

Елаховский Дмитрий Вячеславович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет»,
г. Петрозаводск
Elahovsky@mail.ru



Знакомство студентов строительной специальности с методом подобия при рассмотрении тепловых процессов

Аннотация. В статье предложена корректировка методического обеспечения физического образования студентов строительной специальности за счет включения в лекционный фрагмент курса физики основ теории теплового подобия и способов его применения при анализе конвективного теплообмена, играющего важную роль в различных теплофизических явлениях. В статье рассмотрены основные положения метода подобия физических величин, обосновано его использование, а также предложена конкретная реализация данной методики.

Ключевые слова: геометрическое подобие, постоянная подобия, числа подобия, критериальное уравнение, условия однозначности, число Нуссельда.

Раздел: (01) отдельные вопросы сферы образования.

Учитывая важную роль конвективного теплообмена при теплообеспечении жилых и производственных зданий, а также его вклад в формирование микроклимата помещений, определенный интерес представляет знакомство студентов строительной специальности с данной проблематикой с учетом их предстоящей профессиональной деятельности. Наибольший интерес представляют методы измерения важнейшей характеристики конвективного теплообмена под названием коэффициент теплоотдачи, особенно если принять во внимание достаточно сложную зависимость его от различных параметров. В связи с этим наиболее благоприятной методикой измерения указанного параметра является сочетание экспериментальных результатов с последующей обработкой с использованием метода теплового подобия, позволяющее результаты модельного эксперимента экстраполировать на другие родственные тепловые процессы. К сожалению, программа физического образования для данной категории студентов ограничивается только упоминанием о конвективном теплообмене и абсолютно игнорирует важную роль метода подобия физических величин при описании различных процессов. Аналогичная ситуация с рекомендованной литературой. Данная проблема может быть устранена с помощью некоторой корректировки методического обеспечения курса физики за счет знакомства студентов строительной специальности с основами метода подобия и его применением при рассмотрении тепловых процессов. Это может быть достигнуто за счет включения в лекционный фрагмент учебного плана конспективного изложения теоретических основ метода теплового подобия с последующим рассмотрением конкретных примеров в режиме практических занятий. Однако наибольший эффект может быть достигнут при рассмотрении данной проблематики в режиме курса по выбору, а также при использовании семинарских занятий с проработкой указанной тематики в виде самостоятельной работы на базе предварительно разработанных учебно-методических пособий. Перспективной также представляется разработка дистанционных курсов.

Основы теории подобия

В самом общем понимании указанная тематика связана с рассмотрением подобных явлений. Еще со школьной скамьи используется математическая формулировка геометрического подобия, согласно которой в подобных треугольниках соответственные углы одинаковы, а сходственные стороны и другие элементы треугольника пропорциональны. Математически это выглядит так:

$$l_i^a / l_i^b = c_l, \quad (1)$$

где l_i^a, l_i^b – линейные размеры одной и другой фигуры, c_l – постоянная геометрического подобия. Следует отметить, что геометрическое подобие предполагает использование безразмерного параметра (1) и используется при решении некоторых практических задач, например при определении высоты дерева или ширины реки.

Для любых физических явлений «подобность» также имеет место, и это понятие сводится к следующим положениям:

- данное понятие имеет место только для таких физических явлений, которые качественно сходны, а используемый при описании математический аппарат одинаков;
- присутствует геометрическое подобие, что предполагает рассмотрение только геометрически подобных систем, при этом сходственными точками геометрически подобных систем называются координаты, удовлетворяющие условию:

$$x^a = c_l x^b, y^a = c_l y^b, z^a = c_l z^b; \quad (2)$$

- сопоставляемые в рамках подобных явлений величины должны иметь одинаковую физическую природу и размерность (такие величины называются однородными), причем это сопоставление осуществляется в сходственных точках пространства (соответствующих геометрическому подобию) и в сходственные моменты времени, имеющих общее начало отсчета и связанных пропорциональной зависимостью;
- и в качестве обобщения следует отметить, что подобие двух физических явлений предполагает подобие всех величин, связанных с реализацией рассматриваемых явлений. Математически это означает, что в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени все величины φ^* , связанные с первым явлением, пропорциональны однородным величинам φ^{**} второго явления:

$$\varphi^{**} = c_\varphi \varphi^*. \quad (3)$$

Коэффициент пропорциональности c_φ называется константой подобия, не зависящей от координат и времени, при этом ее значение для разных физических величин различно (индекс φ и обозначает принадлежность к конкретной физической величине). Константы подобия должны быть одинаковыми не только для отношения самих величин, но и для отношения их дифференциалов, сумм и разностей. В случае конвективного теплообмена характеристики теплообменной среды (например, скорость движения и температура) и ее теплофизические параметры (коэффициенты теплопроводности, теплоемкости, вязкости и т. д.) в конкретных точках потока, как правило, различны. В этом случае подобие тепловых процессов предполагает подобие всех величин, влияющих на их реализацию. Их полный перечень выявляется при математическом описании конвективного теплообмена. И как следствие, для всех указанных величин существуют свои постоянные подобия. Эти постоянные подобия не выбираются произвольно, так как между ними имеют место строго определенные соотношения, которые следуют из анализа математического описания явлений. Эти соотношения играют важную роль в теории подобия, так как именно они устанавливают существование особых величин, получивших назва-

ние чисел подобия. Их особое свойство – сохранение числового значения для всех подобных между собой явлений. Указанные величины являются безразмерными комплексами и представлены величинами, характеризующими данное явление.

Практическое применение теории подобия основано на трех теоремах [1].

1. Подобные между собой процессы имеют одинаковые числа подобия, т. е. для подобных явлений безразмерные комплексы (числа подобия), составленные определенным образом из величин, входящих в уравнение процесса, имеют одно и то же значение. Эти числа подобия формально можно представлять как новые переменные, что сокращает их представительство в уравнениях физических процессов.

2. Зависимость между характеристиками конкретного процесса может быть представлена в виде функциональной зависимости между числами подобия (обозначим их буквами $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$):

$$f(K_1, K_2, \dots, K_n) = 0. \quad (4)$$

Имеющая место функциональная зависимость между числами подобия называется *критериальным уравнением подобия*. Как уже отмечалось, для подобных процессов числа подобия есть величины постоянные и поэтому уравнения подобия для этих процессов одинаковы. Это позволяет с помощью имеющихся результатов конкретного эксперимента, представленных с помощью чисел подобия, получить обобщенную функциональную зависимость, справедливую для всех подобных процессов.

3. Подобны те процессы, условия однозначности которых подобны, и числа подобия, составленные из величин, входящих в условия однозначности, должны иметь одинаковое численное значение. Данная теорема определяет необходимые и достаточные условия, обеспечивающие подобие рассматриваемых процессов.

Эти условия состоят из [2]:

- геометрических условий, определяющих форму и размеры системы в условиях рассматриваемого процесса;
- физических условий, характеризующих физические свойства теплоносителя и тела;
- граничных условий, описывающих особенности процесса теплообмена на границе тела;
- временных условий, связанных с характером особенностей протекания конкретного процесса во времени.

Указанные условия однозначности, как правило, задаются в различной форме, например в виде числовых значений или в виде функциональных зависимостей, а также в виде таблиц. Особо выделяются числа подобия, в состав которых входят величины, входящие в условия однозначности. Такие числа подобия называются *определяющими, или критериями подобия*, и их одинаковость является условием подобности рассматриваемых явлений. Если числа подобия содержат другие величины, не имеющие отношения к условию однозначности, то такие числа называются *определяемыми*.

Таким образом положения теории подобия позволяют, не используя процедуру интегрирования дифференциальных уравнений, получить из них числа подобия, а на базе результатов конкретного эксперимента установить вид критериального уравнения, справедливого для всех подобных процессов.

В качестве примера получения критериев подобия рассмотрим процедуру приведения к безразмерному виду дифференциального уравнения теплоотдачи (предполагая, что тепловой поток направлен вдоль оси y и температура теплоносителя больше температуры стенки) [3]:

$$\alpha = - \frac{\lambda}{T_i - T_c} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (5)$$

где T_t и T_c – температуры жидкости и стенки, а их разность обозначим буквой ϑ_0 . Введем новую переменную $\vartheta = T - T_c$. Тогда уравнение (5) примет вид:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_0} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right). \quad (6)$$

В качестве величин приведения будем использовать характерный геометрический размер l_0 и избыточную температуру ϑ_0 , а для процедуры приведения будем использовать безразмерные величины $Y = \frac{y}{l_0}$ и $\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}$. Если использовать их связь с реальными температурами и координатами, то уравнение теплопередачи принимает вид:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_0} \left[\frac{\partial(\vartheta_0 \cdot \theta)}{\partial(l_0 \cdot Y)} \right]_{Y=0} = -\frac{\lambda}{l_0} \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0}$$

и в окончательном выражении:

$$\alpha \cdot \frac{l_0}{\lambda} = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0}. \quad (7)$$

Анализ этого выражения показывает, что, кроме безразмерных характеристик θ и Y , данное уравнение содержит безразмерный комплекс $\frac{\alpha \cdot l_0}{\lambda}$, в который входят физические величины, используемые при описании явления теплоотдачи. Исходя из свойств подобных физических явлений, данный комплекс для всех подобных систем принимает одно и то же значение. Полученный комплекс получил название *число Нуссельда* (Nu). Еще один альтернативный способ получения этого числа подобия заключается в следующем.

Пусть имеются две системы, в которых процессы конвективного теплообмена подобны [4]. Используем для них дифференциальные уравнения теплоотдачи, помеченные соответствующими индексами:

$$\alpha_1 = -\frac{\lambda_1}{\Delta T_1} \frac{\partial T_1}{\partial y_1} \quad \alpha_2 = -\frac{\lambda_2}{\Delta T} \frac{\partial T_2}{\partial y_2}. \quad (8)$$

Следуя теории подобия для одноименных величин для дальнейшего преобразования, используем константы подобия:

$$K_\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad K_t = \frac{T_2}{T_1}, \quad K_l = \frac{l_2}{l_1}.$$

Это позволяет выразить величины, входящие во второе уравнение системы, через константы подобия и одноименные величины первого уравнения:

$$\alpha_1 K_\alpha = -\frac{K_\lambda \lambda_1}{K_t \Delta T_1} \cdot \frac{K_t}{K_l} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial y_1} = \frac{K_\lambda \lambda_1}{K_l \Delta T_1} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial l_1}. \quad (9)$$

Это позволяет получить такое равенство:

$$\alpha_1 \frac{K_\alpha K_l}{K_\lambda} = -\frac{\lambda_1}{\Delta T_1} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial y_1}. \quad (10)$$

Сопоставляя с первым уравнением системы (3.16), получаем:

$$\frac{K_\alpha K_l}{K_\lambda} = 1. \quad (11)$$

Используя константы подобия, можно записать:

$$\frac{\alpha_1 l_1}{\lambda_1} = \frac{\alpha_2 l_2}{\lambda_2}. \quad (12)$$

Иначе говоря, опять получено число Нуссельда. Данный критерий характеризует процесс теплообмена на границе поверхность – теплоноситель и устанавливает количественную связь между интенсивностью теплоотдачи и тепловой проводимостью теплоносителя.

Если рассмотреть другие дифференциальные уравнения, описывающие конвективный теплообмен (например, уравнение Навье – Стокса [5]), можно получить остальные числа подобия, наиболее значимые в теории конвективного теплообмена.

1. *Число Рейнольдса* – результат соотношения силы инерции и силы вязкости:

$$Re = \frac{cl}{\nu}, \quad (13)$$

где c – скорость теплоносителя, ν – коэффициент кинематической вязкости.

2. *Число Прандтля*

$$Pr = \frac{\nu}{a} - \quad (14)$$

коэффициент, характеризующий физические свойства теплоносителя и определяющий характер подобия температурных и скоростных параметров теплоносителя, a – коэффициент температуропроводности.

3. *Число Грасгофа*

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T l^3}{\nu^2} - \quad (15)$$

результат соотношения подъемной силы благодаря градиенту плотности теплоносителя и силы молекулярного трения. Это число – результат кинематического подобия при свободном движении теплоносителя.

Ряд критериев в качестве параметра содержит геометрический размер. И его выбор определяется влиянием на характер течения жидкости около поверхности теплоотдачи, он также получил название *определяющего*. Например, для труб круглого сечения таким размером является внутренний радиус трубы. Следует также учесть, что входящие в критерии подобия величины, определяющие физические свойства теплоносителя, существенно зависят от его температуры. А так как этот параметр в различных точках не является постоянной величиной, то это обстоятельство требует однозначного выбора температуры (назовем ее *определяющей*) с целью однозначного выбора физических параметров. В практике инженерного проектирования, как правило, в качестве определяющей температуры используется средняя по длине канала температура теплоносителя. Для процессов конвективного теплообмена в общем виде критериальное уравнение представляется в виде:

$$Nu = f(Re, Gr, Pr). \quad (16)$$

Для установления характера функциональной зависимости критерия Нуссельда используются два метода. Метод масштабных преобразований основан на математическом описании процесса конвективного теплообмена системой дифференциальных уравнений с учетом условий однозначности. В том случае, когда для конкретного процесса отсутствует его аналитическое описание, используется *метод размерностей*, реализация которого требует знания физических величин, входящих в систему дифференциальных уравнений. Используя размерности этих величин, можно выявить перечень критериев подобия и вид конкретного критериального уравнения.

Продemonстрируем реализацию метода размерностей на таком примере [6]. Пусть в результате эксперимента установлены параметры, влияющие на коэффициент теплоотдачи для конкретной системы, и в качестве их используются: c – скорость движения теплоносителя, ρ – его плотность, ν – коэффициент кинематической вязкости, λ – коэффициент теплопроводности, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, d – характерный геометрический размер. Предположим, что указанные параметры связаны с искомой величиной коэффициента теплообмена степенной зависимостью:

$$\alpha = K c^a \rho^b \nu^f \lambda^e c_p^r d^g, \quad (17)$$

где K – безразмерный коэффициент пропорциональности. Так как размерности правой и левой частей уравнения одинаковы, то:

$$\text{Дж}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{К}) = [\text{м}/\text{с}]^a \cdot [\text{кг}/\text{м}^3]^b \cdot [\text{м}^2/\text{с}]^f \cdot [\text{Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot ^\circ\text{К})]^e \cdot [\text{Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{К})]^r \cdot \text{м}^2.$$

Уравнения относительно показателей степеней для каждой размерности позволяют получить такую систему:

$$\text{Джоуль: } 1 = e + r.$$

$$\text{Метр: } -2 = a - 3b + 2f - e + g.$$

$$\text{Секунда: } -1 = -a - f - e.$$

$$\text{Кельвин: } -1 = -e - r.$$

$$\text{Килограмм: } 0 = b - r.$$

Выразим все входящие в эту систему величины через a и b .

$$r = b; e = 1 - b; f = 1 - a - 1 + b = d - a; g = 2 - a + 3b - 2b + 2a + 1 - b = a - 1.$$

Подставляя эти значения в уравнение (17), получим:

$$\alpha = K c^a \rho^b \nu^{b-a} \lambda^{1-b} c_p^b d^{a-1}.$$

Сгруппируем величины с одинаковыми показателями степеней, и это позволит идентифицировать критерии подобия и установить вид критериального уравнения, описывающего данный процесс теплоотдачи:

$$\frac{\alpha \cdot d}{\lambda} = K \left[\frac{c \cdot d}{\nu} \right]^a \cdot \left[\frac{\nu}{c_p \rho} \right]^b = K \cdot (\text{Re})^a \cdot (\text{Pr})^b = \text{Nu}. \quad (18)$$

Для практического использования уравнения (18) необходимо знать величины K , a и b . С этой целью в результате серии экспериментов исследуется зависимость коэффициента теплоотдачи от параметров, входящих в критерии подобия. При этом диапазон этих параметров обеспечивает значительное изменение используемых критериев. Обработку результатов экспериментов с помощью графоаналитического метода поясним сначала на простом примере, когда искомая величина коэффициента теплоотдачи зависит только от одного критерия, а именно от числа Рейнольдса, т. е.

$$\text{Nu} = K \cdot \text{Re}^a. \quad (19)$$

Для ряда значений Re вычисляются соответствующие значения Nu . Далее строится график зависимости $\ln \text{Nu}$ от $\ln \text{Re}$, который позволяет экстраполировать зависимость (9) в виде:

$$\ln \text{Nu} = \ln K + a \ln \text{Re}.$$

Если использовать два значения переменных величин, то это уравнение позволяет определить показатель степени числа Re

$$\alpha = \frac{\ln Nu_2 - \ln Nu_1}{\ln Re_2 - \ln Re_1}. \quad (20)$$

Найденное значение α позволяет найти коэффициент K . Для более сложной зависимости например $Nu = f(Re, Pt)$, сначала при фиксированном значении одного из критериев строится график с использованием другого критерия аналогично выше рассмотренному, и определяют для него показатель степени a . Далее имеющийся экспериментальный материал представляется в виде графика

$$\ln \frac{Nu}{Re^a} = \ln K + b \ln Pr, \quad (21)$$

что позволяет определить коэффициент K . Следует отметить, что применимость изложенной методики к задачам конвективного теплообмена ограничена диапазоном изменения критериев, подтвержденных в экспериментах.

Использование критериальных уравнений, в которых осуществлен переход от обычных физических величин к соответствующим им критериям подобия, обеспечивают условия, облегчающие получение информации об конвективном теплообмене. Это связано в первую очередь с тем обстоятельством, что решение конкретной задачи осуществляется при использовании меньшего числа независимых переменных. В то же время это позволяет заменить систему дифференциальных уравнений, связанную с теплообменным процессом, функциональной связью между критериями подобия. Стоит также отметить, что фиксированным значениям критериев подобия соответствует некоторая совокупность процессов теплоотдачи. Поэтому если имеющийся массив экспериментальных результатов обеспечивает выявление функциональной связи между критериями подобия в виде критериального уравнения, то это обеспечивает возможность его применения для других подобных процессов теплоотдачи. Найденное значение критерия Нуссельда позволяет определить значение коэффициента теплообмена.

Ссылки на источники

1. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. – Изд. 2-е, стереотип. – М.: Энергия, 1977. – 344 с.
2. Там же.
3. Манташов А. Т. Теплотехника. Часть I. Термодинамика и теплопередача: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во ПГСХА, 2009. – 184 с.
4. Там же.
5. Там же.
6. Потапов Б. Б. Основы тепломассообмена. Часть 3. Коллективный теплообмен. – Днепропетровск, 2006. URL: <http://bib.convdocs.org/v41558>.

Dmitry Elahovsky,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, General Physics Chair, Petrozavodsk State University, Petrozavodsk

Elahovsky@mail.ru

Introduction of similarity method to construction majors when considering thermal processes

Abstract. A correction of physical education methodological support for the construction majors is proposed. It is made by including the fundamentals of thermal similarity theory and its application in the analysis of convective heat exchange, which plays an important role in various thermophysical phenomena, in the lecture fragment of the physics course. The article describes the main provisions of the physical quantities similarity method, justifies its use, and proposes a specific implementation of this technique.

Key words: geometrical similarity, similarity constant, similarity numbers, criterial equation, single-value conditions, Nusselt number.

References

1. Miheev, M. A. & Miheeva, I. M. (1977). *Osnovy teploperedachi*, Izd. 2-e, stereotip., ENnergiya, Moscow, 344 p. (in Russian).
2. Ibid.
3. Mantashov, A. T. (2009). *Teplotekhnika. Chast' I. Termodinamika i teploperedacha: ucheb. posobie*, Izd-vo PGSKHA, Perm', 184 p. (in Russian).
4. Ibid.
5. Ibid.
6. Potapov, B. B. (2006). *Osnovy teplomassoobmena. Chast' 3. Kollektivnyj teploobmen*, Dnepropetrovsk. Available at: <http://bib.convdocs.org/v41558> (in Russian).

Рекомендовано к публикации:

Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
 главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию <i>Received</i>	24.10.18	Получена положительная рецензия <i>Received a positive review</i>	30.11.18
Принята к публикации <i>Accepted for publication</i>	30.11.18	Опубликована <i>Published</i>	28.02.19



www.e-koncept.ru

Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2019

© Елаховский Д. В., 2019