ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Раздел 13.00.00 Педагогические науки

ART 191009 | 2019, № 2 (февраль) | УДК 37.026:378.147

Реализация принципа преемственности и использование интегративного подхода на примере изучения вопросов ортогональности семейств кривых второго порядка в рамках дисциплины «Дифференциальные уравнения»

Кирин Николай Александрович[1]
Государственный социально-гуманитарный университет, Коломна, Россия
Kirin_N_A@mail.ru

Аннотация. Актуальность данной работы определяется необходимостью реализации принципа преемственности в образовании не только в рамках перехода школа – вуз, но и в рамках изучения отдельных математических дисциплин. Это обеспечивает установление прочных межпредметных связей и является одной из важнейших составляющих в формировании компетенций будущего выпускника вуза, так как это максимально способствует широкому применению полученных знаний в самых разных областях. Эта проблема рассмотрена на примере изучения вопросов ортогональности кривых второго порядка в рамках дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными». С темой «Кривые второго порядка» учащиеся знакомятся начиная с 7-го класса, при этом к ней непрестанно возвращаются на протяжении всего школьного курса математики, а в рамках вузовской программы расширяют свои знания о свойствах этих кривых и изучают их канонические уравнения. При этом целостная картина у учащихся начинает складываться лишь при изучении дифференциальной геометрии и применении математического анализа для решения ряда задач, связанных с нахождением касательных и нормалей к линиям на плоскости, а также с нахождением расстояния от точки до кривой. Целью данной статьи является раскрытие возможностей дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными» для обобщения знаний учащихся по теме «Кривые второго порядка» на примере понятия «ортогональность плоских кривых». Главным аргументом является то, что в рамках данной дисциплины можно объединить и геометрический, и функциональный подходы, а также использовать инструменты математического анализа. В статье даются рекомендации в рамках методики преподавания данной дисциплины по достижению указанных целей, а именно: приведена серия задач по теме «Ортогональные траектории», позволяющая ещё раз вернуться к кривым второго порядка, систематизировать и расширить ранее имеющиеся у учащихся знания. При этом решение этих задач дает возможность отработать необходимые навыки в рамках самой дисциплины на доступном материале, который позволит легко проиллюстрировать полученные результаты и показать их непротиворечивость ранее известным фактам из школьного и вузовского курса математики. Одним из ведущих подходов к исследованию данной проблемы является интегративный подход, который помогает обеспечить целостность и преемственность содержания образовательной программы при переходе от школьной математики к высшей. Также он помогает установить прочные межпредметные связи между разными разделами высшей математики. В статье изучаются возможности дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными» для установления межпредметных связей внутри математических дисциплин, таких как геометрия, аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия и математический анализ, на примере темы «Кривые второго порядка». Практическая значимость статьи заключается в том, что приведен ориентировочный список практических заданий с решениями, который может быть использован в процессе преподавания данной дисциплины для достижения указанных выше целей.

Поступила в редакцию *Received*	27.11.2018	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	29.12.2018
Принята к публикации *Accepted for publication*	29.12.2018	Опубликована *Published*	28.02.2019

Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

---

[1] **Кирин Николай Александрович,** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ГОУ ВО МО «Государственный социально-гуманитарный университет», г. Коломна, Россия

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, геометрия, методика преподавания математики в высшей школе, кривые второго порядка.

Введение

Как известно, с кривыми второго порядка учащиеся сталкиваются ещё при освоении школьного курса математики. Понятия окружности, параболы и гиперболы входят в программу 8–9-х классов, хотя парабола и гипербола изучаются исключительно в контексте представления этих линий графиками функций. В курсе геометрии доказывается теорема о перпендикулярности касательной и радиуса окружности, проведенного в точку касания. В 10-м классе при изучении темы «Производная» выводится уравнение касательной к графику функции, а значит, у учащихся к этому моменту уже достаточно знаний для освоения понятия ортогональности линий на плоскости. Однако кривые второго порядка, являясь одними из наиболее простых линий, отличных от прямых, в школьном курсе изучаются лишь фрагментарно, и в школьный курс не входит общая теория, позволяющая систематизировать материал и решать задачи более общего характера. Сами кривые второго порядка заключают в себе широкие возможности для иллюстрации некоторых математических понятий, таких как «расстояние от точки до кривой», «монотонность функции», «точки локального экстремума» «ортогональность плоских кривых» и многие другие.

При изучении геометрии в вузе студенты знакомятся с каноническими уравнениями кривых второго порядка и изучают ряд свойств этих кривых, в частности связанных с нахождением углов между линиями в точке пересечения. Параллельно в курсе математического анализа студенты в рамках темы «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» могут расширить свои знания о касательных и нормалях к плоским кривым и вывести соответствующие уравнения для кривых второго порядка, заданных своими каноническими уравнениями, в том числе и для эллипса. А познакомившись с понятием «инверсия относительно окружности», получат представление о конформных отображениях и о некоторых свойствах ортогональных окружностей.

Однако полностью систематизировать весь обширный материал, связанный с кривыми второго порядка и с задачей нахождения углов между ними, у студентов появляется возможность лишь при изучении дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными». Именно эта дисциплина естественным образом объединяет в себе многие вопросы, изученные в курсе математического анализа и геометрии одновременно. Поэтому ценность данной дисциплины заключается не только в освоении студентами важнейшего инструментария для решения прикладных задач, касающихся динамики некоторых непрерывных процессов, но и, очевидно, в том, что эта дисциплина является интегрирующей и обеспечивает установление прочных межпредметных связей различных математических дисциплин.

Обзор отечественной и зарубежной литературы

В современном мире требования к образованию меняются в соответствии с задачами, которые встают перед обществом в данный исторический момент. Во все времена развитие науки и техники было необходимым условием для качественного прорыва в различных областях. В связи с этим подготовка учащихся по дисциплинам естественно-научного цикла, в частности по математическим дисциплинам, всегда вызывала серьезный интерес специалистов как непосредственно в области методики преподавания математики, так и в области педагогики в целом. Так, например,

А. В. Абрамов [1] занимался методическими вопросами, связанными с созданием системы упражнений, направленных на усвоение математических дисциплин. В статье Р. М. Асланова и А. В. Синчукова [2] изучается компетентностный подход к подготовке учителей математики и информатики, приводится подробный анализ педагогических категорий «компетентность», «компетенция» и «компетентностный подход», а также выделены специфические компоненты именно профессионально-педагогической компетентности. В своей диссертации А. Г. Мордкович [3] изучал вопросы успешной реализации принципа связи теории с практикой в процессе обучения будущих учителей математики, которые и должны будут обеспечить соответствующий уровень выпускников школ. Но одной из наиболее острых проблем всегда являлась проблема преемственности образовательных программ при переходе учащихся из школы в вуз. Этой проблеме посвящено много работ, в том числе и современных авторов. М. В. Комарова [4] изучала проблему преемственности обучения иностранному языку в средней и высшей школе. Ею раскрыто содержание понятия «преемственность школьного и вузовского обучения» не только в смысле преемственности между ступенями образования, но и в смысле преемственности между выбором технологии обучения данному предмету. В. Я. Лыкова [5] рассматривала применение принципа преемственности по отношению к воспитанию, отмечая его роль в последовательном и гармоничном развитии личности. Активно разрабатывается концептуальный подход к построению методической системы обучения математике. При этом данная система должна быть направлена на реализацию преемственности в обучении и синтезировать результаты, полученные при решении данной проблемы, на психолого-педагогическом и методическом уровнях (З. А. Магомеддибирова [6]).

Одним из путей решения данной проблемы является разработка под единой редакцией всей линейки учебно-методических пособий и учебников по некоторым предметам, начиная со школы и заканчивая вузом. Например, такой единый курс по геометрии был разработан совместно с различными авторами Л. С. Атанасяном [7–11].

К сожалению, традиционные проблемы у учащихся возникают в процессе освоения именно геометрии. Данная дисциплина требует не только прочных теоретических знаний, но и развитого пространственного воображения, умения «видеть» необходимые элементы в процессе решения задач, а не только выполнять алгоритмические действия. Это требует от учащихся применения дополнительных усилий. Недаром именно по геометрии создано много книг, в том числе и зарубежными авторами. Книга «Новые встречи с геометрией», написанная Г. С. М. Коксетером и С. Л. Грейцером [12], с одной стороны, направлена на стимулирование интереса учащихся к геометрии, а с другой стороны, выступает в роли противовеса постепенному занижению роли геометрии в содержании школьных программ в США и в ряде других стран. Проблема построения межпредметных связей, которые призваны развить интерес к геометрии и мотивировать к её изучению, отражена в содержании книги «Наглядная геометрия» Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена [13], в которой в научно-популярном стиле, доступном школьникам старших классов, изложены не только темы, относящиеся к классическим разделам геометрии, но и затронуты вопросы, связанные с геометрической кристаллографией, с геометрической сущностью кинематики, с топологией и многие другие.

Как было сказано выше, требование к уровню подготовки учащихся школ неразрывно связано с уровнем подготовки будущих учителей математики, что, естественно, находит своё отражение во ФГОС [14–18].

Одной из важнейших тем аналитической геометрии, изучение которой начинается ещё со школы и продолжается в рамках вузовской программы, является тема «Кривые

второго порядка». Отечественными и зарубежными учеными, педагогами и специалистами в области методики преподавания математических дисциплин написано много учебников и учебных пособий, помогающих освоить эту тему как в рамках курса аналитической геометрии, так и непосредственно изучая свойства этих кривых. Не одно десятилетие педагоги исследуют методические аспекты изучения геометрии в целом и аналитической геометрии в частности. Например, труд К. Б. Пениожкевича [19], превышающий объем трех курсов, которые были привычными в то время, был удостоен малой премии императора Петра Великого, что свидетельствует не только о важности этой темы для педагогов и учителей математики, но и о признании на государственном уровне её роли в подготовке учащихся. Приблизительно к этому времени относится и учебник К. Н. Рашевского [20], в котором дано оригинальное изложение темы «Конические сечения», которое несколько отходит от шаблонов того времени, что и отмечает в своей рецензии на эту работу проф. Д. Синцов. А в книге Н. П. Кильдюшевского [21] помимо теоретических положений приводится перечень конкретных задач для непосредственного изучения свойств кривых второго порядка. Немало современных учебников и учебных пособий, в которых непосредственно изучаются кривые второго порядка (например, А. В. Акопян, А. А. Заславский [22] и другие). А в учебном пособии В. Н. Шевченко [23] одновременно изучаются и поверхности второго порядка.

Однако решение целого ряда задач, связанных с изучением свойств кривых второго порядка, находится на стыке геометрии и дифференциального исчисления. Какие-то из них вполне можно решить в рамках курса дифференциальной геометрии. В книге А. В. Погорелова [24] в рамках дифференциальной геометрии рассматривается целый ряд вопросов, связанных со свойствами и взаимным расположением кривых, таких как соприкосновение кривых, кривизна и кручение кривой. Подобный классический подход можно найти и в учебнике И. В. Белько и А. А. Бурдуна [25]. В отличие от вышеуказанных учебников, в брошюре А. Б. Скопенкова [26] предлагается принципиально иной подход. В ней во главу угла ставится разбор интересных геометрических проблем, имеющих прикладной характер, в результате решения которых естественно возникает понятие кривизны.

Однако дифференциальная геометрия не единственная дисциплина, помогающая связать методы геометрии и математического анализа воедино для изучения некоторых геометрических объектов. Другой такой дисциплиной является дисциплина «Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными». Решению задач, основанных на геометрическом смысле общего решения обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе и с применением кривых второго порядка, уделяется особое место практически в каждом учебнике. В учебнике М. Л. Краснова, А. И. Киселева и Г. И. Макаренко [27] изучение дифференциальных уравнений осуществляется посредством решения последовательной системы практических упражнений и теоретических задач. Подобным образом построен учебник М. П. Григорьева [28], в котором материал преподносится и закрепляется посредством решения упражнений. Несколько иной подход использован в учебнике В. В. Амелькина [29], в котором также рассматривается решение задач, но имеющих прикладной характер в различных областях. Схожие методы изложения темы «Дифференциальные уравнения» характерны и для зарубежных авторов, например Ф. Хартмана [30]. При этом стоит отметить, что теория дифференциальных уравнений не является полностью завершенной, и ещё многие задачи ждут своего решения. Особенный интерес вызывают прикладные задачи, в частности, с применением линейных диффе-

ренциальных уравнений и их систем (например, И. Маценис [31] и другие). В зарубежной литературе принцип доступности изложения для широкого круга читателей зачастую ставится во главу угла, так как изложение материала в научно-популярном стиле способствует популяризации науки и развитию интереса к ней читателей. Подобное изложение материала можно встретить, например, в книге В. Босса [32].

Все перечисленные выше работы, с одной стороны, говорят об интересе к данной проблеме как с педагогической, так и с методико-математической точки зрения, а с другой – предоставляют широкие возможности по использованию имеющихся учебных пособий и научных работ для решения конкретных проблем методики непрерывного изучения некоторых тем в разрезе школа – вуз и в рамках интегративного подхода к изучению отдельных математических дисциплин в школе и в вузе.

Методологическая база исследования

В основу методологической базы данной работы был положен научно-теоретический подход, выраженный в изучении и анализе научной литературы по исследуемому вопросу в области математики, теории и методики преподавания математических дисциплин, педагогики и психологии, а также интегративный подход к обучению, принцип преемственности в обучении и компетентностный подход.

Интегративный подход к обучению предполагает обеспечение целостности образовательной программы как внутри конкретного курса, так и с учетом установления сложной системы межпредметных связей. В работах З. Ш. Каримова [33] утверждается необходимость многостороннего образования не только в области смежных дисциплин, но и в разных областях знаний. Связь интегративного подхода с компетентностным подходом можно проследить в работах И. Я. Зимней [34]. Это обусловлено тем, что овладение компетенциями, необходимыми для решения проблем, возникающих у человека не только в профессиональной деятельности, но и в повседневной жизни, требует полипрофессиональных знаний, умений и навыков. Применительно к рассмотренной теме этот подход выражается в необходимости установления широкой сети междисциплинарных связей и единого подхода к организации и построению учебной программы.

Принцип преемственности между различными ступенями образования и при переходе от изучения одной дисциплины к другой рассмотрен в работах таких ученых, как М. В. Комарова [35], В. Я. Лыкова [36], З. А. Магомеддибирова [37]. В нашем случае это реализуется в разработке серии задач, которая обобщает на новом уровне знания, полученные по теме «Кривые второго порядка» в школе и вузе, и помогает создать целостную картину у студентов по данной теме.

Компетентностный подход анализируется целым рядом ученых. Например, Е. А. Коган [38] рассматривает компетентностный подход как прогрессивную альтернативу традиционному, «знаниевому» подходу, а в работах И. А. Зимней [39] изучаются психолого-педагогические механизмы овладения теми или иными компетенциями, направленными на применение имеющихся знаний в как можно более широкой области с точки зрения педагогики и психологии.

Результаты исследования

В рамках дисциплины «Геометрия» студенты систематизируют и обобщают полученные ими знания по этой теме в школьном курсе математики. Однако аналитико-геометрический и алгебраический подход к изучению этих кривых не позволяет создать це-

лостную картину у учащихся, так как целый спектр задач и свойств этих кривых, касающихся их взаимного расположения, остается неохваченным, так как он требует применения методов дифференциального исчисления. При этом частично эти вопросы затрагиваются в рамках дисциплины «Математический анализ», но, к сожалению, на данном этапе у студентов не хватает знаний по обеим дисциплинам, да и в математическом анализе невозможно выделить достаточное количество часов на изучение темы «Кривые второго порядка», так как необходимо решать и другие задачи. Поэтому естественное обобщение и дополнение полученных знаний по данной теме логично отложить до начала изучения дисциплины «Дифференциальные уравнения», когда основы дисциплин «Геометрия», «Алгебра» и «Математический анализ» уже изучены.

Возвращение к изучению свойств кривых второго порядка, а именно изучению вопросов, связанных с ортогональностью плоских кривых, в рамках дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными» планируется осуществлять постепенно, подводя студентов к данным задачам. Выделим основные логические этапы этого процесса, которые помогут добиться указанных целей.

На первом этапе необходимо ввести понятие обыкновенного дифференциального уравнения и его общего решения, после чего заметить, что общее решение обыкновенного ДУ уравнения n-го порядка $F\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}\right)=0$, являясь функцией, зависящей от n вещественных параметров, $y=f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, задает семейство плоских кривых, зависящих от этих параметров. После этого можно рассмотреть частный случай таких уравнений, а именно уравнения 1-го порядка и соответствующие им семейства. Тем самым появляется возможность актуализировать знания студентов по теме «Кривые второго порядка», так как именно эти кривые достаточно просты для изображения и в то же время не слишком тривиальны.

На втором этапе рекомендуется обсудить со студентами достаточное количество задач по решению ДУ 1-го порядка, чтобы впоследствии меньше отвлекаться на технические вопросы решения конкретного дифференциального уравнения, иначе общая идея может отойти на второй план и остаться не до конца понятой некоторыми слушателями. Только после этого можно перейти к постановке обратной задачи, а именно нахождению ДУ, общее решение которого задает данное семейство кривых. Особенно важной задачей является нахождение семейства ортогональных траекторий по отношению к заданному семейству. Данная задача позволит ещё раз отточить навык решения как прямой, так и обратной задачи.

Наконец, на заключающем этапе обсуждается и формулируется сам алгоритм нахождения ортогональных траекторий, который вполне доступен студентам, редко вызывает непонимание и может быть сформулирован ими самими в результате обсуждения в группе.

Сформулируем этот алгоритм и заодно укажем основные точки в его обсуждении и выработки, которые должны пройти студенты:

1) Найти ДУ 1-го порядка $F_1(x,\ y,\ y')=0$, задающее данное семейство кривых на плоскости. Для этого нужно исключить из системы $\begin{cases}\Phi_1(x,\ y,\ C)=0\\ \dfrac{\partial\Phi_1(x,\ y,\ C)}{\partial x}=0\end{cases}$ параметр C.

2) Воспользовавшись геометрическим смыслом производной, а именно тем, что значение производной в данной точке численно равно тангенсу угла наклона каса-

тельной $y' = tg\varphi = k_{кас}$, проведенной в этой точке, а также свойством угловых коэффициентов ортогональных прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$, заключить, что угловой коэффициент нормали в каждой точке будет определяться соотношением $k_{нор} = -\frac{1}{y'}$. Заметить, что если через точку (x, y) проходит кривая исходного семейства, то через эту же точку проходит и кривая искомого семейства. И единственным отличием будет то, что угловые коэффициенты нового семейства равны в каждой такой точке $-\frac{1}{y'}$.

Это означает, что ДУ, задающее новое семейство, можно получить из полученного в п. 1 ДУ заменой $y' \to -\frac{1}{y'}$, то есть получить уравнение

$$F_2(x,\ y,\ y') = F_1\left(x,\ y,\ -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

3) Решив последнее уравнение, получить искомое семейство ортогональных траекторий.

Разумеется, в ходе обсуждения какие-то пункты могут быть раздроблены на более мелкие шаги или же, наоборот, объединены в один шаг, в зависимости от хода этого самого обсуждения и уровня подготовки группы.

В качестве примерного перечня упражнений, направленных на применение данной теории к нахождению ортогональных траекторий к семействам кривых второго порядка, можно предложить следующие задачи.

Задача 1. Найти семейство ортогональных траекторий к семейству концентрированных окружностей $x^2 + y^2 = C$.

Решение

1) Рассмотрим систему $\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi'_x(x, y, C) = 0 \end{cases}$ и исключим из неё параметр С.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C \\ 2x + 2yy' = 0 \end{cases} \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

2) Заменяем $y' \to -\frac{1}{y'}$ и получаем следующее ДУ: $y' = \frac{y}{x}$.

3) Разделяя переменные, получаем искомое общее решение, задающее семейство ортогональных траекторий:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|\tilde{C}x| \quad \Rightarrow \quad y = \tilde{C}x.$$

В данном случае таковыми линиями являются радиальные прямые, что согласуется со знаниями студентов, полученными ещё из школьного курса математики.

Задача 2. Найти семейство ортогональных траекторий к семейству окружностей $x^2 + y^2 = 2Cx$, центры которых расположены на оси Ox.

Решение

1) Рассмотрим систему $\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi'_x(x, y, C) = 0 \end{cases}$ и исключим из неё параметр С.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2Cx \\ 2x + 2yy' = 2C \end{cases} \Rightarrow \quad 2xyy' = y^2 - x^2.$$

2) Заменяем $y' \to -\dfrac{1}{y'}$ и получаем следующее ДУ: $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

3) Решая данное однородное уравнение, получаем искомое общее решение, задающее семейство ортогональных траекторий:

$$y = tx \;\Rightarrow\; y' = t'x + t$$

$$t'x + t = \frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow \frac{dt}{dx}x = \frac{t^3+t}{1-t^2} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{(1-t^2)dt}{t(1+t^2)} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{dt}{t} - \int\frac{2tdx}{1+t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|\tilde{C}x| = \ln\left|\frac{t}{1+t^2}\right| \Rightarrow x^2 + y^2 = \hat{C}y, \quad \hat{C} = \frac{1}{\tilde{C}}.$$

В данном случае таковыми линиями являются окружности, центры которых расположены на оси Оу.

Задача 3. Найти семейство ортогональных траекторий к семейству парабол $y = Cx^2$.

Решение

1) Рассмотрим систему $\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0 \\ \Phi'_x(x,y,C) = 0 \end{cases}$ и исключим из неё параметр С.

$$\begin{cases} y = Cx^2 \\ y' = 2Cx \end{cases} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2Cx}{Cx^2} \Rightarrow y' = \frac{2y}{x}$$

2) Заменяем $y' \to -\dfrac{1}{y'}$ и получаем следующее ДУ: $y' = -\dfrac{x}{2y}$.

3) Разделяя переменные, получаем искомое общее решение, задающее семейство ортогональных траекторий:

$$2ydy = -xdx \Rightarrow \int 2ydy = -\int xdx \Rightarrow y^2 = -\frac{x^2}{2} + \tilde{C} \Rightarrow \frac{x^2}{2\tilde{C}} + \frac{y^2}{\tilde{C}} = 1, \ \tilde{C} > 0.$$

В данном случае таковыми линиями являются эллипсы, центр симметрии которых – начало координат. При $\tilde{C} = 0$ мы получаем точку (0, 0), а при отрицательных $\tilde{C}$ получаем мнимые эллипсы.

Задача 4. Найти семейство ортогональных траекторий к семейству гипербол $y = \dfrac{C}{x}$ с асимптотами x = 0 и y = 0.

Решение

1) Рассмотрим систему $\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0 \\ \Phi'_x(x,y,C) = 0 \end{cases}$ и исключим из неё параметр С.

$$\begin{cases} y = \dfrac{C}{x} \\ y' = -\dfrac{C}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}.$$

2) Заменяем $y' \to -\dfrac{1}{y'}$ и получаем следующее ДУ: $y' = \dfrac{x}{y}$.

3) Разделяя переменные, получаем искомое общее решение, задающее семейство ортогональных траекторий:

$$ydy = xdx \Rightarrow \int ydy = \int xdx \Rightarrow y^2 = x^2 - \tilde{C} \Rightarrow \frac{x^2}{\tilde{C}} - \frac{y^2}{\tilde{C}} = 1,\ \tilde{C} \neq 0.$$

В данном случае искомыми линиями являются гиперболы с асимптотами $y = x$ и $y = -x$. При $\tilde{C} = 0$ мы получаем сами асимптоты, которые также перпендикулярны гиперболам заданного семейства.

Заключение

Приведенные выше примеры задач, конечно, представляют лишь примерный перечень упражнений, направленных на изучение вопросов ортогональности кривых второго порядка. Но, несомненно, включение их и подобных им задач в учебный процесс будет способствовать более глубокому пониманию этого вопроса и систематизации полученных ранее знаний, начиная со школьной скамьи и заканчивая темами, изученными на младших курсах в вузе. Опыт применения этих заданий в учебном процессе показывает, что наблюдается сразу два эффекта. Во-первых, студенты начинают более уверенно решать непосредственно некоторые типы дифференциальных уравнений, так как это помогает отработать соответствующий навык, а во-вторых, начинают демонстрировать более прочные знания по теме «Кривые второго порядка», так как эта тема актуализируется после определенной паузы в её изучении.

Ссылки на источники

1. Абрамов А. В. Личностно-деятельностный аспект построения системы методических заданий по специальным математическим дисциплинам // Международный конгресс по проблемам гуманизации образования: тез. выступлений. – Бийск: НИЦ БиГПИ, 1995. – С. 125.
2. Асланов Р. М., Синчуков А. В. Компетентностный подход в подготовке будущего учителя информатики и математики // Преподаватель XXI век. – 2008. – № 2. – С. 11–17.
3. Мордкович А. Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте: дис. ... д-ра пед. наук. – М., 1986. – 335 с.
4. Комарова М. В. Преемственность обучения иностранному языку в средней и высшей школе: на примере технического вуза: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.08. – Барнаул, 2002. – 196 с.
5. Лыкова В. Я. Последовательно и гармонично: преемственность в воспитании. – Смоленск: СГИИ, 2001. – 132 с.
6. Магомеддибирова З. А. Методическая система реализации преемственности при обучении математике: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02. – М., 2003. – 300 с.
7. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений/ [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с., ил.
8. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. – 22-е изд. – М.: Просвещение, 2013. – 255 с., ил.
9. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. – М.: Просвещение, 1986. – Ч. I. – 336 с., ил.
10. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия: учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 1. – 2-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2016. – 400 с.
11. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия: учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 2. – 2-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2016. – 424 с.
12. Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 224 с.

13. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
14. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Государственные требования к минимуму содержания уровню подготовки выпускника по специальности 01.01.00 Математика (Квалификация – учитель математики). – М., 1995.
15. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Государственные требования к минимуму содержания и уровню подготовки выпускника по специальности 01.01.00 Математика. – М., 1994.
16. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Государственные требования к минимуму содержания и уровню подготовки выпускника по специальности 01.01.00 Математика (квалификация – учитель математики). – М., 1995.
17. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Специальность 03.21.00 Математика (квалификация – учитель математики). – М., 2000.
18. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Специальность 032100 – Математика (квалификация – учитель математики). – М., 2005. – URL: http://www.edu.ru/db/portal/spe/plan_zip/032100p_2005.html (Российское образование. Федеральный портал).
19. Пениожкевич К. Б. Основания аналитической геометрии. Курс дополнительного класса реальных училищ. По программам 1907 г. – М.; СПб.: Изд-е книжного магазина В. В. Думнова, 1911. – 198 с.
20. Рашевский К. Н. Основания аналитической геометрии. Учебник для VII класса реальных училищ, сост. применительно к программе МНП. – Изд. 8. – М., 1918 . — 118 с.
21. Кильдюшевский Н. П. Сборник упражнений по аналитической геометрии на плоскости с приложением формул и статьи «Конические сечения». Применительно к программе реальных училищ. – Казань, 1909. – 91 с.
22. Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. – 2-е изд., дополн. – М.: МЦНМО, 2011. – 152 с.
23. Шевченко В. Н. Кривые и поверхности второго порядка: учеб. пособие. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1993. – 43 с.
24. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. – Изд. 6-е, стер. — М.: Наука, 1974. — 176 с.
25. Дифференциальная геометрия / И. В. Белько, А. А. Бурдун, В. И. Ведерников, А. С. Феденко. – Минск: Из-во БГУ, 1982. – 255 с., ил.
26. Скопенков А. Б. Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах. – М.: МЦНМО, 2009. –72 с.
27. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие. – Изд. 6-е. – М.: Изд-во ЛКИ, 2017. – 256 с.
28. Григорьев М. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. – М.: Вузовская книга, 2008. – 248 с.
29. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: КД Либроком, 2012. – 208 с.
30. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
31. Маценис И. Структура решений вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравн. и их прим. – Вильнюс, 1986. – Т. 38. – С. 53–57.
32. Босс В. Лекции по математике. Т. 2: Дифференциальные уравнения: учеб. пособие. – М.: КД Либроком, 2016. – 208 с.
33. Каримов З. Ш. Теория и практика институциональной интеграции высшего профессионального педагогического образования на основе синтеза внешнего и внутреннего компонентов: автореф. дис. … д-ра пед. наук. – Уфа, 2009. – 48 с.
34. Зимняя И. А., Земцова Е. В. Интегративный подход к оценке единой социально- профессиональной компетентности выпускников вузов // Высшее образование сегодня. – 2008. – № 5. – С. 14–19.
35. Комарова М. В. Указ. соч.
36. Лыкова В. Я. Указ. соч.
37. Магомеддибирова З. А. Указ. соч.
38. Коган Е. Я. Компетентностный подход и новое качество образования // Современные подходы к компетентностно-ориентированному образованию: материалы семинара / под ред. А. В. Великановой. – Самара, 2001. – С. 12–17.
39. Зимняя И. А. Компетентностный подход. Каково его место в системе современных подходов к проблеме образования // Высшее образование сегодня. – 2006. – № 8. – С. 20–26.

Nikolai A. Kirin,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Mathematics and Methods of Teaching Mathematical Disciplines Chair, State University of Humanities and Social Studies, Kolomna, Russia.
Kirin_N_A@mail.ru

Implementation of the continuity principle and the use of an integrative approach on the example of studying orthogonality of second-order curves families within the course of "Differential equations» discipline

Abstract. The relevance of this work is determined by the need to implement the principle of continuity in education, not only in the transition school-University, but also in the study of individual mathematical disciplines. This ensures the

establishment of strong inter-disciplines relations and is one of the most important components in the formation of the future University graduate competences, as it contributes to the wide application of knowledge in various fields. This issue is examined on the example of studying the questions of second-order curves orthogonality within the discipline "Ordinary differential equations and partial differential equations". Students first broach the topic “Second-order curves” starting from grade 7, and they are constantly referring to it throughout the school mathematics course. Then students expand their knowledge about the properties of these curves and study their canonical equations within the University program. Meanwhile, students comprehend the full picture only after they study differential geometry and apply mathematical analysis to solve some tasks related to finding tangents and normals to the line on the plane, as well as finding the distance from the point to the curve. The purpose of this article is to reveal the potentials of the discipline "Ordinary differential equations and partial differential equations" for generalization of students ' knowledge on the topic "Second-order curves" on the example of the concept "orthogonality of plane curves". The main argument is that it is possible to combine both geometrical and functional approaches within this discipline, and also to use tools of the mathematical analysis. The article provides recommendations in the framework of methods of this discipline teaching to achieve these purposes. Namely, a series of tasks on the topic "Orthogonal trajectories" is given, which allows us to return to the second-order curves once again, to systematize and expand the knowledge previously available to students. At the same time, the solution of these tasks makes it possible to work out the necessary skills within the discipline itself on the available material, which will easily illustrate the results obtained and show their consistency with the previously known facts from the school and University course of mathematics. One of the main approaches to the study of this problem is an integrative approach, which helps to ensure the integrity and continuity of the educational program content during the transition from school mathematics to higher mathematics. It also helps to establish strong interdisciplinary connections between different sections of higher mathematics. The article studies the potentials of the discipline "Ordinary differential equations and partial differential equations" to establish interdisciplinary connections within mathematical disciplines, such as geometry, analytical geometry, differential geometry and mathematical analysis on the example of the topic "Second-order curves". The practical significance of the article lies in the fact that it provides an indicative list of practical tasks with solutions that can be used in the process of teaching this discipline to achieve the above mentioned purposes.

Key words: differential equations, geometry, methods of teaching mathematics in high school, second-order curves.

Научно-методический электронный журнал «Концепт» (раздел 13.00.00 Педагогические науки) с 06.06.2017 включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (перечень ВАК Российской Федерации).

ISSN 2304-120X

www.e-koncept.ru

Библиографическое описание статьи:

Кирин Н. А. Реализация принципа преемственности и использование интегративного подхода на примере изучения вопросов ортогональности семейств кривых второго порядка в рамках дисциплины «Дифференциальные уравнения» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2019. – № 2 (февраль). – С. 13–23. – URL: http: // e-koncept.ru/2019/191009.htm.

DOI 10.24411/2304-120X-2019-11009

© Концепт, научно-методический электронный журнал, 2019
© Кирин Н. А., 2019