

Косова Анна Владимировна,
старший преподаватель кафедры математического моделирования
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
Anna.v.kosova@mail.ru



Ласковая Татьяна Алексеевна,
старший преподаватель кафедры математического моделирования ФГБОУ ВО
«Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»,
г. Москва
talaskovy@mail.ru

Методические аспекты изложения теории в курсе высшей математики

Аннотация. В статье рассмотрена основная схема доказательства теорем: от определения к финальному утверждению. В работе предложен шаблон расшифровки определения предела функции по Коши. Отдельное внимание уделено взаимосвязи между теорией и практикой, рассмотренной на конкретных задачах и теоретических выводах формул. Методический подход к изложению теории иллюстрирован темами курса «Математический анализ».

Ключевые слова: предел функции, бесконечно малая, определенный интеграл, объем тела вращения, линейное дифференциальное уравнение, общее решение дифференциального уравнения.

Раздел: (01) отдельные вопросы сферы образования.

В процессе подготовки к экзамену основной трудностью для студентов является освоение большого объема теоретического материала – необходимо учить множество определений, формулировок и доказательств теорем. Действительно, механическое заучивание большого количества математических утверждений затруднительно. Задача преподавателя заключается в том, чтобы объяснить студентам, что зачастую нет необходимости все заучивать дословно. Главное при подготовке к экзамену – учить схемы доказательств и основные идеи, на которых они основаны. Рассмотрим некоторые конкретные примеры.

Очень многие теоремы по теории пределов, дифференциальному исчислению доказываются начиная с формулировки соответствующего базового определения.

Обратимся к теории пределов. Базовое определение – определение предела по Коши и его расшифровка на языке « ε, δ ».

Определение 1. Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ [1]. Здесь $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ – проколота δ -окрестность точки a . Это обозначение. Для доказательства теоремы необходимо понимание. Поэтому необходимо знать, что эту окрестность можно описать объединением интервалов $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ или двойным неравенством $0 < |x - a| < \delta$. Для разных теорем или задач может понадобиться или один, или другой вариант представления.

Для расшифровки определения можно предложить следующий шаблон:

$$v = \lim_{*} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall ** \Rightarrow v \vee.$$

*	**		\vee	$\vee \vee$
$x \rightarrow a$	$x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ (или $0 < x - a < \delta$)		b	$ f(x) - b < \varepsilon$
$x \rightarrow a^{+}$	$x \in (a, a + \delta)$ (или $a < x < a + \delta$)		0	$ f(x) < \varepsilon$
$x \rightarrow a^{-}$	$x \in (a - \delta, a)$ (или $a - \delta < x < a$)		∞	$ f(x) > \varepsilon$
$x \rightarrow \infty$	$x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$ (или $ x > \varepsilon$)		$-\infty$	$f(x) < -\varepsilon$
$x \rightarrow -\infty$	$x \in (-\infty, -\varepsilon)$ (или $x < -\varepsilon$)		$+\infty$	$f(x) > \varepsilon$
$x \rightarrow +\infty$	$x \in (\varepsilon, +\infty)$ (или $x > \varepsilon$)			

Остается только выбрать нужные строки из таблицы и подставить в шаблон. Как правило, расшифровку определения приходится подкреплять геометрической иллюстрацией. Можно делать в обратном порядке: сначала иллюстрация, а потом определение. Здесь важно обратить внимание студентов, что v – значения y . Если v – конечное число, то ε мало, если v бесконечно, то ε велико.

Приведем конкретный пример.

Пример 1. $3 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ [2].

В качестве иллюстрации возьмем функцию $y = x + 1$, график которой проходит через точку $(2, 3)$. Отметим на ней указанную точку (рис. 1). На оси OY вверх и вниз от точки $y = 3$ отложим отрезки длиной ε . Через точки $3 - \varepsilon$ и $3 + \varepsilon$ проведем горизонтальные прямые до пересечения с прямой $y = x + 1$. Из точек пересечения опустим перпендикуляры на ось OX . Поскольку для примера мы взяли прямую $y = x + 1$,

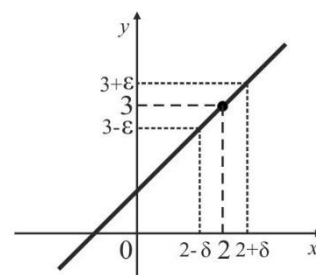


рис. 1

то в данном случае эти точки действительно симметричны относительно $x = a$. Поэтому они имеют координаты $a - \delta$ и $a + \delta$. Если бы мы выбрали произвольную кривую, проходящую через точку $(2, 3)$, то точки на оси OX могли оказаться и не симметричны относительно $x = a$. В этом случае в качестве δ надо брать длину меньшего из полученных отрезков. Дальше из геометрического смысла предела получаем: для любых значений $x \in (2 - \delta, 2) \cup (2, 2 + \delta)$, соответствующие значения $y \in (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$, что равносильно неравенству $|y - 3| < \varepsilon$. Расшифровка определения предела по Коши для данного случая имеет вид:

$$3 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in (2 - \delta, 2) \cup (2, 2 + \delta) \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

Рассмотрим случай, когда функция имеет бесконечный предел.

Пример 2. $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = +\infty$ [3].

Здесь при $x \rightarrow 1$ значения функции $y \rightarrow +\infty$, т. е. график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 1$. Эта асимптота левосторонняя, поскольку $x \rightarrow 1 - (x \rightarrow 1, x < 1)$. Выберем в качестве примера гиперболу $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ (рис. 2). Нам нужна только ее левая ветвь. Вверх по оси OY отложим отрезок ε . Это большой отрезок, поскольку предел бесконечен. Проведем горизонтальную прямую через эту точку на оси до пересечения

с гиперболой. Опустим перпендикуляр на ось OX . Получим точку $1-\delta$. Остается, глядя на чертеж, записать расшифровку определения:

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (1-\delta, 1) \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь особенности, на которые нужно обращать внимание студентов при доказательстве теорем. В качестве примера выберем теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой (критерий того, что число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$). Здесь необходимо обратить внимание студентов, что под термином «критерий» понимается необходимое и достаточное условие, т. е. теорема, которая справедлива в обе стороны. Поэтому в формулировке должны быть использованы речевые обороты «необходимо и достаточно» или «тогда и только тогда».

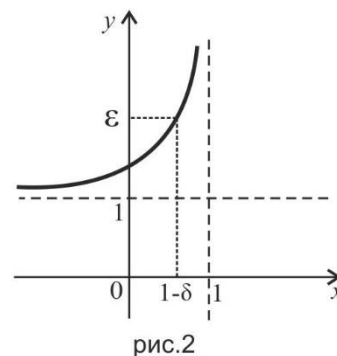


рис.2

Теорема. Число b – предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$ тогда и только тогда, когда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$ [4]. Или: для того чтобы число b являлось пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Предложите студентам жесткую схему: дано, доказать, доказательство. Это дисциплинирует, систематизирует и упорядочивает выкладки. Традиционно сначала доказывается *необходимое условие*. Очень важно: формулируя его, мы считаем, что событие произошло. Поэтому

дано: b – предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, т. е. $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$;

доказать: $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Доказательство. В формулировке теоремы встречаются два важных понятия: предел функции и бесконечно малая. Поэтому начнем с расшифровки этих определений:

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_1) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_2) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Обозначим $f(x) - b = \alpha(x)$. Тогда получаем, что

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \Rightarrow |f(x) - b| = |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Теперь докажем *достаточное условие*.

Дано: $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Доказать: $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Доказательство: $f(x) = b + \alpha(x) \Rightarrow f(x) - b = \alpha(x)$. Тогда, по определению бесконечно малой, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| = |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Это и означает, что число b – предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$.

Теорема доказана.

Очень важно научить студентов видеть связь между теоретическим материалом и умением решать задачи по теме. В основном это касается не доказательства теорем, а вывода формул.

Рассмотрим задачу из темы «Приложения определенного интеграла».

Пример 3. Найти работу, которую необходимо затратить для того, чтобы остановить железный шар радиуса R , вращающийся вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω (рис. 3) [5].

Из курса физики известно, что искомая работа будет равна кинетической энергии шара. Разобьем шар на части, для точек которых кинетическая энергия может считаться равной. Эти части – полые тонкостенные цилиндры, направляющие которых параллельны оси вращения шара. Толщина стенки таких цилиндров равна $\Delta x \rightarrow 0$.

Для выделенной области кинетическая энергия находится по формуле: $\Delta E_k = \frac{\Delta m \cdot v^2}{2} = \frac{\rho}{2} \Delta V \omega^2 r^2$, где ρ – плотность железа.

Для выбранного цилиндра $r = x$, а его объем при $\Delta x \rightarrow 0$ можно считать равным объему параллелепипеда со сторонами Δx , h , l . Высота этого цилиндра, как видно из чертежа, равна $2y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, а l – длина окружности основания цилиндра $l = 2\pi x$.

Окончательно получаем: $\Delta E_k = 2\rho\omega^2 x^3 \sqrt{R^2 - x^2} \Delta x$.

Тогда: $A = \sum \Delta E_k = \int_0^R 2\rho\omega^2 x^3 \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \omega^2 \frac{R^2}{5} = M \frac{R^2 \omega^2}{5}$, где M – масса шара.

Перенесем теперь рассуждения, использованные при решении задачи, на теоретический материал и выведем формулу нахождения объема тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a, b]$ оси OX , прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $f(x) \geq 0$ вокруг оси OY . Для этого применим тот же прием, что и при решении задачи: разбиение области на части [6] (рис. 4).

Разделим отрезок $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$.

На каждом частичном отрезке выберем точку ξ_i , вычислим значение функции $f(\xi_i)$. Объем тела, полученного вращением частичной трапеции вокруг оси OY , приближенно равен (если длина частичных отрезков бесконечно малая) объему тонкостенного полого цилиндра с высотой $f(\xi_i)$. Этот объем, в свою очередь, мало отличается от объема параллелепипеда со сторонами $f(\xi_i)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $l = 2\pi x_i$ (аналогичное допущение применили и в примере 3).

Суммируя все частичные объемы, найдем объем искомого тела: $V_{OY} = 2\pi \int_a^b x y dx$.

Обратимся теперь к другой теме: «Дифференциальные уравнения».

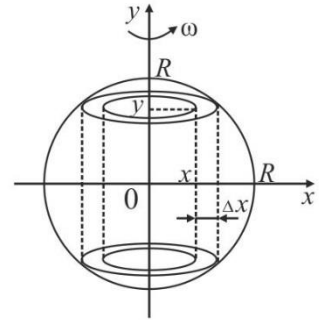


рис.3

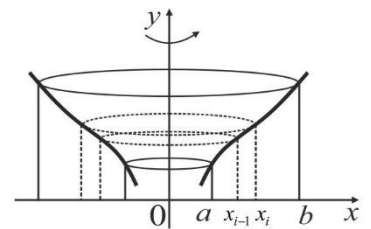


рис.4

Пример 4. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, зная, что $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ является решением этого уравнения [7].

Будем искать второе решение уравнения в виде: $y_2 = z(x)y_1$. Подставим его в уравнение: $y_2' = z'y_1 + zy_1'$, $y_2'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''$. Подстановку делаем в общем виде (не подставляя известное y_1): $z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'' + \frac{2}{x}(z'y_1 + zy_1') + zy_1 = 0$.

Собираем слагаемые по порядку производной $z(x)$. Тогда получаем уравнение: $z''y_1 + z'(2y_1' + \frac{2}{x}y_1) + z(y_1'' + \frac{2}{x}y_1' + y_1) = 0$, в котором последнее слагаемое равно нулю, поскольку в скобке при z видим не что иное, как результат подстановки решения y_1 в исходное уравнение. Этот момент, скорее всего, студенты пропустят, если подстановку делать не в общем виде. Окончательно уравнение примет вид: $z''y_1 + z'(2y_1' + \frac{2}{x}y_1) = 0$.

Полученное уравнение допускает понижение порядка, поскольку в явном виде не содержит z . Вводим новую функцию: $t = z' \Rightarrow t' = z''$. Подставим ее в уравнение вместе с заданным y_1 : $\frac{\sin x}{x}t' + 2t(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x}{x^2}) = 0$. Решим полученное уравнение: $\sin xt' + 2 \cos xt = 0 \Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{-2 \cos x dx}{\sin x} \Rightarrow t = \frac{c_1}{\sin^2 x}$. Из всего множества нам нужно только одно решение, поэтому примем $c_1 = -1$. В итоге имеем: $z' = -\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow z = ctgx + c_2$. Пусть

$c_2 = 0$. Тогда $z = ctgx$ и $y_2 = ctgx \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{x}$. Общее решение этого уравнения: $y_{oo} = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$.

Покажем теперь, как можно использовать эти рассуждения при ответе на теоретический вопрос: как найти второе решение линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ по известному первому [8].

Снова будем искать второе решение в виде: $y_2 = z(x)y_1$. Тогда $y_2' = z'y_1 + zy_1'$, $y_2'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''$. Подставляем в уравнение: $z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'' + p_1(x)(z'y_1 + zy_1') + p_2(x)zy_1 = 0$. Перепишем уравнение по порядку производной z : $z''y_1 + z'(2y_1' + p_1(x)y_1) + z(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1) = 0$. Снова последняя скобка равна нулю, поскольку y_1 – решение однородного дифференциального уравнения. Окончательно получаем: $z''y_1 + z'(2y_1' + p_1(x)y_1) = 0$. Понижим порядок уравнения, вводя новую функцию: $t'y_1 + t(2y_1' + p_1(x)y_1) = 0$. Разделим переменные: $\frac{dt}{t} = \frac{-(2y_1' + p_1(x)y_1)dx}{y_1}$. Проинтегрируем и получим: $\ln|t| = -2\ln|y_1| - \int p_1(x)dx + C_1$. Выбираем $C_1 = 0$. Отсюда:

$z' = t = \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} \Rightarrow z = \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx + C$. Пусть $C = 0$. В итоге получаем формулу нахождения второго решения линейного однородного дифференциального уравнения по известному первому: $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx$.

Фактически, выводя эту формулу, мы проделали те же действия, что и при решении задачи, только в общем виде.

Изложенный подход к изучению материала поможет студентам при подготовке к экзаменам, установит взаимосвязь между теорией и практикой. Предложенный шаблон расшифровки поможет глубокому пониманию и закреплению определения предела функции по Коши.

Ссылки на источники

1. Морозова В. Д. Введение в анализ: учеб. для студ. вузов / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996. – 332 с. (Сер. Математика в техническом университете; вып. I).
2. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2003. – 558 с.
3. Там же.
4. Морозова В. Д. Указ. соч.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / под ред. Б. П. Демидовича. – М.: Астрель, 2003. – 472 с.
6. Зарубин В. С., Иванова Е. Е., Кувыркин Г. Н. Интегральное исчисление функций одного переменного: учеб. для студентов вузов / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 528 с. (Сер. Математика в техническом университете; вып. VI).
7. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / под ред. Б. П. Демидовича.
8. Агафонов С. А., Герман А. Д., Муратова Т. В. Дифференциальные уравнения: учеб. для вузов / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 352 с. (Сер. Математика в техническом университете; вып. VIII).

Anna Kosova,

Senior Lecturer, Mathematical Modelling Chair, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
Anna.v.kosova@mail.ru

Tatyana Laskovaya,

Senior Lecturer, Mathematical Modelling Chair, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
talaskovy@mail.ru

Methodological aspects of presenting the theory in the higher mathematics course

Abstract. In this article, a basic scheme of proving theorems from definition to final assertion is considered. A template for decoding the definition of the limit of a Cauchy function is proposed. A special attention is paid to the link between theory and practice considered on specific tasks and theoretical conclusions of formulas. The methodological approach to the presentation of the theory is illustrated by the topics of the course "Mathematical Analysis".

Key words: function limit, infinitesimal, definite integral, volume of rotation body, linear differential equation, general solution of differential equation.

References

1. Morozova. V. D. (1996). *Vvedenie v analiz: ucheb. dlya stud. vuzov*, Izd-vo MGTU im. N. E. H. Bauman, Moscow, 332 p. (Ser. Matematika v tekhnicheskom universitete; vyp. I) (in Russian).
2. Demidovich, B. P. (2003). *Sbornik zadach i uprazhnenij po matematicheskomu analizu: ucheb. posobie dlya vuzov*, ООО "Izdatel'stvo Astrel": ООО "Izdatel'stvo AST", Moscow, 558 p. (in Russian).
3. Ibid.
4. Morozova. V. D. (1996). Op. cit.
5. Demidovich, B. P. (eds.) (2003). *Zadachi i uprazhneniya po matematicheskomu analizu dlya vtuzov*, Astrel', Moscow, 472 p. (in Russian).

6. Zarubin, V. S., Ivanova, E. E. & Kuvyrkin, G. N. (1999). *Integral'noe ischislenie funkcij odnogo peremennogo: ucheb. dlya studentov vuzov*, Izd-vo MGTU im. N. E.H. Bauman, Moscow, 528 p. (Ser. Matematika v tekhnicheskoy universitete; vyp. VI) (in Russian).
7. Demidovich, B. P. (eds.) (2003). Op. cit.
8. Agafonov, S. A., German, A. D., Muratova, T. V. (2004). *Differencial'nye uravneniya: ucheb. dlya vuzov*, Izd-vo MGTU im. N. E.H. Bauman, Moscow, 352 p. (Ser. Matematika v tekhnicheskoy universitete; vyp. VIII) (in Russian).

Рекомендовано к публикации:

Утёмовым В. В., кандидатом педагогических наук;
 Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
 главным редактором журнала «Концепт»



www.e-koncept.ru

Поступила в редакцию <i>Received</i>	01.10.18	Получена положительная рецензия <i>Received a positive review</i>	10.11.18
Принята к публикации <i>Accepted for publication</i>	10.11.18	Опубликована <i>Published</i>	28.02.19

Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2019

© Косова А. В., Ласковая Т. А., 2019