ISSN 2304-120X
Концепт научно-методический электронный журнал

*Пелевина И. Н., Ласковая Т. А., Ахметова Ф. Х. Методические аспекты изложения темы «Преобразование Лапласа. Нахождение изображения по оригиналу» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2019. – № V1. – 0,2 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2019/196001.htm.*

**ART 196001** **УДК 378.147**

***Пелевина Ирина Николаевна,***
*старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва*
pdv62@mail.ru

***Ласковая Татьяна Алексеевна,***
*старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва*
talaskovy@mail.ru

***Ахметова Фаина Харисовна,***
*кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва*
dobrich2@mail.ru

# Методические аспекты изложения темы «Преобразование Лапласа. Нахождение изображения по оригиналу»

***Аннотация.*** *В статье предлагается вариант изложения материала по теме «Преобразование Лапласа. Нахождение изображения по оригиналу» в сжатой форме. Рассмотрены основные теоремы, с помощью которых находят изображения по оригиналам и наоборот. Примеры подобраны таким образом, чтобы наглядно проиллюстрировать каждую теорему и основные понятия темы. Содержание статьи послужит материалом для подготовки к занятиям второго курса при изучении раздела «Операционное исчисление» и будет полезным как преподавателям, так и студентам.*
***Ключевые слова:*** *преобразование Лапласа, оригинал, изображение, формула Эйлера.*
***Раздел:*** *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Методы операционного исчисления представляют собой своеобразный способ решения различных математических задач, в первую очередь связанных с решением дифференциальных уравнений. В данной статье мы рассмотрим, какой именно теоретический аппарат, какие методы необходимо применить для решения дифференциальных уравнений и каким образом связаны между собой такие понятия, как оригиналы и изображения. Дадим основные определения и теоремы [1, 2], необходимые для изложения материала.

**Определение 1.** Преобразованием Лапласа функции действительной переменной $f(t)$ называется функция комплексной переменной $F(p)$, определяемая формулой

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt .$$

Интеграл в правой части равенства называется интегралом Лапласа, *t* – действительной переменной, *p* – комплексной переменной.

Для того чтобы интеграл Лапласа был сходящимся, функция $f(t)$ должна удовлетворять нескольким условиям.

**Определение 2.** Оригиналом (или прообразом) называется комплекснозначная функция действительного аргумента $f(t)$, удовлетворяющая условиям: 1) $f(t)\equiv 0$

ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

*Пелевина И. Н., Ласковая Т. А., Ахметова Ф. Х. Методические аспекты изложения темы «Преобразование Лапласа. Нахождение изображения по оригиналу» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2019. – № V1. – 0,2 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2019/196001.htm.*

при $t<0$; 2) $f(t)$ – кусочно-непрерывная функция; 3) при возрастании аргумента $|f(t)|$ может возрастать, но не быстрее некоторой показательной функции, т. е. $|f(t)| \le Me^{s_0 t}$, где $M, s_0$ – постоянные и $M>0, s_0 \ge 0$.

Условию 3 в определении 2 удовлетворяют все ограниченные ($\sin \omega t; \cos \omega t$) и все степенные $t^k\,(k>0)$ функции, которые встречаются при изучении физических процессов.

**Замечание.** В дальнейшем при рассмотрении функций-оригиналов будем подразумевать, что $f(t) \equiv 0$ при $t<0$.

**Определение 3.** Изображением (или образом) называется функция $F(p)$, определяемая преобразованием Лапласа.

Соответствие между оригиналом и изображением записывается в виде $f(t)$ ¤ $F(p)$ или $F(p)$ ¤ $f(t)$.

Получение изображения уместно сравнить с процессом фотографирования. Подобно тому как фотокамера позволяет получить из оригинала изображение, так и преобразование Лапласа переводит функцию-оригинал $f(t)$ в функцию-изображение $F(p)$.

Рассмотрим теоремы, по которым мы будем находить изображения по оригиналам, и наоборот.

**Теорема 1 (о свойстве изображения).** Для любого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Подчеркнем, что функция $F(p)$ аналитическая. Это значит, что ее можно дифференцировать и применять к ней известные методы теории комплексного переменного в области $\operatorname{Re} p > s_0$.

Рассмотрим примеры нахождения изображений функций по их оригиналам с помощью определения 3.

**Пример 1.** Найти $F(p)$ для функции $f(t)=t$.

Решение. Очевидно, что данная функция удовлетворяет условиям определения 2, поскольку $|t| \le Me^{s_0 t}$ для $\forall s_0>0$ и $M \ge 1$. Следовательно, она может являться оригиналом. Вычислим изображение:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt=\begin{vmatrix} u=t \\ dv=e^{-pt}dt \end{vmatrix}=-\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt=-\frac{t}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p^2}.$$

Ответ: $t$ ¤ $\frac{1}{p^2}$.

**Пример 2.** Найти $F(p)$ для функции $f(t)=a^t$.

Решение. Запишем нашу функцию в виде $f(t)=e^{t\ln a}$, используя основное логарифмическое тождество. Поскольку $|a^t|=|e^{t\ln a}| \le Me^{t\ln a}$ для $\forall M \ge 1$ и $s_0=\ln a$, следовательно, все условия определения 2 выполнены и она может являться оригиналом. Функция-изображение $F(p)$ будет определена и аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \ln a$. Найдем ее.

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

*Пелевина И. Н., Ласковая Т. А., Ахметова Ф. Х. Методические аспекты изложения темы «Преобразование Лапласа. Нахождение изображения по оригиналу» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2019. – № V1. – 0,2 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2019/196001.htm.*

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{t\ln a}e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty} e^{t(\ln a-p)}dt=\frac{t}{\ln a-p}e^{-t(p-\ln a)}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-\ln a}.$$

Ответ: $a^t \text{ ¤ } \dfrac{1}{p-\ln a}$.

Весь процесс преобразования Лапласа можно представить себе как перевод с одного языка на другой. При таком переводе каждому слову одного языка соответствует определенное слово другого. Точно так же при преобразовании Лапласа каждой функции пространства оригиналов соответствует определенная функция в пространстве изображений. Роль словаря играет таблица соответствий между оригиналами и изображениями.

Задумаемся: как перевести с одного языка на другой целое предложение? Для этого недостаточно знать перевод отдельных слов, нужно еще знать, как грамматические конструкции одного языка передаются на другом. В нашем случае необходимо знать, что происходит с изображениями, если над функцией в пространстве оригиналов производится какая-либо математическая операция: сложение, умножение, интегрирование, дифференцирование. Таким образом, необходимо знать не только изображения отдельных функций, но и правила получения изображений в этих случаях. Ответы на эти вопросы дают основные теоремы операционного исчисления.

**Теорема 2 (свойство линейности).** Если $f(t) \text{ ¤ } F(p)$ и $g(t) \text{ ¤ } G(p)$, то при любых постоянных *A* и *B* (действительных или комплексных) справедливо соотношение $Af(t)+Bg(t) \text{ ¤ } AF(p)+BG(p)$.

Иными словами, линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений.

**Пример 3.** Найти изображение функции $f(t)=\cos\omega t$ и $f(t)=\sin\omega t$.

Решение. По формуле Эйлера имеем: $\cos\omega t=\dfrac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$. Применим к функциям $e^{i\omega t}$ и $e^{-i\omega t}$ преобразование Лапласа, найденное в примере 2:

$$e^{i\omega t} \text{ ¤ } \frac{1}{p-i\omega};\; e^{-i\omega t} \text{ ¤ } \frac{1}{p+i\omega}.$$

Тогда по теореме 2 имеем: $\cos\omega t=\dfrac{1}{2}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}) \text{ ¤ } \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-i\omega}+\dfrac{1}{p+i\omega}\right)=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$.

Аналогичным образом получим изображение для функции $f(t)=\sin\omega t$ . По формуле Эйлера

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}=\frac{1}{2i}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}) \text{ ¤ } \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{2i\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Ответ: $\cos\omega t \text{ ¤ } \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, $\sin\omega t \text{ ¤ } \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Этим же способом можно найти изображения для функций

$$\operatorname{ch}\omega t \text{ ¤ } \frac{p}{p^2-\omega^2} \text{ и } \operatorname{sh}\omega t \text{ ¤ } \frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

**Теорема 3 (теорема подобия).** Если $f(t) \text{ ¤ } F(p)$ и $a>0$, то $f(at) \text{ ¤ } \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$.

Из этой теоремы следует, что умножение аргумента оригинала на положительное число *a* приводит к делению аргумента изображения и самого изображения на то же число *a*.

Например, зная, что $e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$, имеем $e^{at} \risingdotseq \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{p}{a}-1} = \frac{1}{p-a}$.

**Теорема 4 (о дифференцировании оригинала).** Если функции $f(t), f'(t), f''(t), \dots f^{(n)}(t)$ являются оригиналами и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0);$$

$$f''(t) = (f'(t))' \risingdotseq p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0);$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Таким образом, дифференцирование, которое в пространстве оригиналов представляет собой трансцендентный процесс, в пространстве изображений заменяется умножением изображения на степень аргумента *p* с одновременным добавлением многочлена, коэффициентами которого являются начальные значения оригинала.

Во многих задачах точка $t = 0$ является точкой разрыва оригинала, поэтому принято считать, что $f(0) = \lim\limits_{t\to+0} f(t)$ (т. е. $f(0)$ – правый предел функции-оригинала), $f'(0) = \lim\limits_{t\to+0} f'(t)$ и т. д.

**Пример 4.** Найти изображение функции $f(t) = \cos^2 t,\ f(0) = 1.$

Решение. Найдем производную $f'(t) = 2\cos t(-\sin t) = -\sin 2t$. Ранее в примере 3 было доказано, что $\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+2^2}$. Следовательно $f'(t) \risingdotseq -\frac{2}{p^2+4}$. С другой стороны, согласно теореме 4, имеем $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0) = pF(p) - 1$. Таким образом, для одной и той же функции мы получили два изображения, записанные по-разному. Приравняем их и из полученного алгебраического уравнения найдем $F(p)$.

$$-\frac{2}{p^2+4} = pF(p) - 1 \ \Rightarrow\ F(p) = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$$

Ответ: $\cos^2 t \risingdotseq \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$.

Аналогично можно получить $\sin^2 t \risingdotseq \frac{2}{p(p^2+4)}$.

**Теорема 5 (о дифференцировании изображения).** Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $-tf(t) \risingdotseq F'(p)$.

Мы видим, что дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на –*t*.

Последовательное применение этой теоремы дает следующие формулы:

$$t^2 f(t) \risingdotseq F''(p);\ -t^3 f(t) \risingdotseq F'''(p);\ \dots\ (-1)^n t^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p).$$

**Пример 5.** С помощью теоремы о дифференцировании изображения найти изображение функции $f(t)=t^n$, зная, что $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$.

Решение: $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$; $t \risingdotseq \frac{1}{p^2}$; $t^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}$;… ; $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$.

**Пример 6.** Найти изображение функции $f(t)=t(e^t+cht)$.

Решение. Используя результаты примеров 2 и 3, получим $e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$; $cht \risingdotseq \frac{p}{p^2-1}$.

Тогда $e^t+cht \risingdotseq \frac{1}{p-1}+\frac{p}{p^2-1}$. По теореме 5 имеем:

$$t(e^t+cht) \risingdotseq -\left(\frac{1}{p-1}+\frac{p}{p^2-1}\right)' = -\left(-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{p^2-1-2p^2}{(p^2-1)^2}\right) = -\frac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}.$$

Ответ: $t(e^t+cht) \risingdotseq -\frac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$.

**Теорема 6 (об интегрировании оригинала).** Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

Интегрирование оригинала в пределах от *0* до *t* приводит к делению изображения на *p*.

**Пример 7.** Найти изображение функции $\int_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau d\tau$.

Решение. Запишем изображение для функции

$$(\tau+1)\cos\omega\tau = \tau\cos\omega\tau+\cos\omega\tau \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}+\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Применим теорему 6 к полученному изображению:

$$\int_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\left[\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}+\frac{p}{p^2+\omega^2}\right] = \frac{p^2(1+p)+\omega^2(p-1)}{p(p^2+\omega^2)^2}.$$

Ответ: $\int_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau d\tau \risingdotseq \frac{p^2(1+p)+\omega^2(p-1)}{p(p^2+\omega^2)^2}$.

**Теорема 7 (об интегрировании изображения).** Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$. Если $\int_p^{+\infty} F(p)dp$ сходится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$, т. е. $\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty} F(p)dp$.

Необходимо сделать важное замечание к этой теореме: ее можно применять только в том случае, когда $\int_p^{+\infty} F(p)dp$ сходится. Именно поэтому теорему 7 нельзя применять для нахождения изображения $\frac{e^{at}}{t}$, так как $\int_p^{+\infty} \frac{dp}{p-a}$ расходится.

**Пример 8.** Найти изображение функции $\dfrac{e^t-1}{t}$.

Решение. В предыдущих примерах было найдено $e^t-1 ¤ \dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p}$. По теореме 7 имеем: $\dfrac{e^t-1}{t} ¤ \displaystyle\int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)dp=\ln\left|\frac{p-1}{p}\right|\Bigg|_p^{+\infty}=\lim_{p\to+\infty}\ln\left|\frac{p-1}{p}\right|-\ln\left|\frac{p-1}{p}\right|=-\ln\left|\frac{p-1}{p}\right|$.

Ответ: $\dfrac{e^t-1}{t} ¤ -\ln\left|\dfrac{p-1}{p}\right|$.

В заключение хотелось бы отметить оригинальность методического подхода изложения темы «Преобразование Лапласа. Нахождение изображения по оригиналу»: изложив базовые теоремы, описывающие свойства изображений, свойства линейности, подобия, дифференцирования, интегрирования оригинала и изображения, мы тем самым проиллюстрировали тесную взаимосвязь между этими двумя понятиями. Эта связь прослеживается и в формулах нахождения оригинала и изображения, и в разобранных выше примерах, наглядно демонстрирующих работу основных положений теорем. Содержание статьи послужит материалом для подготовки к занятиям второго курса при изучении раздела «Операционное исчисление».

## Ссылки на источники

1. Шостак Р. Я. Операционное исчисление. – М.: Высш. шк., 1972.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. – М.: Высш. шк., 1975.

***Irina Pelevina,***
*Senior Lecturer, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow*
pdv62@mail.ru
***Tatiana Laskovaya,***
*Senior Lecturer, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow*
talaskovy@mail.ru
***Faniya Akhmetova,***
*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow*
dobrich2@mail.ru

**Methodological aspects of the presentation of the subject “Laplace transform. Finding the image by the original”**

**Abstract.** This article proposes a version of presenting material on the subject “Laplace transform. Finding the image by the original” in a concise form. The main theorems are examined with the help of which images are found by originals and vice versa. Examples are chosen in such a way as to clearly illustrate each theorem and the basic concepts of the subject. The content of the article will serve as a material for the second year students’ classes preparation when they study the section “Operational Calculus” and will be useful to both teachers and students.

**Key words:** Laplace transform, original, image, Euler formula.

**References**

1. Shostak, R. Ya. (1972). *Operacionnoe ischislenie*, Vyssh. shk., Moscow (in Russian).
2. Ditkin, V. A. & Prudnikov, A. P. (1975). *Operacionnoe ischislenie*, Vyssh. shk., Moscow (in Russian).

***Рекомендовано к публикации:***
*Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Поступила в редакцию *Received* | 29.09.18 | Получена положительная рецензия *Received a positive review* | 20.10.18 |
| Принята к публикации *Accepted for publication* | 20.10.18 | Опубликована *Published* | 18.01.19 |

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru