ISSN 2304-120X
научно-методический электронный журнал
Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Построение графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V11. – 0,2 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2018/186105.htm.

ART 186105 УДК 378.147

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Головина Анастасия Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nastya_gm@mail.ru

Построение графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля

Аннотация. *В статье предлагается методика изложения темы «Построение графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля» в курсе «Математический анализ». Приведены краткие теоретические сведения в области функциональной зависимости многозначных линейных функций. Продемонстрированы практические методы, позволяющие выполнить построение эскизов графиков функций различного уровня сложности. Цель данной работы – дать алгоритм построения графиков многозначных функций, содержащих знак модуля, к которым применены линейные преобразования. Содержание статьи будет полезно студентам, а также преподавателям первого курса.*
Ключевые слова: *однозначные и многозначные функции, модуль, линейные преобразования, параллельный перенос, график функции.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Понятия однозначной и многозначной функций

Ранее в статьях [1, 2] была изложена методика построения графиков линейных однозначных функций, содержащих знак модуля. Детально были разобраны графики функций, заданных в виде линейной комбинации (суммы или разности модулей функций). В этих работах нами были рассмотрены общие методы построения графиков некоторых лишь однозначных функциональных зависимостей. Напомним, что функциональная зависимость $y = f(x)$ называется **однозначной**, если каждому значению аргумента x соответствует единственное значение зависимой переменной y.

Тем не менее на практике часто приходится сталкиваться с такими зависимостями, в которых каждому значению независимой переменной x может соответствовать несколько значений переменной y. Напомним определение неоднозначной (многозначной) функции, введённое ранее в [3, 4].

Определение. **Многозначной функцией** называется закон (соответствие или правило) f, по которому хотя бы одному элементу x из множества X ставится в соответствие более одного значения y из множества Y.

Геометрическое место точек (ГМТ), удовлетворяющих аналитическому заданию многозначной функциональной зависимости, называется её **графиком**.

Определение. **ГМТ**, удовлетворяющих какому-либо свойству, называется множество, в которое входят все те и только те точки, которые удовлетворяют этому свойству.

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Построение графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V11. – 0,2 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2018/186105.htm.

Под свойством, указанным в определении, может подразумеваться какое-либо уравнение или неравенство. Например, все прекрасно помнят определение окружности.

Определение. **Окружность** – это ГМТ, равноудаленных от одной данной точки, называемой центром окружности. Расстояние, на которое удалены все точки окружности от ее центра, называется радиусом этой окружности.

Как известно, уравнение окружности в общем виде выглядит следующим образом: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, где (x_0, y_0) – координаты центра окружности, а r – это радиус окружности. Другими словами, ГМТ, удовлетворяющее уравнению $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, определяет или задает на плоскости окружность с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом r. Аналогичным образом можно определить ГМТ, удовлетворяющих не уравнению, а неравенству.

Хорошо известно, что круг – это внутренность окружности либо вместе с самой окружностью, либо без нее. Круг с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом r определяется следующим неравенством: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$ – внутренность круга без окружности, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2$ – внутренность круга вместе с окружностью.

Построение графиков многозначных линейных функций

Для построения графика функции $|y|=f(x)$ воспользуемся определением модуля.

Определение. **Модулем** числа называется выражение:

$$|x|=\begin{cases} x, x\geq 0, \\ -x, x<0. \end{cases}$$

Как видно из определения, раскрывая модуль, стоящий в левой части уравнения $|y|=f(x)$, получаем, что данное уравнение может быть представлено в виде:

$$y=\begin{cases} f(x), y\ge 0, \\ -f(x), y<0. \end{cases}$$

Из последнего аналитического представления видно, что для того, чтобы построить график данной функции, нужно:

1-й шаг: построить график функции $y=f(x)$ при $y\ge 0$;

2-й шаг: отразить построенный график относительно оси абсцисс.

Рассмотрим теперь данный алгоритм на конкретном примере.

Пример 1. Построить ГМТ функции $|y|=5$.

По определению модуля уравнение $|y|=5$ можно представить в виде:

$$y=\begin{cases} 5, y\ge 0, \\ -5, y<0. \end{cases}$$

1-й шаг: строим график функции $y=5$.

2-й шаг: отражаем график, построенный на первом шаге относительно оси абсцисс (см. рис. 1).

В итоге получаем, что ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y|=5$, являются две параллельные прямые $y=5$ и $y=-5$.

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Построение графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V11. – 0,2 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2018/186105.htm.

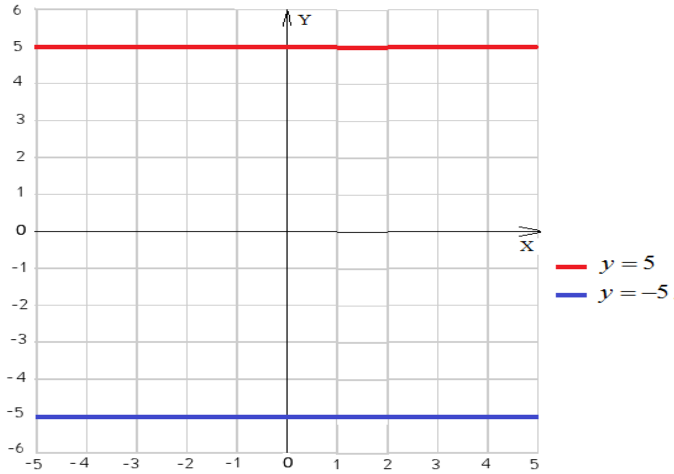

Рис. 1. ГМТ функции $|y|=5$

Алгоритмы построения графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля

Выражение $|y|=|f(x)|$ можно представить в виде $y=\begin{cases}|f(x)|, y\ge 0,\\ -|f(x)|, y<0.\end{cases}$ Отсюда можно сделать вывод, что методика построения графиков функций вида $|y|=|f(x)|$ следующая:

1-й шаг: построить график функции $y=|f(x)|$.

2-й шаг: отразить построенный график относительно оси абсцисс.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

Пример 2. Построить ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y|=|x|$.

Согласно определению модуля, уравнение $|y|=|x|$ может быть представлено в виде:

$$y=\begin{cases}|x|, y\ge 0,\\ -|x|, y<0.\end{cases}$$

1-й шаг: строим график функции $y=|x|$.

2-й шаг: отражаем построенный на первом шаге график относительно оси абсцисс (рис. 2).

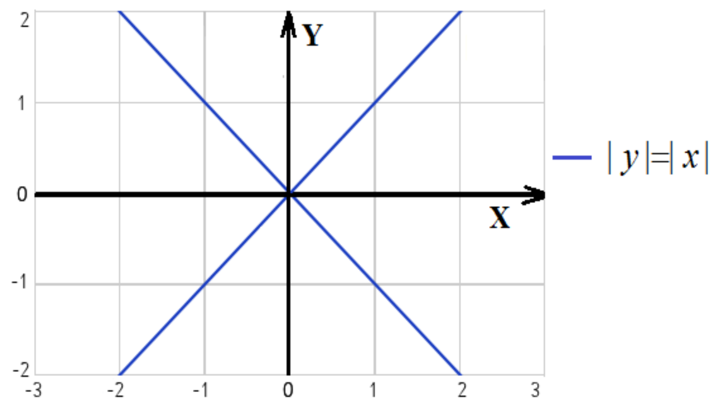

Рис. 2. ГМТ функции $|y|=|x|$

В итоге получаем, что ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y|=|x|$, являются биссектрисы всех координатных углов.

При построении графиков линейных функций, содержащих знак модуля, очень часто бывает удобно преобразовать прямоугольную декартову систему координат XOY, а именно с помощью **параллельного переноса** сдвинуть всю систему координат на некоторый вектор (в зависимости от конкретного примера). Проделав такое преобразование, получим новую систему координат $X_1O_1Y_1$ с центром в точке O_1, которая имеет определённые координаты относительно старой системы координат. И уже в этой новой системе координат будем строить графики. Рассмотрим теперь данный процесс на конкретных примерах.

Пример 3. Построить ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y+3|=|x-1|$.

По определению модуля уравнение $|y+3|=|x-1|$ может быть представлено в виде:

$$y=\begin{cases}-3+|x-1|, y\geq -3,\\ -3-|x-1|, y<-3.\end{cases}$$

1-й шаг: построение ГМТ функции $y=-3+|x-1|$.

Преобразуем прямоугольную декартовую систему координат. Перейдем от системы координат XOY к $X_1O_1Y_1$, перенеся ось абсцисс на три единицы вниз, а ось ординат на одну единицу вправо. Начало O_1 новой системы координат $X_1O_1Y_1$ имеет координаты $(1,-3)$ относительно старой системы координат. В этой новой системе координат строим график функции $y_1=|x_1|$.

2-й шаг: отражение построенного на первом шаге графика функции относительно оси абсцисс (рис. 3).

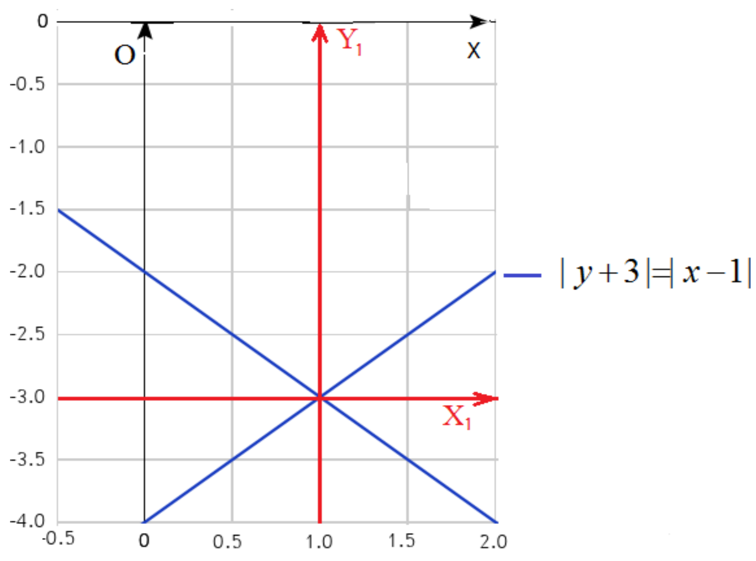

Рис. 3. ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y+3|=|x-1|$

В итоге получаем, что ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y+3|=|x-1|$, является совокупность двух пересекающихся в точке $(1,-3)$ прямых.

Замечание. Графики многозначных функций вида $|y|=f(x)$ обладают свойством симметричности относительно оси Ox (так как точки (x,y) и $(x,-y)$ одновременно удовлетворяют аналитическому заданию данной многозначной функции).

Следовательно, для построения графика такой многозначной функции достаточно построить ее график лишь в верхней полуплоскости, т. е. при $y \geq 0$, а затем симметрично отразить построенный график на нижнюю полуплоскость $y<0$, как было показано в примерах.

Работа основана на личном опыте авторов преподавания данной дисциплины и ориентирована на студентов первого курса. Особое внимание уделено методике построения графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля; методам параллельного переноса и отражения графиков относительно оси симметрии. Овладение навыками построения графиков будет полезным при выполнении целого спектра задач. Структурированная форма представления материала позволит сформировать у студента необходимые компетенции. Содержание статьи будет полезным преподавателям и студентам при подготовке к занятиям.

Ссылки на источники

1. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – С. 159–170. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm.
2. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Линейная комбинация функций, содержащих знак модуля и методика построения их графиков // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V6. – С. 49–54. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170138.htm.
3. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика построения графиков …
4. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Линейная комбинация функций …

Faniya Akhmetova,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
dobrich2@mail.ru
Anastasiya Golovina,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
nastya_gm@mail.ru

Constructing multivalued linear functions graphs, containing a modulus sign

Abstract. The article proposes a method of presenting the topic “Constructing graphs of multivalued linear functions containing a modulus sign” in the course “Mathematical Analysis”. A brief theoretical information in the field of functional dependence of multivalued linear functions is given. The authors demonstrate practical methods to build the sketches of functions graphs with different levels of complexity. The purpose of this work is to give an algorithm for constructing graphs of multivalued functions, containing a modulus sign, to which linear transformations are applied. The content of the article will be useful for students, as well as for teachers working with the first-year students.

Key words: single-valued and multivalued functions, modulus, linear transformations, parallel translation, a graph of a function.

References

1. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Metodika postroeniya grafikov linejnyh funkcij, soderzhashchih znak modulya”, *Nauchno-metodicheskij ehlektronnyj zhurnal “Koncept”,* № 5 (maj), pp. 159–170. Available at: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm (in Russian).
2. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Linejnaya kombinaciya funkcij, soderzhashchih znak modulya i metodika postroeniya ih grafikov”, *Nauchno-metodicheskij ehlektronnyj zhurnal “Koncept”,* № V6, pp. 49–54. Available at: http://e-koncept.ru/2017/170138.htm (in Russian).
3. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). Metodika postroeniya grafikov …
4. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). Linejnaya kombinaciya funkcij …

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Построение графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V11. – 0,2 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2018/186105.htm.

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	27.07.18	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	30.08.18
Принята к публикации *Accepted for publication*	30.08.18	Опубликована *Published*	21.11.18

ISSN 2304-120X

www.e-koncept.ru