ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Чигирёва О. Ю. Методика изложения темы «Решение краевых задач для уравнения Лапласа для круга и кольца методом разделения переменных» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V10. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2018/186094.htm.

ART 186094 УДК 378.147

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Чигирёва Ольга Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
k_fn12@bmstu.ru

Методика изложения темы «Решение краевых задач для уравнения Лапласа для круга и кольца методом разделения переменных»

Аннотация. *В статье предлагается методика изложения темы «Решение краевых задач для уравнения Лапласа для круга и кольца методом разделения переменных» в курсе «Уравнения математической физики». Приведены краткие теоретические сведения, связанные с применением метода разделения переменных. Показана общая схема решения краевых задач для уравнения Лапласа для указанных областей. Основные этапы решения сведены в таблицы. Подробно разобраны типовые задачи домашнего задания. Содержание статьи будет полезно студентам, а также преподавателям соответствующих курсов.*
Ключевые слова: *метод разделения переменных, задача Штурма – Лиувилля, уравнение Лапласа, краевая задача.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Введение

Математическая физика − это наука о математических моделях физических процессов. Она является важной частью образования выпускника технического университета, поскольку носит междисциплинарный характер. Одни и те же дифференциальные уравнения в частных производных описывают процессы различной природы: физические, химические, экологические, биологические и экономические. Методы математической физики также находят применение при моделировании различных технических устройств. Поэтому при подготовке студентов ставится методическая задача преподавания данной дисциплины в такой форме, которая позволит будущим специалистам не только овладеть математическим аппаратом, но и научиться применять его при решении прикладных задач.

Особое место среди методов решения задач математической физики занимают аналитические методы: метод разделения переменных, метод функции Грина и метод интегральных преобразований [1, 2]. В данной работе рассматривается применение метода разделения переменных при решении краевых задач для уравнения Лапласа для круга и кольца. Используя многолетний опыт преподавания данной дисциплины, авторы систематизировали необходимый теоретический материал [3, 4] и представили общую схему решения краевых задач для указанных областей в наиболее компактной форме. Рассмотренные в работе примеры решения краевых задач содержат подробные пояснения. Такой структурированный подход к изложению материала поможет студентам при самостоятельном изучении данной темы.

Уравнение Лапласа

Для описания стационарных процессов в физике обычно используют уравнения эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является уравнение Лапласа:

$$\Delta u(M)=0,$$

где Δ – дифференциальный оператор 2-го порядка, называемый ***оператором Лапласа***.

К уравнению Лапласа приводят задачи о стационарном тепловом состоянии однородного тела, равновесном распределении электрических зарядов на поверхности проводника, об установившемся движении несжимаемой жидкости и многие другие [5].

Постановка краевых задач для уравнения Лапласа

Краевая задача для уравнения Лапласа состоит в нахождении функции $u(M)$, удовлетворяющей в области Ω уравнению Лапласа и некоторому условию, заданному на границе Σ этой области. Такое условие называют ***граничным*** и в зависимости от его вида рассматривают следующие краевые задачи:

– ***первую краевую задачу***, или ***задачу Дирихле***, если задано граничное условие 1-го рода

$$u\Big|_{\Sigma}=f_1(P),\quad P\in\Sigma;$$

– ***вторую краевую задачу,*** или ***задачу Неймана***, если задано граничное условие 2-го рода

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Sigma}=f_2(P),\quad P\in\Sigma;$$

– ***третью краевую задачу***, если задано граничное условие 3-го рода

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\bigg|_{\Sigma}=f_3(P),\quad P\in\Sigma,$$

где $f_i(P), i=\overline{1,3}$ и $h(P)\geq 0$ $(h(P)\not\equiv 0)$ – функции, заданные на границе Σ области Ω; $\vec{n}$ – внешняя нормаль к границе Σ.

Если область, в которой поставлена краевая задача, ограничена, то такая задача называется ***внутренней***.

Если область, в которой поставлена краевая задача, является частью пространства, лежащей вне некоторой ограниченной области, то краевая задача называется ***внешней*** [6, 7].

При постановке внешней краевой задачи помимо граничного условия необходимо задать условие, описывающее поведение искомой функции на бесконечности. Для задач на плоскости таким условием является ограниченность искомой функции на бесконечности.

Основные свойства 1-й и 2-й внутренних и внешних краевых задач на плоскости

1. Решение внутренней (внешней) задачи Дирихле на плоскости единственно.
2. Внутренняя (внешняя) задача Дирихле на плоскости разрешима при любой непрерывной функции $f_1(P)$.
3. Решение внутренней (внешней) задачи Неймана на плоскости определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

4. Внутренняя (внешняя) задача Неймана на плоскости разрешима при любой непрерывной функции $f_2(P)$, удовлетворяющей условию

$$\oint_L f_2(P)\,dl = 0,$$

где L − граница области Ω (замкнутый контур).

Общая схема решения краевых задач для уравнения Лапласа для круга методом разделения переменных

Введем полярную систему координат (r,φ) с полюсом, совпадающим с центром круга радиусом R.

Учитывая, что оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

запишем ***3-ю краевую задачу для круга*** (см. табл. 1).

Таблица 1

Постановка 3-й краевой задачи для уравнения Лапласа

Внутренняя краевая задача	***Внешняя краевая задача***
Область D, в которой ищется решение краевой задачи: $D=\{(r,\varphi): 0\le r<R, 0\le\varphi\le 2\pi\}$	$D=\{(r,\varphi): r>R, 0\le\varphi\le 2\pi\}$
Уравнение Лапласа: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\quad (r,\varphi)\in D$; (1)	
Граничное условие: $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial r}+hu\right)\right\|_{r=R}=f(\varphi)$; (2)	$\left.\left(-\frac{\partial u}{\partial r}+hu\right)\right\|_{r=R}=f(\varphi)$. (2)
Искомая функция $u(r,\varphi)$ должна быть ограничена при $r\to 0$	Искомая функция $u(r,\varphi)$ должна быть ограничена на бесконечности

Для решения краевой задачи (1), (2) применим метод разделения переменных. Функцию $u(r,\varphi)$ будем искать в виде

$$u(r,\varphi)=X(r)\Phi(\varphi)\not\equiv 0. \tag{3}$$

Подставим предполагаемую форму решения (3) в уравнение (1) и разделим переменные:

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dX}{dr}\right)}{X(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda,\ \text{где}\ \lambda = const.$$

Отсюда получаем два дифференциальных уравнения:

$$-\Phi''(\varphi)=\lambda\Phi(\varphi),\quad 0\le\varphi\le 2\pi; \tag{4}$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dX}{dr}\right)=\lambda X(r),\quad 0<r<R. \tag{5}$$

Поскольку искомая функция $u(r,\varphi)$ должна удовлетворять условию периодичности по угловой переменной с периодом 2π:

$$u(r,\varphi+2\pi)=u(r,\varphi),$$

то функция $\Phi(\varphi)$ должна быть периодической с тем же периодом:

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi). \tag{6}$$

Дополняя уравнение (4) условием (6), приходим к ***задаче Штурма – Лиувилля с условием периодичности***:

$$\begin{cases} -\Phi''(\varphi)=\lambda\Phi(\varphi), \quad 0\le\varphi\le 2\pi; \\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi). \end{cases} \tag{7}$$

В этой задаче существует собственное значение $\lambda_0=0$, которому отвечает собственная функция $\Phi_0(\varphi)=1$, а каждому собственному значению $\lambda_n=n^2, n\in\mathrm{N}$ соответствуют две линейно независимые функции $\Phi_n^{(1)}(\varphi)=\cos n\varphi$ и $\Phi_n^{(2)}(\varphi)=\sin n\varphi$. Таким образом, $\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi$, где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Квадраты норм собственных функций равны:

$$\left\|\Phi_0\right\|^2=2\pi; \ \left\|\Phi_n^{(k)}\right\|^2=\pi, k=1,2.$$

При найденных значениях λ_n уравнение (5) примет вид

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dX_n}{dr}\right)-\lambda_n X_n(r)=0, \quad 0<r<R. \tag{8}$$

Для значения $\lambda_0=0$ получаем дифференциальное уравнение

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dX_0}{dr}\right)=0,$$

интегрируя которое находим

$$X_0(r)=A_0+B_0\ln r,$$

где A_0 и B_0 – произвольные постоянные.

Так как функция $\ln r$ при $r\to 0$ и $r\to\infty$ не ограничена, то для внутренней и внешней краевых задач константу B_0 следует положить равной нулю. Таким образом, $X_0(r)=A_0$.

При $\lambda_n=n^2, n\in\mathbf{N}$ приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$r^2X_n''(r)+rX_n'(r)-n^2X_n(r)=0.$$

Частными решениями этого уравнения являются две линейно независимые функции: $X_n^{(1)}(r)=r^n$ (ограничена при $r\to 0$ и не ограничена на бесконечности) и $X_n^{(2)}(r)=\dfrac{1}{r^n}$ (ограничена на бесконечности и не ограничена при $r\to 0$).

В результате получены решения уравнения (1) в следующем виде:

– для внутренней краевой задачи:

$$u_0(r,\varphi)=X_0(r)\Phi_0(\varphi)=A_0,$$

$$u_n(r,\varphi)=X_n(r)\Phi_n(\varphi)=r^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi), n\in\mathbf{N};$$

– для внешней краевой задачи:

$$u_0(r,\varphi)=X_0(r)\Phi_0(\varphi)=A_0,$$

$$u_n(r,\varphi)=X_n(r)\Phi_n(\varphi)=\frac{1}{r^n}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi), n\in\mathbf{N}.$$

В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма всех таких решений

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\varphi) \tag{9}$$

также будет удовлетворять этому уравнению.

В табл. 2 приведена форма записи решения (9) для различных типов краевых задач.

Таблица 2

Вид решения краевой задачи для уравнения Лапласа для круга

Тип краевой задачи	Форма записи решения краевой задачи (1), (2)
Внутренняя краевая задача	$u(r,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$ (10)
Внешняя краевая задача	$u(r,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$ (11)

Замечание. Для 1-й и 2-й краевых задач форма записи решений имеет тот же вид, что и для 3-й краевой задачи.

Определим коэффициенты A_0, A_n и B_n таким образом, чтобы решение, записанное в виде ряда (10) для внутренней краевой задачи и в виде ряда (11) для внешней краевой задачи, удовлетворяло граничному условию (2).

В результате подстановки (10) и (11) в граничное условие (2) приходим к следующим равенствам:

– для внутренней краевой задачи:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{R}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+h\left(A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)=f(\varphi);$$

– для внешней краевой задачи:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n}{R}\right)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+h\left(A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)=f(\varphi).$$

Таким образом, для внутренней и внешней краевых задач получаем соотношение

$$A_0h+\sum_{n=1}^{\infty}\left(h+\frac{n}{R}\right)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)=f(\varphi),$$

которое представляет собой разложение функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье по системе собственных функций $\{1,\cos n\varphi,\sin n\varphi\}_{n=1}^{\infty}$ задачи Штурма – Лиувилля. Коэффициенты Фурье $C_0=A_0h$, $C_n=\left(h+\frac{n}{R}\right)A_n$ и $D_n=\left(h+\frac{n}{R}\right)B_n$ этого разложения вычисляются по формулам

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi,\quad C_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi;$$

$$D_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Примеры решения краевых задач для уравнения Лапласа для круга

Пример 1 (внутренняя задача Дирихле). Найти решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0, \quad 0\le r<R, \quad 0\le\varphi\le 2\pi; \\ u\Big|_{r=R}=U_0\left(2\sin^2\varphi+\sin 3\varphi\right). \end{cases} \tag{12}$$

Решение краевой задачи (12) запишем в виде ряда (10):

$$u(r,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right).$$

Подставляя этот ряд в граничное условие, получаем:

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi=U_0\left(1-\cos 2\varphi+\sin 3\varphi\right).$$

Отсюда находим коэффициенты Фурье:

$A_0=U_0$; $A_2=-U_0$; $A_n=0,\ n\in\mathbf{N}\setminus\{2\}$;

$B_3=U_0$; $B_n=0,\ n\in\mathbf{N}\setminus\{3\}$.

Таким образом, решение краевой задачи (12) примет вид:

$$u(r,\varphi)=U_0\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos 2\varphi+\left(\frac{r}{R}\right)^3\sin 3\varphi\right).$$

Пример 2 (внешняя задача Дирихле). Найти решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0, \quad r>R, \quad 0\le\varphi\le 2\pi; \\ u\Big|_{r=R}=U_0\left(\sin\varphi+\cos 2\varphi\right). \end{cases} \tag{13}$$

Решение краевой задачи (13) запишем в виде ряда (11):

$$u(r,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right).$$

После подстановки этого ряда в граничное условие получаем:

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi=U_0\left(\sin\varphi+\cos 2\varphi\right),$$

откуда находим значения коэффициентов Фурье:

$A_0=0$; $A_2=U_0$; $A_n=0,\ n\in\mathbf{N}\setminus\{2\}$;

$B_1=U_0$; $B_n=0,\ n\in\mathbf{N}\setminus\{1\}$.

В результате решение краевой задачи (13) примет вид:

$$u(r,\varphi)=U_0\left(\frac{R}{r}\sin\varphi+\left(\frac{R}{r}\right)^2\cos 2\varphi\right).$$

Пример 3 (внутренняя задача Неймана). Найти значение параметра α, при котором разрешима внутренняя задача Неймана, и решить эту задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0, \quad 0\le r<R, \quad 0\le\varphi\le 2\pi; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=\dfrac{U_0}{2R}(\varphi-\alpha). \end{cases} \tag{14}$$

Определим значение параметра α из условия разрешимости внутренней задачи Неймана:

$$\int_0^{2\pi}\frac{U_0}{2R}(\varphi-\alpha)\,d\varphi=0.$$

Вычисляя значение интеграла, находим $\alpha=\pi$.

Далее запишем решение краевой задачи (14) в виде ряда (10):

$$u(r,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right).$$

Подставляя этот ряд в граничное условие, приходим к следующему равенству:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{R}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)=\frac{U_0}{2R}(\varphi-\pi).$$

Отсюда получаем:

$$A_n=\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\frac{U_0}{2}(\varphi-\pi)\cos n\varphi d\varphi=0, \quad n\in\mathbf{N};$$

$$B_n=\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\frac{U_0}{2}(\varphi-\pi)\sin n\varphi d\varphi=-\frac{U_0}{n^2}, \quad n\in\mathbf{N}.$$

С учетом найденных значений коэффициентов A_n и B_n решение исходной краевой задачи примет вид:

$$u(r,\varphi)=const-U_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n^2}\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Обратим внимание, что решение внутренней краевой задачи Неймана определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Решение краевых задач для уравнения Лапласа в кольце

Рассмотрим особенности решения краевой задачи для уравнения Лапласа внутри кругового кольца на следующем примере.

Найти решение ***смешанной краевой задачи*** для кольца с внутренним радиусом R_1 и внешним – R_2:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0, \quad R_1<r<R_2, \quad 0\le\varphi\le 2\pi; \\ \left.u\right|_{r=R_1}=f_1(\varphi), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_2}=f_2(\varphi). \end{cases} \tag{15}$$

Решение краевой задачи (15) будем искать в форме (3). После разделения переменных придем к задаче Штурма – Лиувилля с условием периодичности (7) для функции $\Phi(\varphi)$ и дифференциальному уравнению (8) относительно функции $X(r)$. Поскольку точка $r=0$ лежит вне кольца $(0<R_1<r<R_2)$, то в рассматриваемой области этому уравнению будут удовлетворять следующие функции:

$$X_0(r)=A_0+B_0\ln r \text{ при } \lambda_0=0;$$

$$X_n(r)=A_n r^n+B_n\frac{1}{r^n} \text{ при } \lambda_n=n^2,\, n\in\mathbf{N}.$$

Таким образом, решение краевой задачи (15) можно записать в виде:

$$u(r,\varphi)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n\frac{1}{r^n}\right)\cos n\varphi+\left(C_n r^n+D_n\frac{1}{r^n}\right)\sin n\varphi. \qquad (16)$$

Для того чтобы определить коэффициенты A_0, B_0, A_n, B_n, C_n и D_n, подставим ряд (16) в граничные условия. В результате получим:

$$A_0+B_0\ln R_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n R_1^n+B_n\frac{1}{R_1^n}\right)\cos n\varphi+\left(C_n R_1^n+D_n\frac{1}{R_1^n}\right)\sin n\varphi=f_1(\varphi); \qquad (17)$$

$$B_0\frac{1}{R_2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n nR_2^{n-1}-B_n\frac{n}{R_2^{n+1}}\right)\cos n\varphi+\left(C_n nR_2^{n-1}-D_n\frac{n}{R_2^{n+1}}\right)\sin n\varphi=f_2(\varphi). \qquad (18)$$

Для каждой функции $f_k(\varphi),\, k=1,2$ запишем разложение в ряд Фурье на отрезке $[0,2\pi]$ по системе функций $\{1,\cos n\varphi,\sin n\varphi\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f_k(\varphi)=\alpha_0^{(k)}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(k)}\cos n\varphi+\beta_n^{(k)}\sin n\varphi, \qquad (19)$$

где $\alpha_0^{(k)}$, $\alpha_n^{(k)}$ и $\beta_n^{(k)}$ – коэффициенты Фурье этих функций, вычисляемые по формулам:

$$\alpha_0^{(k)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_k(\varphi)d\varphi,\quad \alpha_n^{(k)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_k(\varphi)\cos n\varphi d\varphi;$$

$$\beta_n^{(k)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_k(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Замечая, что соотношения (17) и (18) представляют собой разложения функций $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ соответственно в ряды Фурье по системе собственных функций $\{1,\cos n\varphi,\sin n\varphi\}_{n=1}^{\infty}$ задачи Штурма – Лиувилля, приравняем коэффициенты Фурье в разложениях (17) и (19) для функции $f_1(\varphi)$, а также в разложениях (18) и (19) для функции $f_2(\varphi)$. В результате получим системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_0, B_0, A_n, B_n, C_n и D_n:

$$\begin{cases} A_0+B_0\ln R_1=\alpha_0^{(1)};\\ B_0\dfrac{1}{R_2}=\alpha_0^{(2)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n R_1^n+B_n\dfrac{1}{R_1^n}=\alpha_n^{(1)};\\ n\left(A_n R_2^{n-1}-B_n\dfrac{1}{R_2^{n+1}}\right)=\alpha_n^{(2)}; \end{cases} \qquad \begin{cases} C_n R_1^n+D_n\dfrac{1}{R_1^n}=\beta_n^{(1)};\\ n\left(C_n R_2^{n-1}-D_n\dfrac{1}{R_2^{n+1}}\right)=\beta_n^{(2)}; \end{cases}$$

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Чигирёва О. Ю. Методика изложения темы «Решение краевых задач для уравнения Лапласа для круга и кольца методом разделения переменных» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V10. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2018/186094.htm.

решая которые находим:

$$A_0 = \alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)} R_2 \ln R_1; \qquad B_0 = \alpha_0^{(2)} R_2; \qquad A_n = \frac{\alpha_n^{(1)} n R_1^n + \alpha_n^{(2)} R_2^{n+1}}{n\left(R_1^{2n} + R_2^{2n}\right)}; \qquad B_n = \frac{R_1^n R_2^n \left(\alpha_n^{(1)} n R_2^n - \alpha_n^{(2)} R_2 R_1^n\right)}{n\left(R_1^{2n} + R_2^{2n}\right)};$$

$$C_n = \frac{\beta_n^{(1)} n R_1^n + \beta_n^{(2)} R_2^{n+1}}{n\left(R_1^{2n} + R_2^{2n}\right)}; D_n = \frac{R_1^n R_2^n \left(\beta_n^{(1)} n R_2^n - \beta_n^{(2)} R_2 R_1^n\right)}{n\left(R_1^{2n} + R_2^{2n}\right)}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (16), получаем решение краевой задачи (15).

Пример 4. Найти решение следующей краевой задачи для кольца:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad R < r < 2R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi; \\ u\Big|_{r=R} = U_0\left(1 + \cos\varphi\right), \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2R} = \dfrac{U_0}{R}\sin 2\varphi. \end{cases} \tag{20}$$

Решение краевой задачи (20) запишем в виде ряда (16):

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n}\right)\cos n\varphi + \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}\right)\sin n\varphi.$$

Подставляя этот ряд в граничные условия, приходим к соотношениям:

$$A_0 + B_0 \ln R + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n R^n + \frac{B_n}{R^n}\right)\cos n\varphi + \left(C_n R^n + \frac{D_n}{R^n}\right)\sin n\varphi = U_0\left(1 + \cos\varphi\right);$$

$$\frac{B_0}{2R} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n n (2R)^{n-1} - \frac{nB_n}{(2R)^{n+1}}\right)\cos n\varphi + \left(C_n n (2R)^{n-1} - \frac{nD_n}{(2R)^{n+1}}\right)\sin n\varphi = \frac{U_0}{R}\sin 2\varphi.$$

Запишем значения коэффициентов Фурье:

– для функции $f_1(\varphi) = U_0\left(1+\cos\varphi\right)$ находим: $\alpha_0^{(1)} = U_0$; $\alpha_1^{(1)} = U_0$; $\alpha_n^{(1)} = 0, n \in \mathbf{N}\setminus\{1\}$; $\beta_n^{(1)} = 0, n \in \mathbf{N}$;

– для функции $f_2(\varphi) = \dfrac{U_0}{R}\sin 2\varphi$ получаем: $\alpha_0^{(2)} = 0$; $\alpha_n^{(2)} = 0, n \in \mathbf{N}$; $\beta_2^{(2)} = \dfrac{U_0}{R}$; $\beta_n^{(2)} = 0, n \in \mathbf{N}\setminus\{2\}$.

В результате системы уравнений для определения коэффициентов разложения (16) примут вид:

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln R = U_0; \\ B_0 \dfrac{1}{2R} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 R + B_1 \dfrac{1}{R} = U_0; \\ A_1 - B_1 \dfrac{1}{(2R)^2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 R^2 + D_2 \dfrac{1}{R^2} = 0; \\ 2\left(C_2 2R - D_2 \dfrac{1}{(2R)^3}\right) = \dfrac{U_0}{R}. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим:

$$A_0 = U_0, \ B_0 = 0; \ A_1 = \frac{1}{5}\cdot\frac{U_0}{R}, \ B_1 = \frac{4}{5}\cdot U_0 R; \ C_2 = \frac{4}{17}\cdot\frac{U_0}{R^2}, \ D_2 = -\frac{4}{17}\cdot U_0 R^2.$$

Таким образом, решение краевой задачи (20) примет вид:

$$u(r,\varphi) = U_0 + \frac{U_0}{5}\left(\frac{r}{R} + 4\frac{R}{r}\right)\cos\varphi + \frac{4U_0}{17}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right)\sin 2\varphi.$$

ISSN 2304-120X
Концепт научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Чигирёва О. Ю. Методика изложения темы «Решение краевых задач для уравнения Лапласа для круга и кольца методом разделения переменных» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V10. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2018/186094.htm.

Заключение

Работа основана на личном опыте авторов преподавания данной дисциплины и ориентирована на студентов приборостроительных специальностей. В связи с этим особое внимание уделено методике решения краевых задач. Структурированная форма представления материала позволит сформировать у студента необходимые компетенции. Содержание статьи будет полезным преподавателям и студентам при подготовке к занятиям.

Ссылки на источники

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004.
3. Там же.
4. Феоктистов В. В., Чигирёва О. Ю. Уравнения математической физики и специальные функции: метод. указания к выполнению домашнего задания. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Указ. соч.
6. Там же.
7. Феоктистов В. В., Чигирёва О. Ю. Указ. соч.

Faniya Akhmetova,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
dobrich2@mail.ru
Olga Chigireva,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
k_fn12@bmstu.ru

Presentation of the topic "The solution of boundary value problems for the Laplace equation for a circle and a ring by the method of variables separation"

Abstract. The article presents a method of presenting the topic "Solving boundary value problems for the Laplace equation for a circle and a ring by the method of variables separation" in the course "Equations of Mathematical Physics". A brief theoretical information related to the use of variables separation method is given. The general scheme for solving boundary value problems for the Laplace equation for the indicated domains is shown. The main stages of solving are summarized in tables. Typical tasks of the homework are analyzed in detail. The content of the article will be useful for students, as well as for teachers of relevant courses.

Key words: method of variables separation, Sturm-Liouville problem, Laplace equation, boundary value problem.

References

1. Vladimirov, V. S. (1988). *Uravnenija matematicheskoj fiziki*, Nauka, Moscow (in Russian).
2. Tihonov, A. N. & Samarskij, A. A. (2004). *Uravnenija matematicheskoj fiziki*, Nauka, Moscow (in Russian).
3. Ibid.
4. Feoktistov, V. V. & Chigirjova, O. Ju. (2015). *Uravnenija matematicheskoj fiziki i special'nye funkcii: metod. ukazanija k vypolneniju domashnego zadanija*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moscow (in Russian).
5. Tihonov, A. N. & Samarskij, A. A. (2004). Op. cit.
6. Ibid.
7. Feoktistov, V. V. & Chigirjova, O. Ju. (2015). Op. cit.

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	06.07.18	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	30.07.18
Принята к публикации *Accepted for publication*	30.07.18	Опубликована *Published*	31.10.18

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru