. Базовые понятия векторной алгебры рассматриваются также и в вузе – в курсе технической механики. Казалось бы, в результате у обучающихся должно сформироваться четкое представление об основных понятиях и методах векторной алгебры, понимание практического приложения данной темы в инженерно-технической деятельности. Но в реальном учебном процессе всего этого мы не наблюдаем. Обратимся к определению базового понятия: что называется вектором? Так как эта тема изучается в школьном курсе математики, то большинство преподавателей вуза, задав этот вопрос студентам на вводной лекции, как правило, слышат ответ: «Вектор – это направленный отрезок». С точки зрения элементарной геометрии вектор – это геометрический объект, характеризуемый направлением, которое задается с точностью до параллельности прямой, и длиной. В вузовских учебниках и задачниках общепринятым является определение вектора как множества всех параллельных между собой, одинаково направленных и имеющих одинаковую длину отрезков. Так, например, А. В. Ефимов и А. С. Поспелов дают следующее определение: «Вектором (геометрическим вектором) $\mathbf{a}$ называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление» [1]. Для физико-технических дисциплин подобное определение векторной величины не является однозначным и исчерпывающим. Проблема состоит в том, что в технике и естествознании, как правило, исследуются не математические объекты вообще, обладающие теми или иными формальными свойствами, а объекты конкретной физической природы. Так, например, в классической механике, электродинамике и в других физико-технических дисциплинах под словом «вектор», без каких-либо дополнительных уточнений, понимается не «какой-то вектор любого линейного пространства вообще», а, как правило, в связи с «реальным физическим пространством». В качестве такового может служить трехмерное пространство классической физики или четырехмерное пространство-время физики релятивистской.

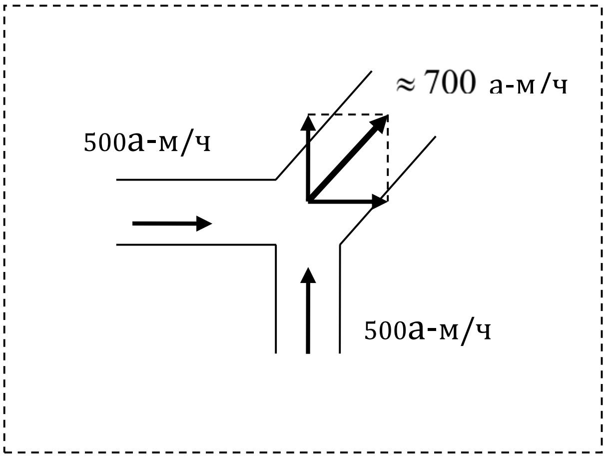
Как показывает практика, формальное определение вектора как объекта, характеризуемого числовой величиной и направлением, не формирует у студентов четкого представления об области применения методов векторной алгебры. В результате мы рискуем столкнуться с проблемами, суть которых можно проиллюстрировать примером, приведенным А. Е. Умновым: «Поток автомобилей (то есть количество автомобилей, проезжающих мимо наблюдателя за единицу времени) на конкретной дороге является объектом, для характеристики которого нужно указать как его величину (число проходящих за единицу времени автомашин), так и его направление». Если подойти к определению вектора формально, то данный объект – это вектор. «Рассмотрим перекресток трех дорог, показанный на рисунке, на котором сливаются два потока автомобилей по 500 автомашин в час каждый. Если суммировать потоки как векторы, то вместо очевидного результата 1000 а-м/ч мы получим (по правилу параллелограмма) заведомо бессмысленное значение $500\sqrt{2} \approx 700$ а-м/ч. Отсюда следует, что, хотя поток автомашин характеризуется числовым значением и направлением, но, тем не менее, вектором не является» [2] (см. рис.).

Физико-технические дисциплины дают нам многочисленные примеры векторных величин, таких как скорость, ускорение, сила, напряженность поля и т. д. Все эти физические величины имеют размер и направление. И, что очень важно, для этих физических объектов определены операции сравнения, сложения и умножения на число. Предметом изучения теории векторных пространств являются алгебраические свойства векторов. Но в то же время определение вектора как объекта любой природы, для которого установлены операции сложения и умножения на число и который, в свою очередь, обладает следующими свойствами: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$; $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$; $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0; \cdots 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $(\lambda_1 \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1(\lambda_2 \vec{a})$; $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$; $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$, также не является однозначным и исчерпывающим. Находясь в рамках этой дефиниции, к векторам можно отнести объекты, с точки зрения физики не имеющие никакого

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Шабалина М. Р., Хохлова М. В., Ситникова И. В. Особенности изложения темы «Основы векторного исчисления» в техническом вузе // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V10. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2017/171028.htm.



отношения к векторным величинам. Например, многочлены $P_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, а также преобразование Фурье в классической электродинамике и классической теории сплошных сред.

С технической точки зрения наиболее корректным можно считать определение вектора как совокупности направленных отрезков, для которых введены операции сравнения, сложения и умножения на число. Подобный подход к определению понятия вектора практикуется, в частности, в одном из ведущих технических вузов страны – в Московском физико-техническом институте. Так, например, в курсе лекций, читаемых студентам физических и технических специальностей Московского физико-технического института, базовое понятие векторной алгебры – направленного отрезка – определяется как отрезок прямой, для которого указано, какая из двух точек является началом и какая – концом отрезка. Далее рассматриваются действия с направленными отрезками: сравнение, сложение и умножение на число. «Совокупность всех направленных отрезков, для которых введены операции сравнения, сложения, умножения на вещественное число, называется множеством векторов. Конкретный элемент этого множества называется вектором» [3]. Таким образом, оставаясь в рамках геометрической теории, мы вводим алгебраические операции над направленными отрезками. Из вышесказанного следует очень важный вывод: вектор имеет двойственную природу – он одновременно является и алгебраическим, и геометрическим объектом. Поэтому, рассматривая множество направленных отрезков, мы не можем трактовать операцию сравнения как равенство направленных отрезков (авторы большинства отечественных учебников и задачников придерживаются именно такой трактовки). Речь может идти только об их эквивалентности. А именно: «два ненулевых направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются эквивалентными, если их начала и их концы могут быть совмещены параллельным переносом одного из этих отрезков. Соответственно, то, что направленный отрезок $\overline{AB}$ имеет ту же длину и направление, что и отрезок $\overline{CD}$, обозначается следующим образом: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$» [4].

То, что речь может идти только об эквивалентности направленных отрезков, вытекает из следующих свойств отношения «~»:

1) $\overline{AB} \sim \overline{AB}$ (отношение «~» рефлексивно);
2) если $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, то $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ (отношение «~» симметрично);
3) если $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ и $\overline{CD} \sim \overline{PQ}$, то $\overline{AB} \sim \overline{PQ}$ (отношение «~» транзитивно).

Таким образом, отношение «~» есть отношение эквивалентности. Если направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ эквивалентны, то $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.

Следует заметить, что направленные отрезки часто называют связанными векторами. Векторы же, рассматриваемые как в школьном, так и в вузовском курсе математики, являются свободными. Их можно переносить параллельно самим себе в любую точку плоскости или пространства. В физико-технических дисциплинах вектор – это величина, характеризующаяся направлением, модулем (числовым значением) и точкой приложения. Классическим примером может служить вектор силы. Прямую линию, вдоль которой направлена сила, в курсе физики называют линией действия силы. Безусловно, понятия «линия действия» и «направление» не тождественны, так как по линии действия можно определить направление с точностью до противоположного. Предполагается, что действие силы на твердое тело не изменится, если точку ее приложения перенести по линии действия в любую точку этого тела. Как результат – появляется класс векторных величин, называемых скользящими векторами. Действие силы на тело может измениться, если точка приложения силы находится за пределами этой линии. В зависимости от той роли, которую играет точка приложения векторной физической величины, в механике векторы принято подразделять на свободные, скользящие и закрепленные.

Существенным при решении физико-технических задач является и то, что векторные объекты обладают размерностью. Размерность вектора – это размерность его модуля. А это в определенной мере ограничивает область применения линейных операций над векторами. Так, например, в курсе физики можно складывать только векторные объекты, обладающие одинаковой размерностью: скорость со скоростью, силу с силой. Таким образом, математическая операция сложения векторов отражает физический принцип суперпозиции, согласно которому результатом действия совокупности источников векторной величины (например, силы) является векторная сумма воздействий каждого источника по отдельности.

В курсе математики два вектора, связанные операцией умножения на число, принято называть линейно зависимыми (коллинеарными). В механике, как и в математике, понятие линейной зависимости двух векторов также предполагает возможность выразить одну векторную величину через другую. Например, будем рассматривать некоторую силу $\vec{f}$, приложенную к некоторому телу в некоторой точке, в заданном направлении, равной по абсолютной величине 1Н как эталон силы в системе СИ. Операция умножения на некоторое вещественное число λ позволяет выразить любую силу $\vec{F}$, коллинеарную $\vec{f}$, через эталонную: $\vec{F} = \lambda\vec{f}$, где λ – это величина безразмерная, выражающая число эталонных единиц силы – ньютонов. Но не всегда при решении физико-технических задач результат произведения векторной величины на скалярную (число) трактуется как вектор, коллинеарный исходному. Речь идет об умножении векторной величины на скалярную, которая также может иметь свою размерность. Например, второй закон Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ устанавливает связь между силой, действующей на тело, и векторной величиной, определяющей динамику движения тела. Эта векторная величина – вектор ускорения – имеет совсем другую размерность. Связь между вектором силы и вектором ускорения осуществляется через скалярный множитель *m* – массу тела, являющуюся мерой инерции. Бессмысленно говорить о том, что вектор силы $\vec{F}$ в *m* раз больше вектора ускорения, поскольку вектор силы и вектор ускорения имеют разный физический смысл.

Особое место в системе векторных величин, рассматриваемых в технических дисциплинах, занимают аксиальные векторы, или, как их еще называют, псевдовекторы. Различие между аксиальными и полярными (истинными) векторами проявляется при инверсии системы координат. Традиционно при изменении направления всех осей координат на противоположное правая система координат переходит в левую. При этом координаты полярных векторов также поменяют свой знак на противоположный. Примерами полярных векторов в механике являются радиус-вектор $\vec{r}$, скорость $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$, ускорение $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$, сила $\vec{F}=m\vec{a}$, в то время как координаты аксиального вектора, являющегося результатом, например, векторного произведения двух полярных векторов в трехмерном пространстве $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$, $[\vec{a},\vec{b}]=\{a_yb_z-a_zb_y;a_zb_x-a_xb_z;a_xb_y-a_yb_x\}$, знаки не поменяют. Примером аксиального вектора в механике может служить момент импульса $\vec{L}=[\vec{r},\vec{p}]$. Физические величины, выражаемые через векторное произведение, такие как напряженность магнитного поля, момент силы, угловая скорость вращения, – псевдовекторы. При решении технических задач необходимо учитывать эти различия в поведении аксиальных и полярных векторов. Существенным является то, что в технических дисциплинах все физические законы должны выражаться в инвариантной форме, то есть не должны зависеть от выбора системы координат. Это, в частности, означает, что невозможно, например, равенство аксиального и полярного векторов, так как оно не будет выполняться одновременно и в правосторонней, и левосторонней системах координат. По этой же причине некорректно будет выглядеть сумма или разность межу аксиальным и полярным векторами.

Следует заметить, что иногда в физических теориях псевдовекторы, присутствуя в формулах как промежуточные величины, в конечном результате векторного произведения с полярными векторами дадут также полярный вектор. Например, в классической электродинамике индукция магнитного поля – псевдовектор, порождаемый псевдовекторной операцией: $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\gamma}\frac{I[d\vec{l},\vec{r}-\vec{r}_0]}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$. Однако в выражении для силы Лоренца $\vec{F}=q(\vec{E}+[\vec{v},\vec{B}])$ содержится еще одна псевдовекторная операция – векторное произведение полярного и аксиального векторов, дающее еще один условный множитель ±1, который нейтрализует зависимость знака индукция магнитного поля от выбора системы координат, так как произведение ±1·(±1) дает просто 1.

Аналогичное исследование можно провести и со скалярными величинами. Существуют не только истинные скаляры, инвариантные к любым преобразованиям системы координат (не только к вращениям, но и к инверсии), но и псевдоскалярные величины, инвариантные к вращениям и меняющие знак, когда правая система переходит в левую (и наоборот). Псевдоскалярной величиной будет, например, результат скалярного произведения полярного и аксиального векторов.

Вектор и его обобщение – тензор, несомненно, являются одним из фундаментальных понятий современной математики. Широкое применение векторного анализа как математического аппарата для целого ряда технических дисциплин обусловлено прежде всего тем, что векторные представления адекватно передают суть многих закономерностей физических процессов. С помощью векторных величин достигается единство аналитических и геометрических методов исследования. Дополняя содержание обучения по теме «Введение в векторное исчисление» задачами прикладного характера, позволяющими студентам более глубоко и прочно освоить теорию и методологию данной темы, мы создаем педагогические условия для повышения учебной мотивации обучающихся. Формирование профессионально ориентированных математических знаний и умений, в свою очередь, способствует развитию инженерного стиля мышления, столь значимого для дальнейшей профессиональной деятельности студентов инженерно-технических направлений подготовки. В свою очередь, формальный подход к определению базовых математических понятий, лишенный связей с реальным физическим пространством, может создать условия для когнитивной дезориентации студентов в учебной, а в дальнейшем и в их профессиональной деятельности.

Ссылки на источники

1. Берс Л. Математический анализ: учеб. пособие для втузов / пер. с англ. Л. И. Головиной / под ред. И. М. Яглома. Т. 1. – М.: Высш. шк., 1975. – 519 с.
2. Ефимов А. В. Сборник задач по математике для втузов: учеб. пособие для втузов: в 4 частях. Ч. 1 / под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2008. – 288 с.
3. Там же.
4. Умнов А. Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: МФТИ, 2011. – 544 с.

Marina Shabalina,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Fundamental and Computer Mathematics Chair, Vyatka State University, Kirov
mrshab@bk.ru
Marina Khokhlova,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Fundamental Informatics and Applied Mathematics Chair, Vyatka State University, Kirov
mv_hohlova@mail.ru
Irina Sitnikova,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Fundamental Informatics and Applied Mathematics Chair, Vyatka State University, Kirov
i.sitn@mail.ru

Features of “Vector calculation principles” topic presentation in technical university

Abstract. The article examines the existing in academic literature approaches to the definition of "geometric vector" concept. The authors offer, reasonable from the viewpoint of physical-technical disciplines, definition of "vector value". they investigate specifics of the operations on vectors defined in physical space. The differentiation of vector values adopted in physical and technical applications is discussed.

Key words: vector values, directed segments multitude, equivalence relation, fixed vectors, sliding vectors, axial vectors, polar vectors.

References

1. Bers, L. (1975). *Matematicheskij analiz: ucheb. posobie dlja vtuzov*, per. s angl. L. I. Golovino, t. 1, Vyssh. shk., Moscow, 519 p. (in Russian).
2. Efimov, A. V. (2008). *Sbornik zadach po matematike dlja vtuzov: ucheb. posobie dlja vtuzov: v 4 chastjah. Ch. 1*, Izd-vo Fiziko-matematicheskoj literatury, Moscow, 288 p. (in Russian).
3. Ibid.
4. Umnov, A. E. (2011). *Analiticheskaja geometrija i linejnaja algebra: ucheb. posobie*, 3-e izd., ispr. i dop., MFTI, Moscow, 544 p. (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	16.08.17	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	30.08.17
Принята к публикации *Accepted for publication*	30.08.17	Опубликована *Published*	29.10.17

ISSN 2304-120X

www.e-koncept.ru