

## Головоломки как средство обучения в математическом образовании детей и подростков

Горев Павел Михайлович<sup>1</sup>

Вятский государственный университет, Киров, Россия  
pavel-gorev@mail.ru

**Аннотация.** Перед педагогической наукой всегда стоял вопрос поиска эффективных средств для достижения образовательных результатов обучающихся. Особенно остро эта проблема проявляется сегодня, когда в стремительно меняющемся мире быстро устаревают те средства, которыми еще вчера можно было поддерживать интерес школьников к изучению математики, давать возможность для развития их математических способностей. Сегодня весьма актуален поиск нового инструментария, способствующего развитию обучающихся средствами предмета математики, а также механизмов включения его в образовательный процесс. Тем самым целью статьи является исследование возможностей использования в процессе обучения математике детей и подростков нового средства обучения – головоломок во всем их многообразии, как в урочной, так и во внеурочной деятельности. Ведущим методом при этом выступает моделирование методической системы обучения в основном и дополнительном математическом образовании детей и подростков с включением в нее нового дидактического инструментария, способствующего повышению интереса обучающихся к предмету, а также развитию отдельных математических способностей: логического мышления, абстракции, комбинирования, оперирования пространственными образами, критичности мышления, математической памяти. В результате проводимого исследования автором статьи определено место, возможности и методические аспекты включения в процесс обучения математике головоломок как в систему классических и нетрадиционных (креативных) уроков математики, так и в структуру внеклассной деятельности обучающихся (математический кружок), в систему математических соревнований, математический лагерь и др. Практическое использование данной системы позволяет сократить недостаток инструментов для развития математических способностей обучающихся в опыте педагогической деятельности, что, в свою очередь, дает возможность говорить о целенаправленно высоких результатах в математической деятельности детей и подростков.

**Ключевые слова:** обучение математике в средней школе, средства обучения математике, головоломки, развитие математических способностей школьников, развитие интереса школьников к математике.

Поступила в редакцию <i>Received</i>	26.08.2018	Получена положительная рецензия <i>Received a positive review</i>	30.09.2018
Принята к публикации <i>Accepted for publication</i>	30.09.2018	Опубликована <i>Published</i>	30.10.2018

<sup>1</sup> Горев Павел Михайлович, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий базовой кафедрой педагогических технологий и предметных методик ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров, Россия

## Введение

Современная педагогическая наука одним из приоритетных направлений совершенствования системы образования определяет гуманистический подход в организации процессов обучения и воспитания, ведущим принципом которого является всестороннее развитие личности школьника. При этом широкое использование в педагогической практике системно-деятельностного подхода на первый план выводит аспекты, определяющие не столько набор огромного количества знаний у детей и подростков, сколько умения владеть инструментами поиска и оперирования знаниями и способности применять эти умения в практической деятельности [1]. Организация подобного педагогического процесса будет происходить наиболее эффективно, если учитывать возрастные и психологические особенности обучающихся и соответствующие им ведущие виды деятельности: игровую – для детей – и целенаправленную осознанную учебную – для подростков.

Одним из дидактических инструментов, позволяющих обеспечить названные выше позиции, являются головоломки. Под головоломкой мы будем понимать непростую задачу (в соответствии с возрастными и психологическими особенностями обучающихся), для решения которой, как правило, требуется сообразительность, владение отдельными математическими способностями, а не специальные знания. Так, к примеру, к основным видам головоломок можно отнести: арифметические, такие как ребусы, магические квадраты, sudoku и т. д.; задачи на перестановки, к примеру задачи со спичками или игра в 15 и подобные ей; на разрезание и складывание фигур, такие как танграм и подобные ей, в том числе и объемных, к примеру кубики Сомы; головоломки топологического характера, такие как флексагоны, вычерчивание фигур одним росчерком, веревочные и проволочные головоломки и другие.

Традиционно головоломки относятся к занимательной математике (реализуемой чаще в дополнительном математическом образовании детей и подростков) не только потому, что в основе почти любой головоломки лежит некий математический замысел, но и потому, что решение головоломки по своему духу близко к решению математических проблем [2]. Таким образом, головоломки являются мощнейшим средством приобщения детей и подростков к культуре математического мышления, основанной на алгоритмах, логике, абстракциях, пространственных образах.

Головоломки специально предназначены для развития умственных способностей детей и подростков, совершенствования и тренировки их мышления, они помогают лучшему усвоению и закреплению приобретенных знаний, пробуждению у обучающихся живого интереса к математике. В своей совокупности головоломки должны способствовать развитию у детей и подростков памяти, внимания, творческого воображения, способности к анализу и синтезу, сравнению, восприятию пространственных отношений, развитию конструктивных умений и творчества, воспитанию у обучающихся наблюдательности, обоснованности суждений, привычки к самопроверке; должны учить детей и подростков подчинять свои действия поставленной задаче, доводить начатую работу до конца [3]. Все эти аспекты говорят о необходимости включения в образовательный процесс головоломок как дидактического инструмента по достижению образовательных результатов обучающихся, развитию их общих и специальных математических способностей.

Таким образом, целью представленного исследования является определение места и методических особенностей включения в процесс обучения математике детей и подростков головоломок, а также моделирование на основе выявленных аспектов методической системы обучения математике с использованием новых дидактических инструментов в основном и дополнительном математическом образовании детей и подростков.

## Обзор отечественной и зарубежной литературы

Историю появления головоломок нельзя отделить от истории развития математики; своими корнями она уходит глубоко в древность. Первые головоломки приходят к нам из текстов древних египетских папирусов, вавилонских глиняных табличек, манускриптов Древнего Китая и Древней Индии. Так, в течение тысячелетий из одного сборника математических головоломок в другой кочует «задача о кошках» из папируса Ахмеса, а игра «Танграм» уже была популярна в Китае около 4 000 лет назад. В Европе самым первым собранием головоломок и логических задач стала книга второй половины IX века «Задачи для развития молодого ума» ирландского богослова, ученого и просветителя Алкуина. Именно в ней впервые встречается «задача о переправе», впоследствии ставшая очень популярной. Средневековые математики Л. Пизанский (Фибоначчи) и Н. Тарталья включили головоломки в свои научные изыскания. Первому принадлежала задача о кроликах, второй придумал задачу о семнадцати лошадях [4]. Однако же пик развития и популяризации головоломок приходится на рубеж XIX–XX веков и первую половину XX столетия.

Нельзя не отметить классическую трехтомную энциклопедию занимательной математики Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки» [5–7], в которой отражены практически все известные к тому времени головоломки – «затруднительные ситуации», их решения и математический аппарат. Большой вклад в популяризацию математических знаний, в частности занимательной математики и головоломок, внес наш соотечественник Я. И. Перельман: известны его книги, посвященные отдельным головоломкам на разрезание квадрата и вычерчивание фигур одним росчерком [8, 9], а также современные переиздания с многочисленными головоломками [10]. Среди более поздних авторов отметим классика жанра – книги Б. А. Кордемского «Математическая смекалка» и «Математические завлекалки», многократно переиздававшиеся и имеющие огромный потенциал для математического образования в целом, в частности по применению нестандартных задач в обучении [11, 12]. Кладезом идей для самостоятельного изготовления и разгадывания головоломок с отдельными методическими пояснениями являются известные книги Е. М. Минского «От игры к знаниям» [13], В. Н. Болховитинова, Б. И. Колтового и И. К. Лаговского «Твое свободное время» [14] и Л. П. Мочалова «Головоломки» [15]. Отдельным математическим идеям, связанным с задачами на разрезание, посвящены труды И. М. Яглома [16], Б. А. Кордемского и Н. В. Русалева [17], М. А. Екимовой и Г. П. Кукина [18]. Числовым ребусам и методике их разгадывания посвящена книга Л. М. Лихтарникова «Числовые ребусы и способы их разгадывания» [19].

Не меньший интерес представляют и переводные издания зарубежных авторов. Бесспорно, следует отметить книги «Математические чудеса и тайны», «Математические головоломки и развлечения», «Математические досуги» и другие гениального популяризатора науки М. Гарднера, содержащие десятки головоломок, описание и их оригинальное решение [20–22]. Классикой жанра являются книги создателей головоломок С. Лойда «Математическая мозаика» [23] и Г. Дьюдени «520 головоломок» [24], изданные на русском языке издательством «Мир», а также популярные книги С. Барра [25], Ф. Картера и К. Рассела [26], Дж. Харди [27], содержащие оригинальные решения и математический анализ многих головоломок.

Перечисленные выше книги отнюдь не исчерпывают весь спектр литературы по тематике головоломок и их решению; здесь представлены наиболее яркие труды выдающихся ученых, всего же автору известно более 200 книг по этой тематике отечественных и

зарубежных авторов. Интерес к головоломкам неизменно высок и в современной периодической литературе. Эти исследования в основном проводятся в трех направлениях.

Первое из них – это непосредственное изучение математической стороны решения головоломок. Так, например, К. Харагути рассматривает математическую компьютерную модель объемной головоломки “Eight Blocks to Madness” [28], Т. Е. Лин, Ш.-Ч. Цай и другие рассматривают оптимальные модели решения одномерной головоломки с монетами [29], Г. Е. Ортиз Гарсия, С. Салседо-Санс и другие предлагают модели решения логических головоломок с изображениями [30], А. К. Майя, С. Джанаб и Р. К. Палц приводят оптимальные алгоритмы решения головоломки sudoku [31]. Следует отметить, что решение и математическое обоснование головоломок неоднократно становились основой новой математической теории. Наиболее яркими примерами тому служат возникновение теории графов, вышедшей из задачи о кёнигсбергских мостах, предложенной выдающимся математиком Л. Эйлером [32], или развитие теории вероятностей, основанной на решении игровых задач, пришедших из практики.

Второе направление исследований – использование головоломок для развития отдельных математических способностей обучающихся. Например, Ч.-Х. Лин и Ч.-М. Чен провели исследование влияния компьютерных игр-головоломок на развитие пространственного воображения и оперирования пространственными образами учащихся начальной школы [33]. Исследование Е. Мильковой посвящено использованию пазлов для развития логического мышления и абстрагирования, в котором предлагаются отдельные методические подходы и рекомендации для учителей [34].

В третьем направлении исследователи предлагают использовать головоломки как инструмент для оценивания способностей различных категорий обучающихся. В частности, Н. Арал, Ф. Гурсов и М. С. Ясар исследовали влияние головоломок на когнитивное, лингвистическое, моторное, социальное и эмоциональное развитие дошкольников [35]. Е. Вакил и Е. Хелед провели исследование когнитивных возможностей подростков при решении задач с помощью головоломки «Ханойские башни», учитывая при этом точность решения задачи, скорость достижения правильного решения и планирование времени, прежде чем начинать решать задачу [36]. С. Сенгул и А. Аргат предприняли попытку использования различных средств обучения, в частности головоломок, для исследования учащихся с низкими академическими достижениями, вследствие чего были разработаны соответствующие рекомендации [37]. С. А. Саргин, Ф. Балтачи, Х. Бичичи и А. Юмусак рассмотрели метод «головоломки» для повышения интереса учеников профессионально-технических училищ, их мотивации и посещаемости лекций и лучшего понимания теоретических частей их курсов. Их выводы показывают, что благодаря этому методу произошло увеличение связи с уровнем социализации между студентом-студентом и студентом-преподавателем и снижение уровня беспокойства студентов о будущем поиске работы [38].

Следует сказать несколько слов о методической стороне вопроса использования головоломок в обучении математике детей и подростков. Так, в курсе «Наглядная геометрия» для учащихся 5–6-х классов основной школы И. Ф. Шарыгин и Л. Н. Ерганжиева большинство занятий строят именно на отдельных занимательных заданиях и головоломках, однако этот курс, несмотря на все его сильные стороны, так и не вошел в практику основной школы, оставаясь лишь хорошим подспорьем для дополнительного математического образования школьников [39]. Отдельными вопросами, связанными с развитием комбинаторных способностей на уроках математики, занимался

известный российский методист М. И. Зайкин. В своем пособии «Математический тренинг» он раскрывает поэтапное формирование этих способностей через системы специально подобранных упражнений-головоломок [40], однако эти исследования носят узкоспециализированный характер и не вошли в практику обучения математике в школе. Наиболее значительный вклад по использованию головоломок в образовательном процессе внесла ученый-педагог М. М. Зиновкина, предложившая к использованию систему непрерывного формирования творческой личности, где на каждом этапе реализации системы в качестве одного из этапов занятия или урока неизменно используются головоломки [41]. Таким образом, можно отметить интерес к головоломкам как к особому явлению в математическом образовании. Однако в известных автору источниках описываются либо обобщенные теории, включающие как элемент использование головоломок в обучении математике, либо крайне узкоспециализированные вопросы, связанные с головоломками. Современной же школе нужна разработка прикладных аспектов дидактического инструментария, связанного с головоломками, и его методическое сопровождение в основном и дополнительном математическом образовании детей и подростков.

## Материалы и методы исследования

### 1. Теоретическая база исследования

Наиболее значимой в проводимом исследовании теоретической базой стали труды отечественных психологов, посвященные изучению общих и специальных математических способностей. Так, С. Л. Рубинштейн понимал под способностями «сложное синтетическое образование, включающее ряд качеств, без которых человек не был бы способен к какой-либо конкретной деятельности, и свойств, которые лишь в процессе определенным образом организованной деятельности вырабатываются» [42]. В отечественной и зарубежной науке наиболее общепринятым считается выделение способностей по видам деятельности. В связи с этим дают соответствующее понятие способностей: способности – это устойчивые свойства людей, которые определяют успехи, достигнутые ими в различных видах деятельности. Таким образом, можно говорить о специальных математических способностях, которые проявляются в специфическом виде деятельности человека – математической, в частности учебной математической деятельности детей и подростков.

Значительный вклад в изучение математических способностей внес В. А. Крутецкий, который под способностями к изучению математики понимает индивидуально-психологические особенности (прежде всего особенности умственной деятельности), отвечающие требованиям учебной математической деятельности и обуславливающие при прочих равных условиях успешность творческого овладения математикой как учебным предметом, в частности относительно быстрое, легкое и глубокое овладение знаниями, умениями и навыками в области математики [43]. Среди прочего в своей книге «Психология математических способностей школьников» он структурирует математические способности и приводит следующую их классификацию: 1) ясное логическое мышление, правильное использование логических методов; 2) сила абстракции; 3) комбинаторная способность; 4) способность к пространственному представлению и оперированию пространственными образами; 5) критичность мышления, способность отказаться от ошибочных ходов мысли; 6) математическая память (обобщенная память на математические отношения, типовые характеристики, схемы рассуждений и доказательств, методы решения задач и принципы подхода к ним).



## 2. Методы исследования

Для осуществления исследования применялись теоретические и эмпирические методы: анализ психолого-педагогической и математико-методической литературы по теме исследования, анализ и обобщение опыта работы учителей и собственного опыта реализации модели включения головоломок в процесс обучения математике в системе основного и дополнительного математического образования, анализ продуктов учебной деятельности детей и подростков, метод мысленного эксперимента, прогнозирование, систематизация и обобщение фактов и концепций, моделирование, проектирование, метод экспертных оценок, анализ результатов образовательной деятельности, разработка учебно-методических материалов, диагностические методики, педагогический эксперимент.

## 3. Экспериментальная база исследования

Апробация, обобщение и внедрение результатов исследования осуществляются на базе региональной инновационной образовательной площадки «Взаимосвязь содержания, форм и методов основного и дополнительного математического образования школьников» (2012–2017 годы):

- путем ведения опытного преподавания в основном курсе математики в 5–9-х классах основной школы и математического кружка в 3–7-х классах учителями математики в базовой образовательной организации Института развития образования Кировской области – лицее № 21 города Кирова (более 120 учащихся ежегодно с 2012 года);

- организации специального развивающего курса для дошкольников, реализуемого в ходе работы школы развития лицея № 21 учителями начальной школы (более 300 обучающихся ежегодно с 2015 года);

- реализации отдельных образовательных курсов в рамках летнего пришкольного лагеря-тренинга «Математика. Творчество. Интеллект» с 2009 года (более 200 учащихся ежегодно);

- обсуждения методических аспектов в рамках семинаров и круглых столов с учителями математики Кировской области на курсах повышения квалификации в Институте развития образования Кировской области (120–150 участников ежегодно с 2015 года);

а также в виде докладов и выступлений на научных конференциях и семинарах различных уровней, в том числе международного, публикаций в сборниках научных статей и научно-методических периодических изданиях.

## 4. Этапы исследования

Исследование проводится в три этапа.

На первом этапе выявлялось состояние исследуемой проблемы в теории и практике обучения детей и подростков в основном и дополнительном математическом образовании, реализуемом в дошкольном, начальном и основном образовании. Для этого осуществлялись изучение и анализ психолого-педагогической и методической литературы по проблеме исследования, наблюдение и анализ опыта работы учителей математики и начальных классов, педагогов дошкольного образования с целью исследования возможных путей включения головоломок в процесс обучения математике и вероятных организационных форм организации такой деятельности с детьми и подростками для эффективного непрерывного формирования личности, обладающей основными видами математических способностей: логическим мышлением, абстракцией, комбинированием, оперированием пространственными образами, критичностью мышления, математической памятью.

На втором этапе разрабатывались методические подходы к внедрению дидактического инструментария, основанного на головоломках, и механизмов его реализации в рамках летнего математического лагеря, а также в ходе учебного года в урочной и внеурочной деятельности детей и подростков. Обсуждение их реализации осуществлялось и продолжает осуществляться в ходе работы семинаров и круглых столов с учителями математики региона, докладов на конференциях и семинарах различных уровней, что ведет к последовательному совершенствованию методики работы с головоломками в практике обучения математике детей и подростков.

Параллельно со вторым реализуется третий этап, в ходе которого проводится опытное преподавание по предлагаемым методическим аспектам на базе лицея № 21 города Кирова.

## Результаты исследования

### 1. Использование головоломок на классическом уроке математики

В классической методике обучения математике существует четкая структура этапов урока. Внедрение в нее новых элементов меняет тип урока, он переходит из разряда классического в разряд инновационного, о чем мы поговорим ниже. Однако и в структуре классического урока математики можно найти место применению головоломок как средству развития математических способностей. Это, на наш взгляд, может происходить на одном из трех этапов урока.

На *этапе актуализации знаний* может быть организована работа с учащимися, направленная на подведение к изучению нового материала. Так, к примеру, при изучении признаков делимости в 6-м классе могут быть применены арифметические ребусы (рис. 1). Они не только будут способствовать подведению учащихся к необходимости знания признаков делимости, но и в значительной мере будут способствовать развитию логики, комбинаторных способностей, критичности мышления, помогут развить математическую память. Ко всему прочему, ребусы позволяют провести тренировку применения таблиц сложения и умножения.

ПРИМЕР  
+ ПРИМЕР  
ИМЕР  
МЕР  
ЕР  
Р  
—  
ЗАДАЧА

Рис. 1. Пример ребуса

Другим примером использования головоломок на этапе актуализации может служить любая головоломка на составление фигур из частей («Танграм», «Колумбово яйцо», «Стомахион», «Пифагор», «Монгольская игра», «Пентамино» и др.) как предпосылка изучения площадей плоских фигур и их свойств в 8-м классе. Применение подобного рода головоломок определяет развитие комбинаторных способностей, логического мышления и позволяет развивать способности к оперированию пространственными образами.

Современные требования к уроку определяют необходимость проведения специальных пауз для психологической, эмоциональной и физической разгрузки обучающихся, особенно младших школьников. На этапе *паузы-разминки* детям могут быть предложены несложные головоломки для снятия психологической инерции, например топологическая головоломка «Неразлучные подковы», требующая разъединить два элемента головоломки (рис. 2). Бесспорно, такие головоломки способствуют развитию всех составляющих математических способностей обучающихся. Подборка подобных заданий опубликована нами в пособии «Формирование творческой личности на уроках и во внеурочной деятельности. Креативные ситуации. Умные задачи. Интеллектуальные паузы-разминки с детьми 7–12 лет» [44].

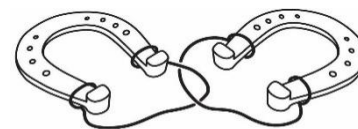


Рис. 2. Головоломка «Неразлучные подковы»

Головоломки являются весьма затратными по времени для того, чтобы в полной мере быть использованными на каком-либо отдельном этапе урока математики. Однако большой простор предоставляется для решения головоломок в домашних условиях с дальнейшим озвучиванием результатов на *этапе проверки домашнего задания*. Так, к примеру, при изучении темы «Правильные многоугольники» в 9-м классе ученикам можно предложить известную задачу-головоломку о делении окружности на пять равных частей; или при изучении понятия алгоритма при введении в 6-м классе алгоритмов поиска наибольшего общего делителя или наименьшего общего кратного двух или нескольких чисел, а также алгоритма поиска простых чисел («Решето Эратосфена») может быть предложена уже упоминавшаяся выше старинная головоломка на перемещение дисков «Ханойские башни». Обсуждение подобного рода головоломок на этапе проверки домашнего задания позволяет не только показать ученикам красоту математики, решения задач-головоломок, но и привить им интерес к предмету, развить у них логическое мышление, комбинаторные способности, критичность мышления.

Конечно, опытный учитель сможет найти место головоломкам и на других этапах урока математики. Мы описали лишь наиболее эффективные из возможных применений головоломок на классическом уроке. Однако не следует забывать, что головоломки, как, в общем-то, и иное другое средство обучения, не должно стать самоцелью в обучении математике, оно должно оставаться средством, дающим толчок к развитию обучающихся, в частности их математических способностей. К тому же подбор головоломок к той или иной теме урока математики является достаточно трудоемким процессом. Поэтому делать это к каждому уроку практически невозможно, да и не нужно.

## 2. Место головоломок в инновационном (креативном) занятии по математике

В системе НФТМ-ТРИЗ (непрерывное формирование творческого мышления на основе теории решения изобретательских задач), разработанной профессором М. М. Зиновкиной [45], автором описаны подсистемы креативного дошкольного, школьного, начального и среднего профессионального, высшего и последиplomного образования. Здесь мы остановимся лишь на двух из них (дошкольное и школьное образование), в структуру занятий которых этап решения головоломок включен как один из основных.

Занятия в дошкольном образовании характеризуются в первую очередь игровой формой организации непосредственной образовательной деятельности. Структура креативного занятия в дошкольном образовании показана на рис. 3. Как видно из схемы, отдельно выделяется этап решения головоломок, который представляет собой систему усложняющихся заданий, воплощенных в реальные объекты.

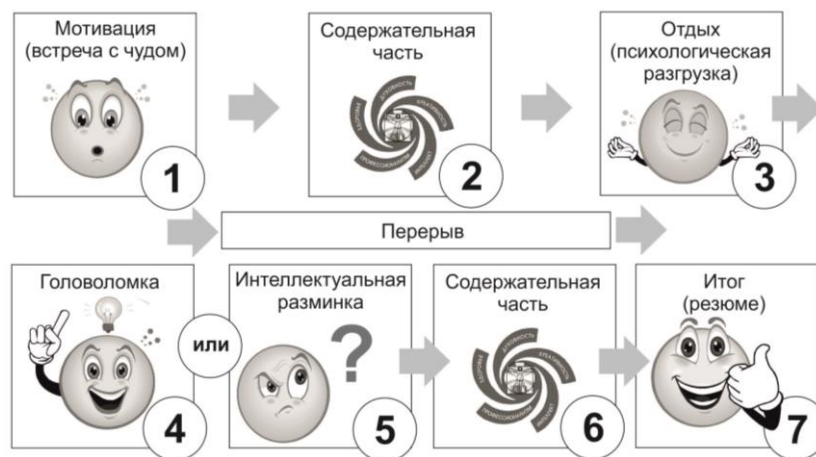


Рис. 3. Схема креативного занятия в дошкольном образовании



Приведем несколько примеров таких головоломок, полная подборка которых опубликована в пособии для дошкольников «Увлекательные игры с Совёнком» [46]. Так, вначале детям предлагаются простейшие головоломки-пазлы на составление картинок из частей (рис. 4). Такие головоломки уже на первых этапах знакомства детей с математическими объектами дают толчок к развитию логики и комбинаторных способностей. Дальнейшее развитие подобного рода головоломок приводит к решению дошкольниками более сложных головоломок комбинаторного характера, например такой.

**Головоломка 1.** Из приложения аккуратно ножницами вырежи части головоломки. Раскрась белые кружочки и поставь их так, чтобы в одном ряду или в одном столбике не повторялись два кружочка одного вида (рис. 5).

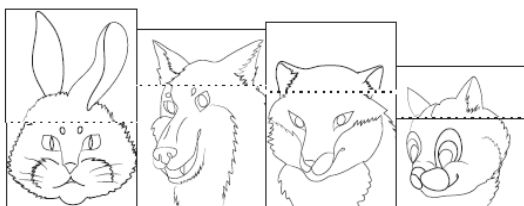


Рис. 4. Где чьи ушки?

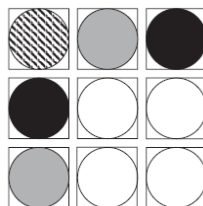


Рис. 5. Переставь кружочки



Рис. 6. Звёздное небо

Другой тип заданий, предлагающийся детям в пособии, – головоломки на сравнение и классификацию объектов. Такие головоломки позволяют развить у детей способности к анализу и синтезу, сравнению, что формирует критическое мышление, комбинаторные способности и математическую память. Примером может служить следующее задание.

**Головоломка 2.** Из приложения аккуратно по контуру вырежи ножницами звёздочки. Разложи звёздочки на небе (игровом поле) по порядку: от самой маленькой до самой большой (рис. 6).

В предлагающемся пособии разработано 14 спаренных занятий (на один учебный год) по системе НФТМ-ТРИЗ, к каждому из которых приводится одна или две головоломки. Отметим также, что головоломки на креативном занятии могут найти отражение и на этапе мотивации («Встреча с чудом»), поскольку многие из объектных головоломок являются уникальными идеями, основанными на физических или математических принципах, что всегда поражало воображение людей, и не только дошкольного возраста. К примеру, на этапе мотивации детям могут быть продемонстрированы проволоочные головоломки (например, сцепленные гвоздики) или головоломки, изготовленные из дерева или пластмассы, в которых заложена идея хитроумной сборки, или же шарнирные головоломки наподобие кубика Рубика. Все это создает параллельно с эффектом чуда стойкий интерес к занятиям математикой, что в дальнейшем может привести обучающихся к серьезному изучению головоломок как математических проблем.

Что же касается подсистемы НФТМ-ТРИЗ, реализующейся в школьном образовании, то здесь имеет место так называемый креативный урок математики, о структуре, содержании и возможностях развития школьников мы уже не так давно сообщали [47]. Не останавливаясь здесь подробно на описании креативного урока математики, лишь заметим, что подбор головоломок к соответствующему этапу должен проводиться очень тщательно: они не должны выпадать из общего контекста занятия,

должны нести образовательный и воспитательный эффект. Для этого учителю, проводящему время от времени креативные уроки математики, необходимо владеть огромным запасом различных головоломок с их методическим описанием. Сегодня мы ведем большую работу в этом направлении в созданном несколько лет назад на базе лицея № 21 города Кирова школьном музее занимательной науки, где головоломки нашли должное место. Однако разговор о музее заслуживает отдельной статьи, и здесь мы не будем на этом заострять внимание.

### 3. Головоломки в дополнительном математическом образовании детей и подростков

Дополнительное математическое образование детей и подростков, пожалуй, является именно той средой, где наиболее эффективно можно использовать дидактический инструментарий, связанный с головоломками, для всестороннего развития личности ученика, в частности для развития его математических способностей.

Базовой структурной единицей дополнительного математического образования школьников служит *математический кружок* (факультатив, студия). В ходе занятий кружка могут рассматриваться головоломки как отдельные математические задачи и серии головоломок. К примеру, занятие кружка может быть посвящено изучению свойств ленты Мёбиуса или флексагонов, топологическим головоломкам с веревочкой и пуговицами или быть построенным на эффектах невозможных фигур и оптических иллюзий. В более младших классах целесообразно проводить целые занятия кружка, посвященные отдельной конкретной головоломке: «Танграму», пентамино, «Ханойским башням», вычерчиванию фигур одним росчерком и т. д. Это позволяет сконцентрировать внимание учащихся на проблеме головоломки, понять ее устройство. А именно эти аспекты позволяют дать толчок не только к пониманию математической сути головоломки, но и к развитию логического мышления, комбинаторных способностей, усилить возможности абстрактного мышления и оперирования пространственными образами, привить критичность мышления и развить математическую память. В последнее время стали появляться головоломки комбинированного типа, основанные на нескольких идеях. К примеру, такой головоломкой служит квадригами – своеобразное сочетание оригами и перестановочных головоломок: требуется так согнуть специально раскрашенный квадрат, чтобы в результате одна сторона его оказалась черной, а другая – серой (рис. 7).

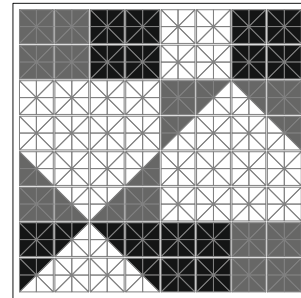


Рис. 7. Пример квадригами

Отметим, что в разработанной и апробированной нами программе математического кружка «Уроки развивающей математики» для учащихся 3–6-х классов [48] представлена технологическая модель организации кружка модулями, каждый из которых содержит блоки, основанные на решении головоломок (см. рис. 8). Механизм включения разработанной технологической модели в дополнительное математическое образование учащихся 5–6-х классов описан нами в соответствующей статье [49], а дидактическое сопровождение технологической модели представлено в двух книгах: «Уроки развивающей математики. 5–6 классы: задачи математического кружка» [50] и «Двадцать хитроумных задачек Совёнка» [51].

Другой не менее важной составляющей дополнительного математического образования школьников являются *математические соревнования*. Головоломки могут стать их неотъемлемой частью как конкретные задания. Так, нами успешно используются задачи-головоломки в математических боях, командных соревнованиях, напри-

мер, таких как «Математическая карусель», «Математическая перестрелка», «Математический аукцион» и других. Однако могут быть организованы и отдельные соревнования, основой которых являются головоломки. Примером тому может служить вот уже несколько лет проводимая нами для учащихся старших классов командная олимпиада по геометрическому конструированию. В ней соревнуются команды школьников в составе трех человек. Основная задача – решить предложенные задачи-головоломки и представить решения в формате конкретных геометрических конструкций в предметном исполнении. Мы уже описывали содержание такой олимпиады в одной из статей [52], однако приведем здесь несколько заданий из нее.

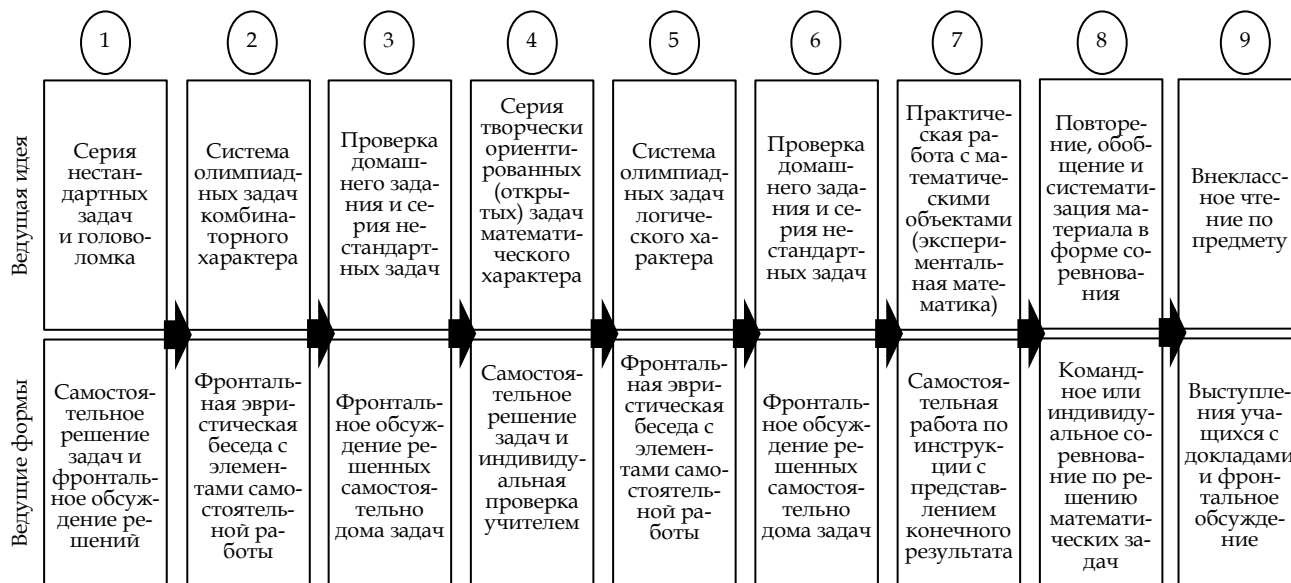


Рис. 8. Схема прохождения модуля с указанием ведущей идеи и основных организационных форм

**Головоломка 3. Куб из пирамид.** Разделить куб на шесть равных пирамид не представляет труда. Например, это можно сделать, соединив центр куба со всеми его вершинами. А вот разделить куб на три одинаковые по форме и размерам пирамиды уже сложнее. Подумайте, как это можно сделать. Нарисуйте и опишите вашу конструкцию. Докажите, что пирамиды будут равны и вместе составляют ровно куб.

**Головоломка 4. Всюду по три.** Вырежьте девять квадратов размером  $3 \times 3$  клетки с кружками (рис. 9). Сложите из них квадрат  $9 \times 9$  клеток так, чтобы на его больших диагоналях, в каждой строчке и каждом столбце было бы ровно по одному кружку каждого типа.

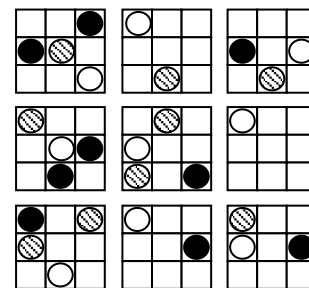


Рис. 9. Всюду по три

**Головоломка 5. Гороховый конструктор.** Сложить из трех палочек треугольник проще простого! а) Какое минимальное число палочек нужно, чтобы составить четыре треугольника (палочки нельзя ломать и накладывать друг на друга; сторона треугольника должна быть равна длине палочки)? б) Какое минимальное число палочек потребуется, чтобы собрать 20 треугольников? Создайте фигуры из горохового конструктора.

Еще одним направлением в дополнительном математическом образовании школьников является работа летнего математического лагеря. В лицее № 21 города Кирова лагерь «Математика. Творчество. Интеллект» проводится для учащихся 5–10-х

классов с 2001 года и в первую очередь направлен на развитие математических способностей школьников различными средствами: от нестандартных задач до проектной деятельности. В 5–6-х классах работа с головоломками осуществляется в двух основных направлениях.

Во-первых, как правило, в программу включается специальный курс из 5–6 занятий, посвященный непосредственно головоломкам, их созданию и решению. Перечислим названия занятий такого курса прошлого года: 1) головоломки со спичками; 2) задачи на разрезание и составление фигур; 3) исчезновение фигур; 4) оптические иллюзии; 5) лента Мёбиуса; 6) кубики Сомы.

Во-вторых, в программу лагеря закладывается серия проектных клубов-мастерских, проводимых для учеников 5–6-х классов восьмиклассниками. Каждый из таких клубов направлен на получение конкретного результата по одной из тем занимательной математики, в частности сопряженной с решением головоломок. Как правило, в лагере участвует 80–100 младших школьников; для них организуется 6–10 клубов. Цель проектных клубов-мастерских – привить интерес к предмету через совместную творческую деятельность с учениками старших классов, развить математические способности младших школьников. Примеры нескольких таких клубов представлены в таблице ниже.

### Проектные клубы-мастерские для учащихся 5–6-х классов

<i>Название клуба</i>	<i>Задачи проекта</i>	<i>Конечный продукт</i>
Не верь глазам своим	Изучить и представить геометрические иллюзии, не существующие в реальном мире фигуры, которые возможно лишь изобразить	Альбом с иллюзиями, в том числе самостоятельно придуманными
Пятнашки	Изучить историю создания и возможности игры в 15 и подобных ей, придумать свои игры	Набор игр, созданных из картона
Волшебный тетрис	Рассмотреть различные виды полимино (домино, тримино, пентамино с квадратными, треугольными, шестиугольными элементами) и задачи, с ним связанные	Наборы полимино, стенгазета с головоломками и задачами
Суперкубики	Изучить историю возникновения и создания суперкуба, различные варианты игры с ним и составления фигур	«Город» из частей суперкуба
В поисках Минотавра	Изучить историю создания, легенды и мифы, связанные с лабиринтами, их виды и алгоритмы выхода из лабиринтов	Лабиринты из картона, стенгазета об истории лабиринтов
3D-задачи	Изучить и научиться собирать разнообразные трехмерные объектные головоломки	Набор объемных головоломок и стенгазета о них
Флексагоны	Изучить разные виды флексагонов, историю их возникновения и создания	Наборы флексагонов и стенгазета о них
Путешествие по бесконечности	Рассмотреть построение некоторых геометрических фракталов, историю их появления, изучить игру с одним из их представителей – кривыми дракона	Анимационная презентация о фракталах и кривых дракона

Работа в проектных клубах-мастерских может быть организована по следующей схеме: на открытии смены восьмиклассники презентуют свои клубы, затем, на протяжении смены, ежедневно младшие школьники работают в выбранной ими мастерской и на закрытии смены презентуют полученный в ходе работы продукт. Такая форма работы в значительной степени активизирует интерес младших школьников к математике, способствует получению новых математических знаний, создает возможности творческого проявления способностей и учит ответственно относиться к своему труду и уважать труд товарищей.



Идея проведения отдельных курсов, основанных на головоломках, привела нас к созданию *программы внеурочной деятельности* для учащихся 7–9-х классов «Изобретательская геометрия» [53]. Основой для курса послужили идеи теории изобретательских задач, а именно использование геометрических эффектов в моделировании реальных объектов. Эти объекты как раз и представлены головоломками геометрического (комбинаторного и топологического) характера.

В целом же следует отметить, что в дополнительном математическом образовании детей и подростков можно обнаружить нескончаемый потенциал для развития математических способностей обучающихся разнообразными средствами, в частности с помощью дидактического инструментария, основанного на головоломках.

### Заключение

На сегодняшний день наработаны значительные по объему и содержанию материалы, посвященные головоломкам и их решению в отечественной и зарубежной литературе. Многие авторы соотносят решение головоломок с непосредственной математической деятельностью, что определяет их место именно в математическом образовании детей и подростков.

Любая методическая система обучения математике немыслима без определённого набора задач. Задачи используются как очень эффективное средство усвоения школьниками понятий, методов, как наиболее действенное средство развития культуры мышления учащихся, как незаменимое средство привития учащимся умений и навыков в практическом применении математики. Головоломки, являясь своеобразными математическими задачами повышенной сложности (в соответствии с возрастными и психологическими особенностями обучающихся), не только определяют предметные умения обучающихся, но и служат мощнейшим инструментом для развития математических способностей: способностей к логическому мышлению, способности к сильному абстрактному мышлению, комбинаторных способностей, способностей к пространственному представлению и оперированию пространственными образами, способностей к критическому мышлению, математической памяти как специфической способности математической деятельности.

Анализ психолого-педагогической, методической литературы, опыта работы учителей математики и начальных классов, педагогов дошкольного образования показывает, что формирование математических способностей детей и подростков имеет на сегодняшний день огромное значение. Ко всему прочему, необходимо создавать для учащихся условия, способствующие возникновению познавательной потребности в приобретении знаний, в овладении способами их использования и влияющие на формирование навыков самостоятельной мыслительной деятельности, которая позволила бы им реализоваться в жизни, используя внутренний потенциал, как интеллектуальный, так и творческий.

Тем самым предлагаемые методические подходы к применению дидактического инструментария, основанного на головоломках, дают возможность включения их как в дополнительное, так и в основное математическое образование детей и подростков, что является новым направлением в методической работе учителя математики для создания условий по достижению высоких предметных результатов обучения.

В процессе анализа различных точек зрения по проблеме развития математических способностей детей и подростков различными средствами были разработаны и внед-

рены в образовательную практику методические подходы, основанные на дидактических возможностях нового средства обучения – математических головоломок. Проведенная апробация разнообразных головоломок как дидактического инструмента в основном и дополнительном образовании школьников и детей дошкольного возраста для развития их математических способностей позволила выстроить методические подходы к их включению в процесс обучения математике. В результате проводимого в последние три года творческой группой учителей математики и начальных классов исследования и опытного преподавания оформились методические подходы, определились ключевые идеи по использованию головоломок в образовательном процессе. Практическое использование головоломок как дидактического инструментария позволяет указать достижения школьниками предметных результатов и успехи учеников.

Использование головоломок как дидактического инструментария позволяет улучшить результаты освоения учениками программного материала. Мониторинг результатов учебной деятельности школьников показывает положительную динамику. При решении учебных и внеучебных задач ученики проявляют креативность мышления, инициативу, находчивость, активность, способность к эмоциональному восприятию математических задач и рассуждений, берут на себя ответственность за выбор способа решения и ответа. Значит, головоломки могут быть средством достижения не только предметных, но и личностных результатов.

Отметим также, что в последние два года нами активно наполняется экспонатами, созданными руками учащихся, среди которых огромное количество головоломок, школьный музей занимательных наук. Таким образом, непосредственный опыт применения головоломок в дополнительном образовании позволяет сделать вывод, что их гармоничное сочетание с урочной деятельностью реализует основные требования к результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования, сформулированным в ФГОС. Показателями этого становятся не только участие и победы наших учащихся в конкурсах и олимпиадах различного уровня, но и то, что ученики сами становятся инициаторами новой математической деятельности, основанной на решении и создании головоломок.

### Ссылки на источники

1. Концепции федеральных государственных образовательных стандартов общего образования / под ред. А. М. Кондакова, А. А. Кузнецова. – М.: Просвещение, 2008. – 39 с.
2. Дубровский В. Н., Калинин А. Т. Математические головоломки. – М.: Знание, 1990. – 144 с.
3. Минский Е. М. От игры к знаниям: развивающие и познавательные игры младших школьников. – М.: Просвещение, 1982. – 192 с.
4. Белов В. Н. Фантазмагория с головоломками. – М.: Мир, 2002. – 190 с.
5. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки. Книга 1. – СПб.: Новое время, 1914. – 275 с.
6. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки. Книга 2. – СПб.: Новое время, 1909. – 282 с.
7. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки. Книга 3. – СПб.: Новое время, 1915. – 322 с.
8. Перельман Я. И. Фигурки-головоломки из 7 кусочков. – М.: Радуга, 1927. – 88 с.
9. Перельман Я. И. Одним росчерком. – Л., 1940. – 18 с.
10. Перельман Я. И. Для юных математиков. Веселые задачи. – М.: Ремис, 2007. – 136 с.
11. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. – М.: Изд. дом «ОНИКС», 2000. – 576 с.
12. Кордемский Б. А. Математические завалекалки. – М.: Изд. дом «ОНИКС», 2000. – 512 с.
13. Минский Е. М. Указ. соч.
14. Болховитинов В. Н., Колтовой Б. И., Лаговский И. К. Твое свободное время. Занимательные задачи, опыты, игры. – М.: Детская литература, 1975. – 464 с.
15. Мочалов Л. П. Головоломки. – М.: Просвещение, 1996. – 190 с.
16. Яглом И. М. Как разрезать квадрат? – М.: Наука, 1968. – 112 с.

17. Кордемский Б. А., Русалев Н. В. Удивительный квадрат. – М.: Столетие, 1994. – 160 с.
18. Екимова М. А., Кукин Г. П. Задачи на разрезание. – М.: МЦНМО, 2002. – 120 с.
19. Лихтарников Л. М. Числовые ребусы и способы их решения. – СПб.: Лань, 1996. – 125 с.
20. Гарднер М. Математические чудеса и тайны. Математические фокусы и головоломки. – М.: Наука, 1978. – 128 с.
21. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. – М.: Мир, 1999. – 447 с.
22. Гарднер М. Математические досуги. – М.: Мир, 2000. – 443 с.
23. Лойд С. Математическая мозаика. – М.: Рипол, 1995. – 352 с.
24. Дьюдени Г. Э. 520 головоломок. – М.: Мир, 2000. – 333 с.
25. Барр С. Россыпи головоломок. – М.: Мир, 1987. – 415 с.
26. Картер Ф., Рассел К. Логические головоломки. – М.: Астрель, 2007. – 223 с.
27. Харди Дж. Головоломки, нелепицы, обманки. – М.: АСТ-ПРЕСС, 1998. – 96 с.
28. Haraguchi K. On a generalization of “Eight Blocks to Madness” puzzle // *Discrete Mathematics*. – 2016. – Volume 339. – Issue 4. – P. 1400–1409. – DOI.org/10.1016/j.disc.2015.12.014.
29. More on the one-dimensional sliding-coin puzzle / T.-Y. Lin, Sh.-Ch. Tsai, W.-N. Tsai, J.-Ch. Jong-Chuang Tsay // *Discrete Applied Mathematics*. – 2014. – Volume 162. – P. 32–41. – DOI.org/10.1016/j.dam.2013.08.013.
30. Automated generation and visualization of picture-logic puzzles / E. G. Ortiz-García, S. Salcedo-Sanz, J. M. Leiva-Murillo, A. M. Pérez-Bellido, J. A. Portilla-Figueras // *Computers & Graphics*. – 2007. – Volume 31. – Issue 5. – P. 750–760. – DOI.org/10.1016/j.cag.2007.08.006.
31. Majia A. K., Janab S., Palc R. K. An Algorithm for Generating only Desired Permutations for Solving Sudoku Puzzle // *Procedia Technology*. – 2013. – Volume 10. – P. 392–399. – DOI.org/10.1016/j.protcy.2013.12.375.
32. Эйлер Л. Письма к ученым / под ред. академика В. И. Смирнова. – М.; Л.: Изд-во Академии наук СССР, 1963. – С. 152–158.
33. Lin Ch.-H., Chen Ch.-M. Developing spatial visualization and mental rotation with a digital puzzle game at primary school level // *Computers in Human Behavior*. – 2016. – Volume 57. – P. 23–30. – DOI.org/10.1016/j.chb.2015.12.026.
34. Milková E. Puzzles as Excellent Tool Supporting Graph Problems Understanding // *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. – 2014. – Volume 131. – P. 177–181. – DOI.org/10.1016/j.sbspro.2014.04.100.
35. Aral N., Gursoy F., Yasar M. C. An Investigation of the Effect of Puzzle Design on Children's Development Areas // *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. – 2012. – Volume 51. – P. 228–233. – DOI.org/10.1016/j.sbspro.2012.08.150.
36. Vakil E., Heled E. The effect of constant versus varied training on transfer in a cognitive skill learning task: The case of the Tower of Hanoi Puzzle // *Learning and Individual Differences*. – 2016. – Volume 47. – P. 207–214. – DOI.org/10.1016/j.lindif.2016.02.009.
37. Sengul S., Argat A. The Analysis of Understanding Factorial Concept Processes of 7th Grade Students who have Low Academic Achievements with Pirie Kieren Theory // *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. – 2015. – Volume 197. – P. 1263–1270. – DOI.org/10.1016/j.sbspro.2015.07.398.
38. Determining of Vocational School Student's Attitudes Toward the Puzzle Method / S. A. Sargin, F. Baltaci, H. Bicici, A. Yumusak // *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. – 2015. – Volume 174. – P. 2856–2861. – DOI.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.979.
39. Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л. Н. Наглядная геометрия. 5–6 классы. – М.: Дрофа, 2001. – 192 с.
40. Зайкин М. И. Математический тренинг: развиваем комбинаторные способности. – М.: ВЛАДОС, 1996. – 176 с.
41. Утёмов В. В., Зиновкина М. М., Горев П. М. Педагогика креативности: прикладной курс научного творчества. – Киров: Изд-во МЦИТО, 2013. – 212 с.
42. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии. – СПб.: Питер, 1999. – 720 с.
43. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.
44. Горев П. М., Утёмов В. В. Формирование творческой личности на уроках и во внеурочной деятельности. Креативные ситуации. Умные задачи. Интеллектуальные паузы-разминки с детьми 7–12 лет. – Волгоград: Изд-во «Учитель», 2016. – 63 с.
45. Зиновкина М. М. НФТМ-ТРИЗ: креативное образование XXI века. Теория и практика. – М.: МГИУ, 2008. – 306 с.
46. Зиновкина М. М., Горев П. М., Утёмов В. В. Увлекательные игры с Совёнком: учеб.-метод. пособие по развитию творческого мышления детей дошкольного возраста. – Киров: Изд-во МЦИТО, 2015. – 120 с.
47. Gorev P. M., Kalimullin A. M. Structure and Maintenance of a Mathematical Creative Lesson as a Mean of Pupils' Meta-Subject Results Achievement // *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*. – 2017. – Volume 13. – Issue 6. – P. 2701–2720. – DOI: 10.12973/eurasia.2017.01248a.
48. Developing Creativity of Schoolchildren through the Course “Developmental Mathematics” / P. M. Gorev, A. R. Masalimova, F. Sh. Mukhametzyanova, E. V. Makarova // *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*. – 2017. – Volume 13. – Issue 6. – P. 1799–1815. – DOI: 10.12973/eurasia.2017.00698a.
49. Горев П. М., Новосёлова Н. Н. Механизмы апробации и внедрения курса «Развивающая математика» для учащихся 5–6-х классов в практику работы основной школы // *Научно-методический электронный журнал «Концепт»*. – 2017. – № 4. – URL: <http://e-koncept.ru/2017/170096.htm>.

50. Горев П. М., Утёмов В. В. Уроки развивающей математики. 5–6 классы: задачи математического кружка. – Киров: Изд-во МЦИТО, 2014. – 207 с.
51. Горев П. М., Утёмов В. В. Двадцать хитроумных задачек Совёнка. – Киров: Изд-во МЦИТО, 2015. – 30 с.
52. Горев П. М. Командная олимпиада по геометрическому конструированию в 8–9-х классах средней школы // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 4. – URL: <http://e-koncept.ru/2016/16068.htm>.
53. Горев П. М., Шувалов К. И. Курс «Изобретательская геометрия» для учащихся 7–9-х классов в системе непрерывного формирования творческого мышления школьников // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 11. – URL: <http://e-koncept.ru/2016/16256.htm>.

**Pavel M. Gorev,**

*Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of Pedagogical Technologies and Methods of Teaching Chair, Vyatka State University, Kirov, Russia*

[pavel-gorev@mail.ru](mailto:pavel-gorev@mail.ru)

#### **Puzzles as a learning tool in mathematical education of children and teenagers**

**Abstract.** Pedagogical science has always faced an issue of finding effective means to achieve the educational results of students. This problem is especially urgent today, when the world is changing rapidly, and those tools, that yesterday could keep pupils interested in studying mathematics and provided an opportunity to develop their mathematical abilities, quickly become out-of-date. Today, the search for a new toolkit that contributes to the development of students by means of mathematics, as well as mechanisms for incorporating it into the educational process, is highly relevant. Thus, the purpose of the article is to study the possibilities of using a new learning tool - puzzles in all their diversity in the process of teaching mathematics to children and teenagers, both in class and in extracurricular activities. The leading method here is the modeling of the methodological system of training in basic and additional mathematical education of children and teenagers, with the inclusion of a new didactic toolkit in it, which will contribute to the increase of students' interest in the subject, as well as to the development of certain mathematical abilities: logical thinking, abstraction, combining, operating with spatial images, critical thinking, mathematical memory. As a result of the research, the author of the article determined the place, opportunities and methodological aspects of including puzzles in the process of learning mathematics, both in the system of classical and nontraditional (creative) lessons of mathematics, and in the structure of extracurricular activities of students: mathematical circle, system of mathematical competitions, mathematical summer camp, etc. Practical use of this system makes it possible to reduce the disadvantage of tools deficiency for the development of mathematical abilities of students in the pedagogical practice, which gives us an opportunity to speak of high academic results in mathematical activity of children and teenagers.

**Key words:** teaching mathematics in secondary school, tools of learning mathematics, puzzles, development of mathematical abilities of schoolchildren, development of students' interest in mathematics.

Научно-методический электронный журнал «Концепт» (раздел 13.00.00 Педагогические науки) с 06.06.2017 включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (перечень ВАК Российской Федерации).



[www.e-koncept.ru](http://www.e-koncept.ru)

#### **Библиографическое описание статьи:**

Горев П. М. Головоломки как средство обучения в математическом образовании детей и подростков // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № 10 (октябрь). – С. 940–955. – URL: <http://e-koncept.ru/2018/181078.htm>.



DOI 10.24422/MCITO.2018.10.18192

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2018

© Горев П. М., 2018