ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Метод разбиения плоскости на несколько областей при построении графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V12. – 0,2 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2018/186118.htm.

ART 186118 **УДК 378.147**

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Головина Анастасия Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nastya_gm@mail.ru

Метод разбиения плоскости на несколько областей при построении графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля

Аннотация. *Задача графического представления результатов порой не проста, ведь она не всегда приводит к построению графика, который можно быстро и с высоким качеством изобразить на плоскости. В статье предложен один из методов построения графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля, а именно метод разбиения координатной плоскости на несколько областей. Приведены краткие теоретические сведения в области функциональной зависимости многозначных линейных функций. Продемонстрированы практические приемы, позволяющие выполнить построение эскизов графиков функций различного уровня сложности методом разбиения плоскости. Цель данной работы – дать алгоритм построения графиков многозначных функций, содержащих знак модуля; показать эффективность и простоту построения графиков на примере указанного метода. Содержание статьи будет полезно студентам, а также преподавателям первого курса.*
Ключевые слова: *однозначные и многозначные функции, модуль, метод разбиения плоскости на области, график функции.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

При решении практических задач довольно часто приходится сталкиваться с необходимостью представления результатов решения какой-либо сложной задачи или некоторого научного исследования в удобном для восприятия человека виде. На сегодняшний день существует множество путей достижения этой цели. Во многих случаях, особенно при решении комплексных задач, наилучшим способом является графическое решение. Главное его преимущество – наглядность и простота восприятия представляемой информации.

Ранее в статьях [1, 2] была изложена методика построения графиков линейных однозначных функций, содержащих знак модуля. Детально были разобраны графики функций, заданных в виде линейной комбинации (суммы или разности модулей функций). В этих работах нами были рассмотрены общие методы построения графиков некоторых лишь однозначных функциональных зависимостей. Напомним, что функциональная зависимость $y = f(x)$ называется **однозначной**, если каждому значению аргумента x соответствует единственное значение зависимой переменной y.

Тем не менее на практике часто приходится сталкиваться с такими зависимостями, в которых каждому значению независимой переменной x может соответствовать несколько значений переменной y. Напомним определение неоднозначной (многозначной) функции, введённое ранее в [3, 4].

Определение. Многозначной функцией называется закон (соответствие или правило) f, по которому хотя бы одному элементу x из множества X ставится в соответствие более одного значения y из множества Y.

Геометрическое место точек (ГМТ), удовлетворяющих аналитическому заданию многозначной функциональной зависимости, называется её **графиком**.

Определение. ГМТ, удовлетворяющих какому-либо свойству, называется множество, в которое входят все те и только те точки, которые удовлетворяют этому свойству.

Метод разбиения плоскости на несколько областей

Продемонстрируем практические приемы построения графиков функций различного уровня сложности методом разбиения координатной плоскости. Рассмотрим графики многозначных функций, которые содержат знак модуля.

Плоскость XOY, как мы уже успели убедиться в [5], может быть разбита на полуплоскости, например, двумя параллельными прямыми $y=5$ и $y=-5$, удовлетворяющими уравнению $|y|=5$ (рис. 1):

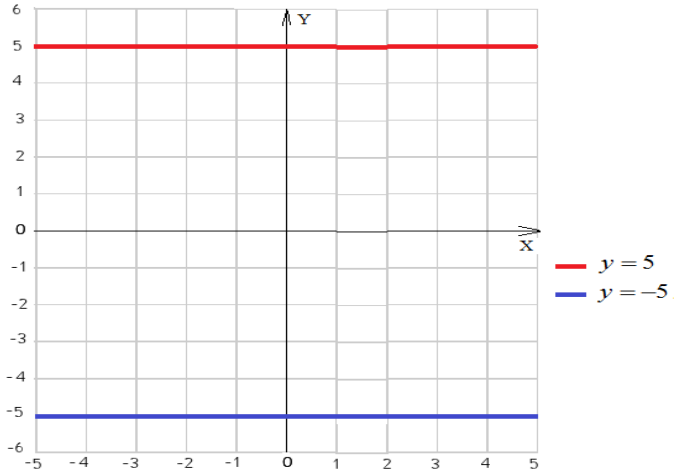

Рис. 1. ГМТ функции $|y|=5$

или на несколько других областей, например, прямыми $y=x$ и $y=-x$, т. е. графиком функции $y=|x|$ (рис. 2).

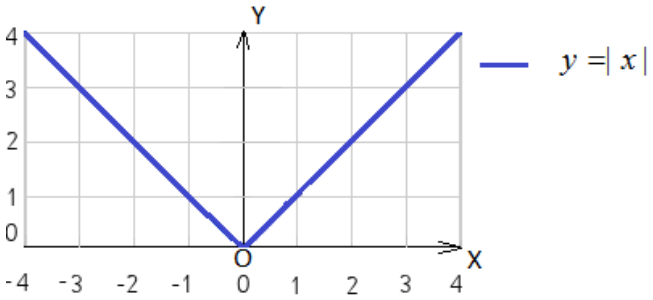

Рис. 2. ГМТ функции $y=|x|$

Прямые, которые разбивают плоскость XOY на несколько областей, называются **границами областей**.

Определить границы области можно, приравняв выражение, стоящее под знаком модуля, к нулю.

Алгоритм построения графиков методом разбиения плоскости

Метод построения графиков многозначных функций, содержащих знак модуля, с помощью разбиения координатной плоскости на несколько областей заключается в следующем:

1-й шаг: определение границ области (приравнивание к нулю выражения, стоящего под знаком модуля).

2-й шаг: при переходе через границы области функция меняет знак. Следовательно, следующим шагом является раскрытие знака модуля и получение аналитического вида функции в каждой из образовавшихся областей.

3-й шаг: построение в каждой из областей графика соответствующей функции.

Рассмотрим теперь применение данного алгоритма построения графиков на двух конкретных примерах.

Пример 1. Построить ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y-2x+3|+x=1$.

1-й шаг: приравниванием выражение, стоящее под знаком модуля, к нулю, получаем: $y-2x+3=0$. Прямая $y=2x-3$ разбивает плоскость на несколько областей (в данном случае на **две области**).

2-й шаг: при $y \geq 2x-3$ выражение, стоящее под знаком модуля, $y-2x+3$, не меньше нуля. Следовательно, уравнение $|y-2x+3|+x=1$ при $y \geq 2x-3$ имеет вид $y=x-2$. Аналогично определяем, что при $y<2x-3$ уравнение $|y-2x+3|+x=1$ имеет вид $y=3x-4$.

3-й шаг: таким образом, нам следует построить график кусочной функции:

$$y=\begin{cases} x-2, & y \geq 2x-3, \\ 3x-4, & y<2x-3, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 3.

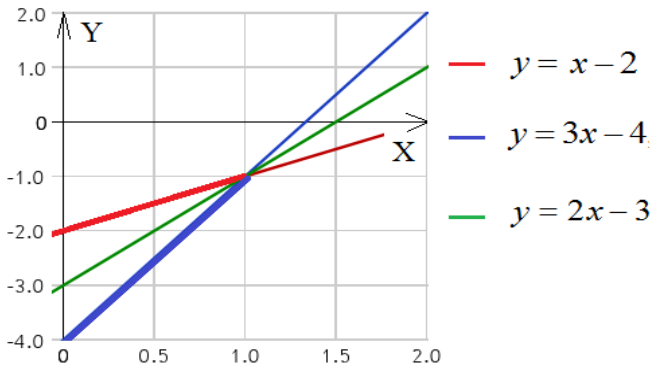

Рис. 3. ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y-2x+3|+x=1$

В итоге получаем, что ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y-2x+3|+x=1$, является угол с вершиной в точке $(1,-1)$, принадлежащей прямой $y=2x-3$.

Рассмотрим второй пример применения метода разбиения плоскости на несколько областей. Усложним задачу, рассмотрим сумму двух модулей функций.

<u>Пример 2.</u> Построить ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|2x-y|+|3x+y|=1$.

Так как в равенстве присутствует уже два знака модуля, то, соответственно, у нас будет не одна, а две границы различных областей.

1-й шаг: приравниваем выражения, стоящие под знаком модуля, к нулю, получаем $y=2x$, $y=-3x$. Эти прямые разбивают плоскость XOY на **четыре области**.

2-й шаг:

в области I: при $y<2x$, $y\geq -3x$ уравнение $|2x-y|+|3x+y|=1$ имеет вид $2x-y+3x+y=1$, $5x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{5}$;

в области II: при $y\geq 2x$, $y\geq -3x$ имеем $-2x+y+3x+y=1$, $2y+x=1$, $2y=1-x$, $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$;

в области III: при $y\geq 2x$, $y\leq -3x$ имеем $-2x+y-3x-y=1$, $-5x=1$, $x=-\frac{1}{5}$;

в области IV: при $y\leq 2x$, $y\leq -3x$ имеем $-2x-y-3x-y=1$, $-2y-x=1$, $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

3-й шаг: строим графики функций:

$$y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, y\geq 2x, y\leq -3x,\\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, y\leq 2x, y\leq -3x,\end{cases}$$

$$x=\begin{cases}\frac{1}{5}, y\leq 2x, y\geq -3x,\\ -\frac{1}{5}, y\geq 2x, y\leq -3x.\end{cases}$$

Результат построения показан на рис. 4:

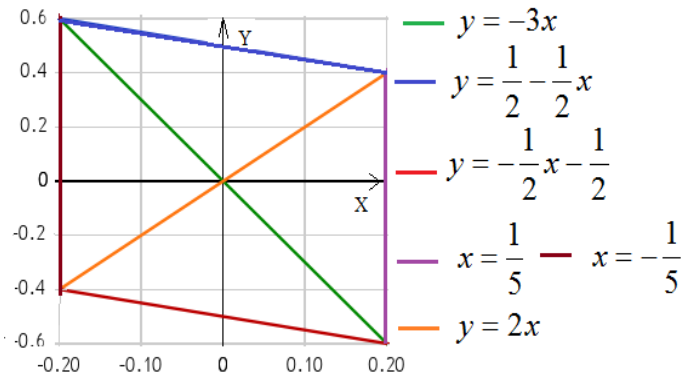

Рис. 4. ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|2x-y|+|3x+y|=1$

В итоге искомым ГМТ является параллелограмм, стороны которого задаются уравнениями $x=\frac{1}{5}$, $x=-\frac{1}{5}$, $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Подводя итог, можно сказать, что предложенный в статье метод разбиения координатной плоскости на несколько областей при построении графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля, позволит достаточно быстро сформировать навыки исследования функций и построения их графиков. Еще раз сформулируем основные положения и этапы построения:

1. Определение границ области путем приравнивания к нулю выражения, стоящего под знаком модуля.
2. Раскрытие знака модуля и получение аналитического вида функции в каждой из образовавшихся областей.
3. Построение в каждой из областей графика соответствующей функции.
4. Выделение искомого ГМТ заданной функции.

Овладение методом разбиения координатной плоскости при исследовании многозначных функций будет полезным при выполнении целого спектра задач. Более того, геометрическая интерпретация удобна и доступна для понимания некоторых алгебраических задач, которые перестают быть абстрактными и отвлеченными. Основным преимуществом графического решения задачи исследования функции является наглядность и простота восприятия представляемой информации.

Работа основана на личном опыте авторов преподавания дисциплины «Математический анализ» и ориентирована на студентов первого курса. Структурированная форма представления материала позволит сформировать у студента необходимые компетенции. Содержание статьи будет полезным преподавателям и студентам при подготовке к занятиям.

Ссылки на источники

1. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – С. 159–170. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm.
2. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Линейная комбинация функций, содержащих знак модуля и методика построения их графиков // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V6. – С. 49–54. – URL: http://e-koncept.ru/2017/170138.htm.
3. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля.
4. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Линейная комбинация функций, содержащих знак модуля и методика построения их графиков
5. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Построение графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V11. – С. 6–11. – URL: http://e-koncept.ru/2018/186105.htm.

Faniya Akhmetova,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
dobrich2@mail.ru
Anastasiya Golovina,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
nastya_gm@mail.ru

The method of splitting the plane into several areas when constructing graphs of multi-valued linear functions containing the modulus sign

Abstract. The task of results graphical presentation is sometimes complicated, because it does not always lead to the construction of a graph, which can be quickly depicted on a plane with high quality. The article proposes one of the methods for constructing graphs of multi-valued linear functions containing the modulus sign, namely, the method of splitting the coordinate plane into several areas. Brief theoretical information in the field of functional

dependence of multi-valued linear functions is given. The authors demonstrate practical techniques that allow constructing sketches of functions graphs of various complexity levels by the method of plane splitting. The purpose of this work is to give an algorithm for constructing graphs of multivalued functions containing the modulus sign; to show the effectiveness and easiness of constructing graphs using the specified method. The content of the article will be useful to students, as well as to teachers working with the first-year students.

Key words: single-valued and multivalued functions, modulus, method of splitting a plane into areas, function graph.

References

1. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Metodika postroeniya grafikov linejnyh funkcij, soderzhashchih znak modulya”, *Nauchno-metodicheskij ehlektronnyj zhurnal “Koncept”,* № 5 (maj), pp. 159–170. Available at: http://e-koncept.ru/2017/170117.htm (in Russian).
2. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Linejnaya kombinaciya funkcij, soderzhashchih znak modulya i metodika postroeniya ih grafikov”, *Nauchno-metodicheskij ehlektronnyj zhurnal “Koncept”,* № V6, pp. 49–54. Available at: http://e-koncept.ru/2017/170138.htm (in Russian).
3. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Metodika postroeniya grafikov linejnyh funkcij, soderzhashchih znak modulya”.
4. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2017). “Linejnaya kombinaciya funkcij, soderzhashchih znak modulya i metodika postroeniya ih grafikov”.
5. Ahmetova, F. H. & Golovina, A. M. (2018). “Postroenie grafikov mnogoznachnyh linejnyh funkcij, soderzhashchih znak modulya”, *Nauchno-metodicheskij ehlektronnyj zhurnal “Koncept”,* № V11, pp. 6–11. Available at: http://e-koncept.ru/2018/186105.htm (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	30.07.18	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	20.08.18
Принята к публикации *Accepted for publication*	20.08.18	Опубликована *Published*	15.12.18

ISSN 2304-120X
12
9 772304 120180
www.e-koncept.ru

Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)
© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2018
© Ахметова Ф. Х., Головина А. М., 2018