

**Елаховский Дмитрий Вячеславович,**

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет», г. Петрозаводск

[Elahovsky@mail.ru](mailto:Elahovsky@mail.ru)



## **Альтернативный способ оценки температурных полей в рамках физического образования студентов строительной специальности**

**Аннотация.** На примере одномерной теплопроводности рассмотрена возможность электротеплового моделирования при расчете температурного поля ограждения. Необходимость применения такой методики продиктована тем обстоятельством, что использование математического аппарата для решения указанной задачи требует учета начальных и граничных условий, что значительно усложняет процесс получения аналитического решения, а в ряде случаев делает его невозможным. Указанный тип моделирования тепловых процессов основан на схожести уравнений при описании тепловых и электрических процессов, что позволяет пересчитать экспериментально полученное распределение потенциалов в модели в реальное температурное поле ограждения.

**Ключевые слова:** теплопроводность, электропроводность, температурное поле, тепловое сопротивление, моделирование.

**Раздел:** (01) отдельные вопросы сферы образования.

Использование различных физических явлений в формировании среды обитания людей в помещениях различного назначения вызывает необходимость более детального рассмотрения некоторых из них по сравнению с базовым курсом общей физики. Именно это обстоятельство повышает мотивационную составляющую физического образования студентов строительной специальности университета, а ее реализация осуществляется за счет привлечения элементов строительной физики, одним из элементов которой является архитектурная климатология [1, 2]. К числу упомянутых явлений относится теплопроводность, так как теплофизические параметры строительных ограждений во многом формируются благодаря их теплопроводящим и теплоизоляционным свойствам. Изменяющиеся (даже в течение суток) условия эксплуатации зданий за счет переменной температуры внешнего воздуха и работы отопительных систем внутри помещений не позволяют воспользоваться законами стационарной теплопроводности при расчете температурных полей ограждений, влияющих на параметры внутренней среды и возможность конденсации водяных паров на внутренних поверхностях стен. Это предопределяет использование закона нестационарной теплопроводности, имеющего для однородного материала такой вид:

$$\rho \cdot c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность материала ограждения,  $c_v$  – его удельная теплоемкость,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

Отношение  $k = \lambda / (c_v \rho)$  называется температуропроводностью данного материала и характеризует интенсивность нестационарных процессов. Тогда в окончательном виде уравнение нестационарной теплопроводности принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \Delta T, \quad (2)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Основная проблема решения уравнения (2) связана с учетом начальных и граничных условий, а это приводит к тому, что даже для стационарных тепловых полей аналитическое решение уравнения Лапласа при анализе температурного поля удастся получить только для простых образцов. В связи с этим оправданно решение уравнения (2) с использованием приближенного численного интегрирования исходного дифференциального уравнения, при этом дифференциалы заменяются конечными разностями.

Весьма перспективным представляется расчет температурных полей конструкций с помощью моделирования реальных тепловых процессов [3]. В практике проектирования часто встречаются ограждающие конструкции или их отдельные участки, однородность материала которых нарушена как в перпендикулярном, так и в параллельном по отношению к тепловому потоку направлении. В этом случае для оценки теплотехнических качеств ограждения необходимо рассчитывать двухмерное температурное поле. Задачи, связанные с двухмерным температурным полем, приходится решать, изучая распределение температур в стенках у оконных проемов, в узлах сопряжения наружных и внутренних стен и т. п. Расчет двухмерных полей оказывается достаточно сложным, а в некоторых случаях невозможным. Приближенные способы решения дифференциальных уравнений методом конечных разностей настолько трудоемки (несмотря на возможности современных ЭВМ), что не нашли практического применения. Реализация метода моделирования тепловых процессов включает две его разновидности. Чисто геометрическое моделирование предполагает воспроизводство теплового процесса на модели, геометрически подобной натуре, но с более удобными геометрическими размерами и соответствующими температурами на внешних поверхностях. Если в этой модели разместить достаточно большое количество термопар, то регистрируемые электрические сигналы позволяют оценить состояние температурного поля в различные моменты времени, а соответствующая математическая обработка позволяет восстановить его для натурального образца произвольных размеров. В отличие от геометрического моделирования, его физическая разновидность использует при описании модели отличный от реального физический процесс, математическое описание которого тождественно тепловому процессу. В связи с этим наиболее удобным с точки зрения использования технического обеспечения считается электротепловое моделирование тепловых процессов. Исходным моментом для реализации подобного вида моделирования может служить следующее. Во-первых, уравнение Фурье для теплопроводности  $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$  по форме записи аналогично

уравнению закона Ома в дифференциальной форме  $j = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ . Во-вторых, условие теплового баланса  $\oint q_n dS = 0$  созвучно первому правилу Кирхгофа  $\oint j_n dS = 0$ . В работе [4] при рассмотрении одномерной стационарной задачи прохождения теплового потока через многослойную стенку было показано, что результирующее тепловое сопротивление стенки равно:

$$R_{\text{пол}} = R_{\text{в}} + R_1 + R_2 + \dots + R_n = \frac{1}{\alpha_{\text{в}}} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{d_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_{\text{н}}}, \quad (3)$$

где  $\alpha_{\text{в}}$  и  $\alpha_{\text{н}}$  – коэффициенты теплоотдачи внутренней и внешней стен ограждения,  $R_{\text{в}} = 1/\alpha_{\text{в}}$ ,  $R_{\text{н}} = 1/\alpha_{\text{н}}$  – сопротивления при переходе тепла на границе (сопротивления теплообмена),  $R_i = d_i / \lambda_i$  – тепловое сопротивление каждого слоя.

Следовательно, как и в случае последовательного соединения сопротивлений электрической цепи, суммарное тепловое сопротивление многослойной стены равно сумме тепловых сопротивлений отдельных слоев. С учетом этого обстоятельства плотность теплового потока равна:

$$j = \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{н}}}{R_{\text{пол}}} = \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{н}}}{\sum \frac{d_i}{\lambda_i} + R_{\text{в}} + R_{\text{н}}}. \quad (4)$$

Так как сопротивление проводника длиной  $d$  и площадью сечения  $S$  равно  $R_i = \frac{d}{S \gamma_i}$ , где  $\gamma_i = 1/\rho_i$  – удельное сопротивление, то из закона Ома следует:

$$I = \frac{\Phi_{\text{в}} - \Phi_{\text{н}}}{\sum R_i + R_{\text{конт}}} = jS, \quad (5)$$

где  $j$  – плотность тока,  $\Phi_{\text{в}} - \Phi_{\text{н}}$  – разность потенциалов на концах проводника,  $R_{\text{конт}}$  – контактное сопротивление (аналог  $R_{\text{в}}$  и  $R_{\text{н}}$ ).

Это контактное сопротивление вызвано наличием тонкой окисной пленки на поверхности проводника или небольшим воздушным зазором в месте соприкосновения сопротивлений. Тогда плотность тока:

$$j = \frac{\Phi_{\text{в}} - \Phi_{\text{н}}}{\sum \frac{d_i}{\gamma_i} + SR_{\text{конт}}}. \quad (6)$$

Это выражение похоже на (4), что также позволяет говорить о некоей аналогии между электрическими и тепловыми цепями. Рассмотрим теперь ситуацию с параллельным включением тепловых сопротивлений (в работе [5] она не рассматривалась). Пусть в плоском ограждении общей площадью  $S_0$  имеется участок площадью  $S_1$  (например, окно или дверь), тепловое сопротивление  $R_1$  единицы площади которого отличается от теплового сопротивления  $R_2$  остальной стенки (ее площадь равна  $S_2 = S_0 - S_1$ ). В первом приближении будем считать, что плотность теплового потока в пределах данного ограждения независима и перпендикулярна поверхности. Тогда для полного теплового потока через всю поверхность ограждения:

$$Q = Q_1 + Q_2 = S_1 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{н}}}{R_1} + S_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{н}}}{R_2} = (T_{\text{в}} - T_{\text{н}}) \left( \frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} \right). \quad (7)$$

Введем среднюю плотность теплового потока через ограждение  $\bar{j} = \frac{Q}{S_0} = \frac{S_1}{S_0} j_1 + \frac{S_2}{S_0} j_2$  и с ее помощью определим тепловое сопротивление ограждения:

$$R_{\text{пол}} = \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{н}}}{\bar{j}}.$$

Тогда:

$$\frac{S_0}{R_{\text{пол}}} = \frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2}. \quad (8)$$

Как и в случае электрических цепей, при наличии параллельно включенных тепловых сопротивлений при нахождении суммарного сопротивления складываются величины, обратные сопротивлениям отдельных участков. Таким образом, тепловая энергия сходственна заряду, плотность теплового потока – плотности тока, температура – потенциалу, коэффициент теплопроводности – удельной электропроводности.

сти. Следовательно, процессы теплопроводности и электропроводности, имея различную физическую природу, описываются одинаковыми по форме уравнениями, которые отличаются размерностью входящих в них величин.

Проиллюстрируем возможности электротеплового моделирования на примере одномерной стационарной задачи, т. е.  $T=f(x)$ . В стационарном состоянии температуры  $T(x)$  и тепловые потоки  $j(x)$  есть определенные функции координат точки наблюдения  $M(x)$ . Внутри ограждений эти функции удовлетворяют двум основным уравнениям:

закону Фурье:  $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$  и условию теплового баланса для любой замкнутой

поверхности. Кроме того, на границах с воздушными средами с постоянными температурами  $T_v$  и  $T_n$  должно выполняться условие непрерывности плотности теплового потока:

$$j = \alpha_v (T_v - T_{ст.в}) = \alpha_n (T_{ст.н} - T_n), \quad (9)$$

где  $T_{ст.в}$  и  $T_{ст.н}$  соответственно температуры внутренней и внешней стен ограждения.

В общем случае теплопроводность является заданной функцией координат натуры (ограждения):  $\lambda = f(x)$ . Смоделируем многослойную плиту в виде набора пластин 5 (рис. 1) из электропроводящего материала с различными значениями удельной проводимости, геометрически подобную плите (практическую реализацию модели обсуждать не будем).

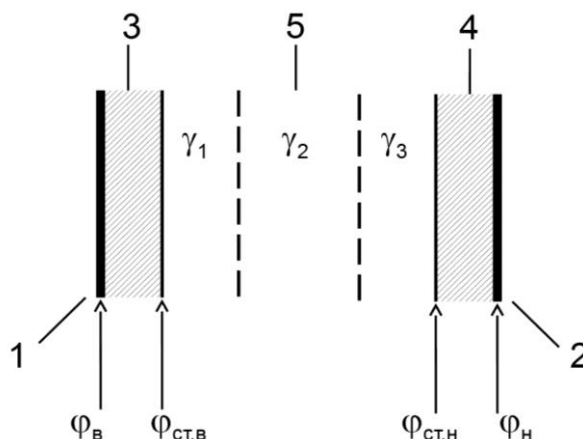


Рис. 1. Схематичное изображение модели: 1, 2 – шины, моделирующие температуру внутри и вне помещения, 3, 4 – контактные сопротивления, 5 – слои, с различной удельной проводимостью

Помещая начало координат  $0^*$  на модели в точку, сходственную началу координат 0 натуры (центр или граница областей с разными свойствами), из геометрического подобия получим:

$$\frac{x^*}{x} = K_L = \text{const}. \quad (10)$$

где  $K_L$  – безразмерный масштабный множитель.

Электропроводность  $\gamma(x^*)$  в разных областях модели подберем так, чтобы

$$\frac{\gamma(x^*)}{\lambda(x)} = K_\lambda = \text{const}. \quad (11)$$

Масштабный множитель  $K_\lambda$  – величина, размерная  $[K_\lambda] = \text{град/В}^2$ .

Для полного подобия модели и натуры необходимо на модели воспроизвести

граничные условия, подобные (9). Постоянство температур внутри ( $T_v$ ) и вне помещения ( $T_n$ ) можно смоделировать с помощью шин 1 и 23,4 из материала высокой проводимости (металла), присоединенных к источнику постоянного напряжения, обеспечивающего на них потенциалы  $\varphi_в$  и  $\varphi_n$  соответственно.. Для воспроизводства условий теплоотдачи вблизи внутренней и внешней стен ограждения между шинами и границами модели необходимо создать контактные сопротивления единицы площади  $R_{кон.в}^*$  и  $R_{кон.н}^*$  (Ом/м<sup>2</sup>) так, чтобы

$$j^3 = \frac{\varphi_в - \varphi_{ст.в}}{R_{кон.в}^*} = \frac{\varphi_{ст.н} - \varphi_n}{R_{кон.н}^*}. \quad (12)$$

Это достигается с помощью тонкого слоя материала между шиной и поверхностью модели толщиной  $\delta^*$  с плохой проводимостью  $\gamma^*$  и потенциалов  $\varphi_{ст.в}$  и  $\varphi_{ст.н}$ . Тогда

$$\frac{1}{R_{конт}^*} = \frac{\gamma^*}{\delta^*} = \Gamma_{конт},$$

где  $\Gamma_{конт}$  – электрическая проводимость, отнесенная к единице площади контакта, поэтому (для левой границы модели):

$$j^3 = \Gamma_{конт}(\varphi_в - \varphi_{ст.в}) \quad (13)$$

дает граничное условие, аналогичное (9). Из определения  $\Gamma_{конт}$  следует, что для подобия модели и натуры необходимо, чтобы

$$\frac{\Gamma_{конт}}{\alpha} = \frac{K_\lambda}{K_L} = \text{const}. \quad (14)$$

Зададим теперь значения потенциалов  $\varphi_в$  и  $\varphi_n$  на шинах модели пропорциональными температурам  $T_v$  и  $T_n$  воздуха внутри и вне помещения. Тогда из подобия уравнений теплопроводности и электропроводности следует, что и внутри во всех сходственных точках будет сохраняться та же пропорциональность, т. е. устанавливается связь температуры и потенциала в сходственных точках модели и натуры:

$$\frac{\varphi(x^*)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi_{cp}}{T_{cp}} = K_T, \quad (15)$$

где  $[K_T] = \text{В/град.}$  – размерный масштабный множитель.

Так как во все уравнения теплопроводности и электропроводности входят не сами потенциалы и температуры, а только их разности, то множитель  $K_T$  является масштабом преобразования величин  $\Delta\varphi$  и  $\Delta T$ . Поэтому начало отсчета  $T = 0$  и  $\varphi = 0$  в натуре и на модели можно выбирать независимо, т. е. в эксперименте использовать любую заземленную точку электрической схемы модели.

Рассмотрим с учетом сделанных масштабных преобразований уравнение

$$j^3 = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x^*} = -\frac{K_\lambda K_T}{K_L} \lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (14)$$

Отношение

$$K_q = \frac{K_\lambda K_T}{K_L}, \quad (15)$$

как следует из вышесказанного, имеет размерность  $[K_q] = \frac{\text{град} \cdot \text{В}}{\text{В}^2 \cdot \text{град}} = \frac{1}{\text{В}} = \frac{\text{А}}{\text{В} \cdot \text{Т}} = \frac{\text{А/м}^2}{\text{ВТ/м}^2},$

т. е. отношение размерности плотности электрического тока к размерности плотности

теплового потока. Разделив полученное равенство (14) на  $K_q$ , получаем эквивалентное соотношение

$$\frac{j^3}{K_q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (16)$$

которое полностью совпадает с уравнением Фурье, если  $\frac{j^3}{K_q} = j$ .

Отсюда следует, что при соблюдении введенных пропорциональностей  $K_L$ ,  $K_\lambda$ ,  $K_T$  распределение токов в сходственных точках модели прямо пропорционально распределению тепловых потоков в рассматриваемой стенке.

$$\frac{j^3(x^*)}{j(x)} = K_q = \text{const} \quad (17) \text{ с масштабным множителем } K_q = K_\lambda K_T / K_L.$$

На выполненной модели с помощью специальных щупов измеряется распределение потенциалов  $\varphi(x^*)$  в различных точках и пересчитывается распределение температуры в сходственных точках натуре с помощью соотношения

$$T(x) = \frac{\varphi(x^*)}{K_T} + T_0, \quad (18)$$

где  $T_0$  – температура в точке ограждения, сходственной заземленной точке модели.

С помощью модели можно рассчитать полную потерю тепла через соответствующую границу  $S_K$  натуре:

$$Q_K = \int_{S_K} j_n \cdot dS = \frac{1}{K_q K_L^2} I_K, \quad (19)$$

где  $I_K$  – полный ток на определенном участке границы  $S_K^*$ :  $I_K = \int_{S_K^*} j_n^3 \cdot dS$ .

Аналогичная ситуация при использовании плоских и объемных моделей. В этом случае (для объемной модели):

$$T(x, y, z) = \frac{\varphi(x^*, y^*, z^*)}{K_T} + T_0. \quad (20)$$

Подобного рода моделирование можно производить на различных моделях еще проектируемого ограждения, что позволит оптимизировать его конструктивные особенности.

При моделировании нестационарных тепловых задач необходимо учитывать не только тепловые сопротивления, но и теплоемкость участков натуре. Поэтому при моделировании нестационарная электрическая модель должна содержать как электрические сопротивления, так и электроемкости.

В качестве еще одного физического процесса, при описании которого используются уравнения, похожие на уравнения для тепловых и электрических аналогов, служит течение несжимаемой жидкости в пористой среде. Таким образом, существует возможность взаимного моделирования тепловых, гидравлических и электрических процессов.

### Ссылки на источники

1. Елаховский Д. В. Повышение мотивационной составляющей физического образования студентов строительной специальности вуза // Физическое образование в вузах. – 2013. – Т. 19. – № 4. – С. 74.
2. Елаховский Д. В. Элементы архитектурной климатологии как фрагменты физического образования студентов строительной специальности университетов // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2015. – № 5 (май). – С. 86–90. – URL: <http://e-koncept.ru/2015/15146.htm>.
3. Тодес О. М. Курс лекций и заданий по строительной физике. – Л., 1972.



4. Елаховский Д. В. Элементы архитектурной климатологии ...
5. Там же.

**Dmitry Elakhovskiy,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, General Physics Chair, Petrozavodsk State University, Petrozavodsk*

[Elahovsky@mail.ru](mailto:Elahovsky@mail.ru)

**Alternative way of temperature field estimation within the frames of physics curriculum for the students of civil engineering faculty**

**Abstract.** Modeling of an electrothermal process in temperature field estimating is considered through the example of one-dimensional thermal conductivity. The use of this technique is justified by the need to consider initial and boundary conditions if mathematical tools are used. This circumstance complicates the process of obtaining analytical solutions and in some cases makes it impossible. The presented type of heat processes modeling is based on similarity of equations which describe thermal and electrical processes thus allowing us to recalculate the potential distribution obtained in modeling into the actual value of retaining walls temperature field.

**Key words:** thermal conductivity, electrical conductivity, temperature field, thermal resistance, modeling.

#### References

1. Elahovskij, D. V. (2013). "Povyshenie motivacionnoj sostavljajushhej fizicheskogo obrazovaniya studentov stroitel'noj special'nosti vuza", *Fizicheskoe obrazovanie v vuzah*, t. 19, № 4, p. 74 (in Russian).
2. Elahovskij, D. V. (2015). "Jelementy arhitekturnoj klimatologii kak fragmenty fizicheskogo obrazovaniya studentov stroitel'noj special'nosti universitetov", *Nauchno-metodicheskij jelektronnyj zhurnal "Koncept"*, № 5 (maj), pp. 86–90. Available at: <http://e-koncept.ru/2015/15146.htm> (in Russian).
3. Todes, O. M. (1972). *Kurs lekcij i zadanij po stroitel'noj fizike*, Leningrad (in Russian).
4. Elahovskij, D. V. (2015). Op. cit.
5. Ibid.

#### Рекомендовано к публикации:

Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,  
главным редактором журнала «Концепт»



[www.e-koncept.ru](http://www.e-koncept.ru)

Поступила в редакцию <i>Received</i>	30.10.17	Получена положительная рецензия <i>Received a positive review</i>	15.11.17
Принята к публикации <i>Accepted for publication</i>	15.11.17	Опубликована <i>Published</i>	24.12.17

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2017

© Елаховский Д. В., 2017