ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ научно-методический электронный журнал

Белобородова Т. Л., Мурашкина Т. И., Петруничева А. С. Методика преподавания темы «Конические поверхности» на занятиях по математике и начертательной геометрии // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2019. – № V3. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2019/196019.htm.

ART 196019 **УДК 378.147**

Белобородова Татьяна Леонидовна,
старший преподаватель кафедры инженерной графики ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
tl.beloborodova@yandex.ru

Мурашкина Татьяна Ивановна,
кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной графики ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
murashkinat@yandex.ru

Петруничева Александра Сергеевна,
студентка ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alexandrapetrunicheva@gmail.com

Методика преподавания темы «Конические поверхности» на занятиях по математике и начертательной геометрии

Аннотация. *Актуальность работы обусловлена тем, что конические поверхности являются одними из основных видов поверхностей, на которых основаны все построения в геометрии и инженерной графике. С понятием «конус» учащиеся знакомятся уже в старших классах школы, но более подробно его изучают только на первых курсах технических вузов. Конические поверхности играют важную роль в жизни человека. На основе данных поверхностей проектируются крыши зданий, архитектурные сооружения и технические устройства. В данной статье раскрываются такие понятия, как конические поверхности, конус, их основные свойства и особенности построения. Наибольший интерес данная статья может вызывать у учащихся старших классов, студентов первого и второго курсов технических специальностей и у преподавателей начертательной геометрии и математики.*

Ключевые слова: *конус, конические поверхности, коническое сечение, эпюр, преподавание на младших курсах технического вуза, преподавание аналитической геометрии, преподавание начертательной геометрии.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Основы построения геометрических фигур в пространстве изучаются на базе геометрии старших классов общеобразовательного школьного курса. Курсы аналитической геометрии и инженерной графики технических вузов призваны показать студентам младших курсов их важность, значение и практическое применение.

Студенты технических специальностей обязаны ориентироваться в многообразии поверхностей и особенностях их построения. При любом конструировании, от деталей машин до архитектурных строений, возникает необходимость использовать ряд поверхностей – многогранных, криволинейных – и их сочетания.

Поверхность является последовательной совокупностью множества положений линий в пространстве. Данные линии могут быть кривыми или прямыми, могут иметь как постоянный, так и переменный вид. Они являются образующими поверхности. Перемещение в пространстве образующей происходит по направляющим. Направляющие задают закон перемещения образующим. В процессе перемещения образующей формируется каркас самой поверхности, которая является совокупностью нескольких последовательных положений образующих и направляющих [1].

Как известно, основные способы задания поверхностей – это аналитический и графический. В начертательной геометрии используют для построений и исследования поверхностей кинематический способ, когда поверхность вращения получается путем вращения образующей вокруг некоторой неподвижной оси.

Конические поверхности относятся к поверхностям второго порядка и изучаются в курсах аналитической геометрии и начертательной геометрии.

Конической называется поверхность, которая имеет вершину A и направляющую l, которая содержит все точки прямых, проходящих через вершину и пересекающихся с кривой l.

На рис. 1 даны неподвижная точка S, прямая линия g и кривая линия ABC. Прямая g (образующая) движется по кривой ABC (направляющей), постоянно проходя через точку S. В результате получается коническая поверхность [2, 3] (рис. 1).

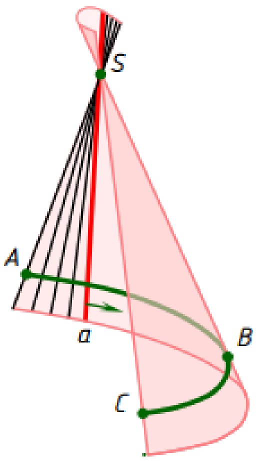

Рис. 1. Коническая поверхность

Боковая поверхность конуса – это замкнутая коническая поверхность. Основанием конуса является плоскость, которая пересекает коническую поверхность. Вершина конуса – это точка, в которой сходятся все его образующие, а высота – это перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания.

Отличием эллиптического конуса является то, что он получен путем деформации фигуры вдоль перпендикулярных осей конуса [4].

Эллиптический конус определяется уравнением, которое является каноническим уравнением конуса второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Если в этом случае построить горизонтальное сечение, то полученная фигура будет эллипсом.

Анализируя геометрические свойства конуса, в сечении этой поверхности плоскостью Oyz получаем линию $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, распадающуюся на пару вещественных пересекающихся прямых, проходящих через точку начала координат. Соответственно, при сечении плоскостью Oxz получается следующая пара вещественных пересекающихся прямых $\frac{x}{a}\pm\frac{z}{c}=0$.

Сечением конуса второго порядка плоскостями $z=h$ получаются кривые, проекции которых на плоскость Oxy определяются уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}.$$

Если $h = 0$, то проекция линии пересечения вырождается в точку $(0{,}0{,}0)$, которая является вершиной конуса. Если $h \neq 0$, то уравнение принимает вид:

$$\frac{x^2}{(a^2)} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т. е. проекцией линии сечения является эллипс с полуосями $a = \frac{a}{c} \cdot |h|$ и $b = \frac{b}{c} \cdot |h|$. При увеличении абсолютной величины h полуоси эллипсов увеличиваются.

Центр симметрии – начало координат, а плоскости симметрии конуса – координатные плоскости.

Для того чтобы убедиться, что вещественный конус S образован прямыми линиями, проходящими через начало координат, необходимо установить, что прямая L, соединяющая любую взятую отличную от начала координат точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ конуса и точку начала координат, располагается полностью на конусе, другими словами, координаты любой точки $M(x, y, z)$ прямой L удовлетворяют уравнению конуса.

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности конуса, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению, т. е. $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0$. Параметрические уравнения прямой, проходящей через начало координат и точку M_0, имеют вид $x = x_0 t$, $y = y_0 t$, $z = z_0 t$, где t – некоторое число. Тогда при подстановке в правую часть соотношения (3.52) координат произвольной точки прямой L получается: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = t^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \right) = 0$, т. е. любая точка прямой L принадлежит конусу второго порядка, определяемому уравнением. Таким образом, конус образован прямыми, проходящими через начало координат [5].

Для первичного закрепления теоретического материала следует рекомендовать для работы на семинаре или для самостоятельной работы студентов следующие задачи из курса аналитической геометрии.

1. По какой линии пересекается конус $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ с плоскостью $y = 2$?
2. Составить уравнение конической поверхности, вершиной которой служит точка М (0;0;1), а направляющей – эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 3$.
3. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющие которого заданы уравнениями: 1) $x = a$, $y^2 + z^2 = b^2$; 2) $y = b$, $x^2 + z^2 = a^2$.

Конусы разделяют на прямые и наклонные. Прямым круговым называется конус, у которого основанием служит окружность, а высота проходит через центр основания. Он является поверхностью вращения.

Первооткрывателем конических поверхностей принято считать древнегреческого ученого Менехма.

Уникальность конических поверхностей нашла свое широкое применение в машиностроении, например в виде конических отверстий и наружных конусов. Также они часто применяются в строительстве, они лежат в основе многих крыш и башен. В повседневной жизни конические поверхности нашли свое применение в мелкой бытовой технике, а в оптике легли в основу проектирования оптических линз.

Для формирования и развития навыка решения задач в курсе начертательной геометрии студентам следует предложить для решения задачи на прямой круговой конус (конус как поверхность вращения).

Рассмотрим задачу на использование одного из способов преобразования чертежа – способа вращения вокруг проецирующей оси.

Задача 1. Построить проекции сферы δ с центром в точке О, касательной к конической поверхности, и проекции точки касания К.

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Белобородова Т. Л., Мурашкина Т. И., Петруничева А. С. Методика преподавания темы «Конические поверхности» на занятиях по математике и начертательной геометрии // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2019. – № V3. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2019/196019.htm.

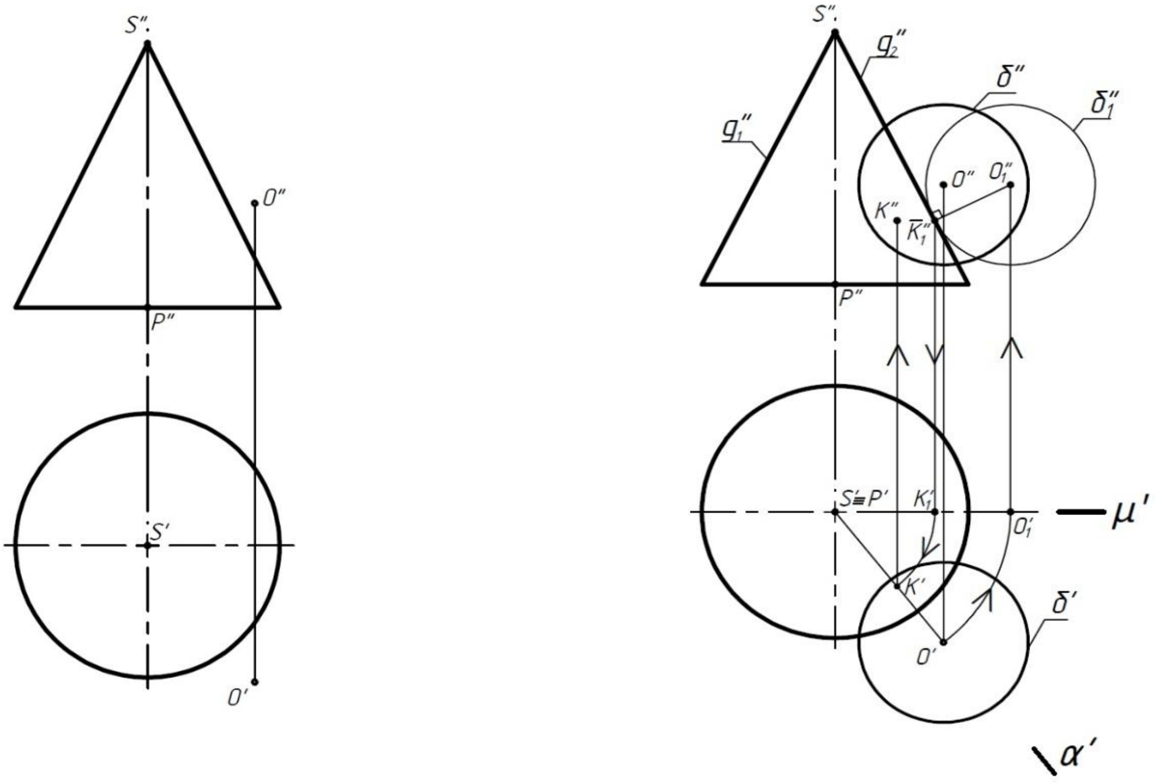

Рис. 2

Решение:

1. Точку O_1 получаем вращением вокруг высоты конуса SP.

Получаем O'_1 и O''_1

Центр вращения – т. S′≡P′.

R вращения = S′O′.

μ ($g_1 \cap g_2$) – плоскость совмещения.

g_1 и g_2 – очерковые образующие.

2. Строим сферу δ''_1 с центром в точкеO''_1, очерк которой лежит в плоскости μ и касается образующей конуса g''_2 в точке K''_1

R сферы = O''_1 K''_1 □ g''_2.

3. Точку касания K1 вращаем обратно в плоскость α, в которой находится точка O.

Получаем проекции точки касания K (K″ и K′).

Строим искомую сферу δ (рис. 2).

В курсе начертательной геометрии рассматривается тема «Пересечение прямой с поверхностью вращения». В некоторых задачах более рациональное решение дает использование не проецирующих вспомогательных плоскостей, а плоскостей общего положения.

Задача 2. Построить проекции точек пересечения прямой m с конической поверхностью без построения лекальных кривых.

В данной задаче прямую a следует заключить во вспомогательную плоскость гамма, проходящую через вершину S конуса. Такая плоскость пересекает коническую поверхность по образующим. Там, где эти образующие пересекут заданную прямую a, находятся искомые точки K_1, K_2, в которых прямая a пересекает конус.

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Белобородова Т. Л., Мурашкина Т. И., Петруничева А. С. Методика преподавания темы «Конические поверхности» на занятиях по математике и начертательной геометрии // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2019. – № V3. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2019/196019.htm.

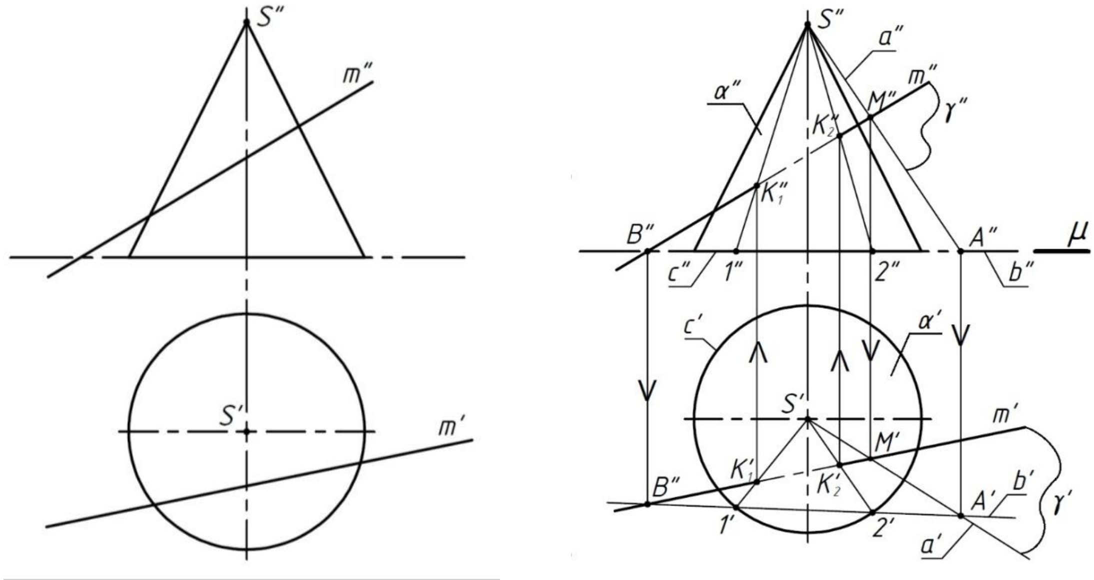

Рис. 3

Решение:

На рис. 3 такая плоскость уже задана (гамма (S;a)).

1. Мы ее перезададим двумя пересекающимися прямыми – $\gamma = m \cap a$.
2. $\gamma \cap \mu = b$ $\mu \| \pi_1$, где μ – плоскость, на которой стоит конус, $\mu \cap \alpha = c$ – основание конуса.
3. $b \cap c = 1,2$.
4. $\gamma \cap \alpha = S1, S2$ – образующие конуса.
5. $S1 \cap m = K_1$, $S2 \cap m = K_2$ (рис. 3).

Задача 3. Построить горизонтальный очерк заданной конической поверхности с осью, параллельной фронтальной плоскости проекции и произвольно наклонённой к горизонтальной плоскости проекций.

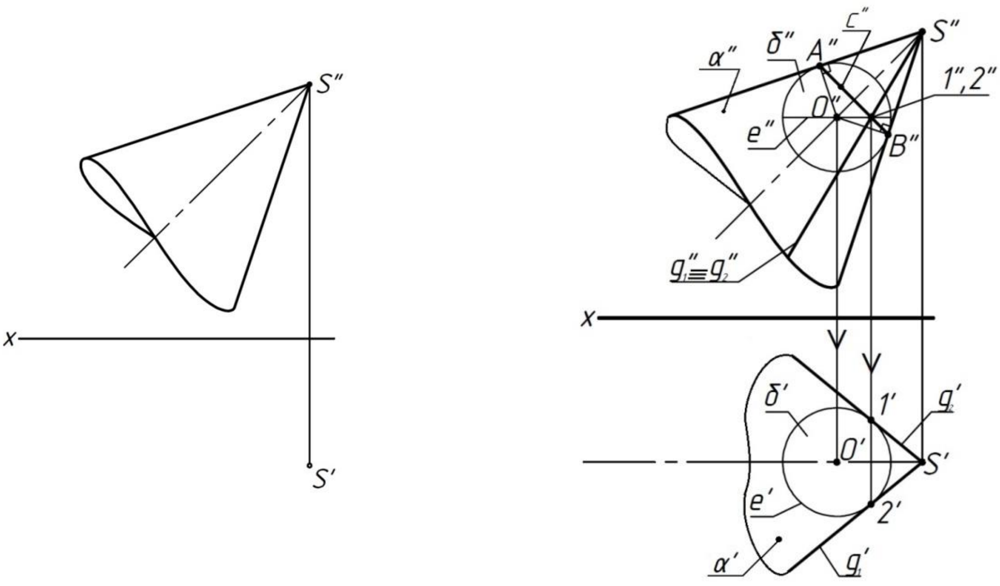

Рис. 4

ISSN 2304-120X
КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Белобородова Т. Л., Мурашкина Т. И., Петруничева А. С. Методика преподавания темы «Конические поверхности» на занятиях по математике и начертательной геометрии // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2019. – № V3. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2019/196019.htm.

Если ось поверхности вращения наклонена к плоскости проекций, то поверхность проецируется с искажением на эту плоскость.

Решение:

1. Строим произвольную сферу δ с центром в точке O, касающуюся конической поверхности α.
2. Находим окружность касания – параллель *c*, проходящую через точки касания A и B, лежащие на очерковых образующих конуса при проецировании на фронтальную плоскость проекций.
3. Строим экватор сферы δ – *e.*
4. *e*∩*c* = 1, 2.
5. Через проекции 1′ и 2′ пройдут искомые образующие g'_1 и g'_2 конической поверхности α, которые являются очерковыми при проецировании на горизонтальную плоскость проекций (рис. 4).

Рассмотрим две задачи на тему «Построение касательной плоскости». Касательная плоскость касается конической поверхности по прямой линии, поэтому коническая поверхность называется поверхностью с параболическими точками.

Задача 4. В точке A, принадлежащей заданной поверхности, построить проекции касательной плоскости и нормали к этой поверхности.

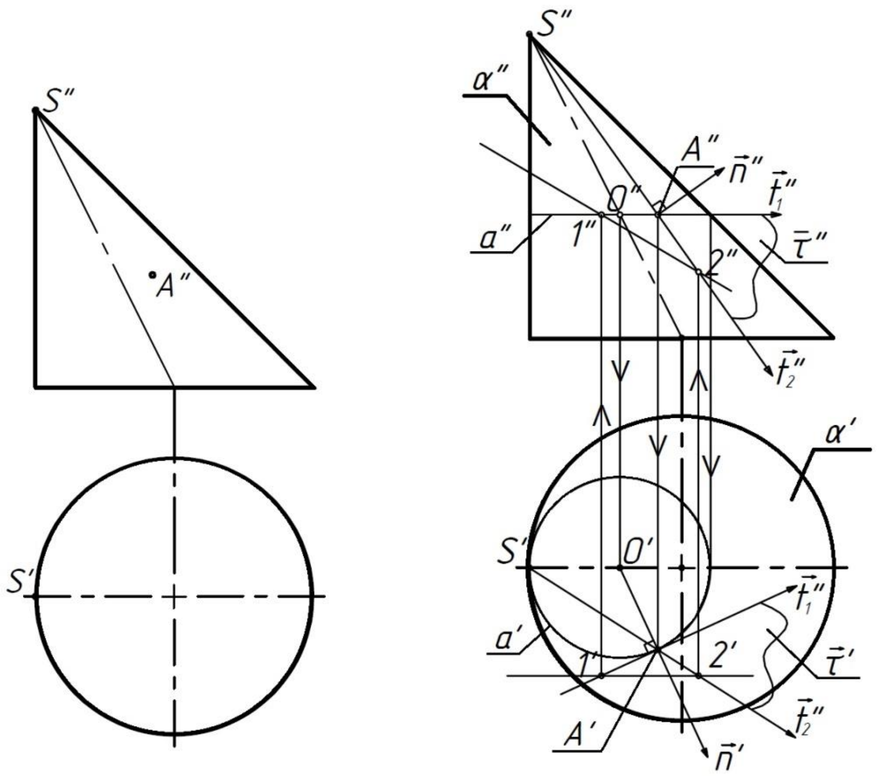

Рис. 5

Решение:

1. Находим проекцию точки A: A □ a => A″ □ a″; A′ □ a′.
2. τ – касательная плоскость.

τ ∩ α = A.

τ (t_1 x t_2) = A.

t_1 и t_2 – касательные прямые.
$t_1 \cap a$, где а -окружность, а □ α.
t_2 – образующая конуса.
n ⊥ т=> n″⊥ f″т ; n′⊥ h′т, где n – нормаль к поверхности конуса α.
t_1≡hт (рис. 5).

Задача 5. Построить плоскость, касательную к конусу, расположенную параллельно прямой а.

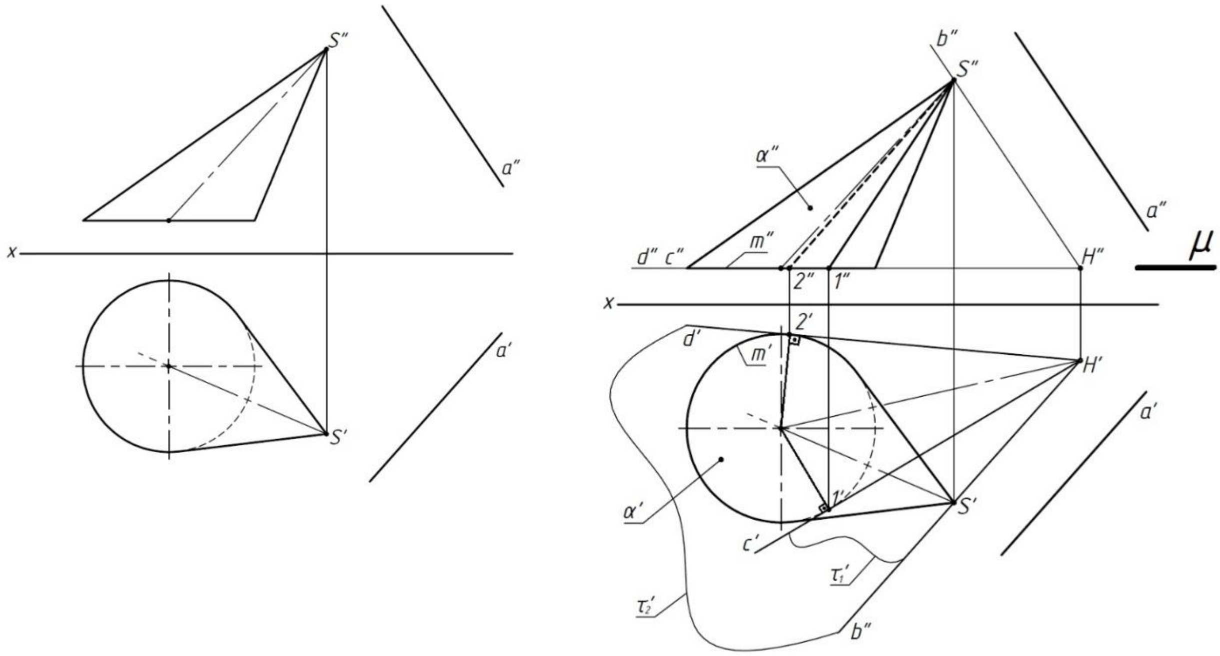

Рис. 6

Решение:
1. α – конус; m – основание.
2. S ∈ b; b||a.
3. μ||π1 – плоскость, на которой стоит конус α.

b ∩ μ = H.
c ⊆ m = 1; d ⊆ m = 2.

4. Имеем две касательные плоскости: т1 (c ∩ b) = H ит2 (d ∩ b) = H (рис. 6).

Для первичного закрепления теоретического материала следует рекомендовать для работы на семинаре или для самостоятельной работы студентов следующие задачи из курса аналитической геометрии.

1. По какой линии пересекается конус $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ с плоскостью *y = 2*?
2. Составить уравнение конической поверхности, вершиной которой служит точка М (0;0;1), а направляющей – эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, *z* = 3.
3. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющие которого заданы уравнениями: 1) *x = a*, $y^2 + z^2 = b^2$; 2) *y* = *b*, $x^2 + z^2 = a^2$

Таким образом, можно сделать вывод, что представленные в статье материалы могут быть использованы учащимися старших классов, студентами и преподавателями в образовательном процессе при изучении темы «Конические поверхности».

Ссылки на источники

1. Жирных Б. Г., Серегин В. И., Шарикян Ю. Э. Начертательная геометрия. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 166 с.
2. Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии: учеб. пособие / под ред. Ю. Б. Иванова. – М.: Наука, 2007. – 272 с.
3. Иванов Г. С. Начертательная геометрия: учеб. – М.: ГОУ ВПО МГУЛ, 2008. – 224 с.
4. Фролов С. А. Начертательная геометрия: учеб. – М.: ИНФРА-М, 2007. – 286 с.
5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1: учеб. пособие для вузов. – М.: ООО «Издательство «Мир и образование», 2003. – 304 с.

Tatiana Beloborodova,
Senior Lecturer, Engineering Graphics Chair, Moscow Sate Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
tl.beloborodova@yandex.ru
Tatiana Murashkina,
Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Engineering Graphics Chair, Moscow Sate Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
murashkinat@yandex.ru
Alexandra Petrunicheva,
Student, Moscow Sate Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
alexandrapetrunicheva@gmail.com

Methods of teaching the topic "Conical surfaces" at mathematics and descriptive geometry classes

Abstract. The relevance of the work is due to the fact that conical surfaces are one of the main types of surfaces on which all constructions in geometry and engineering graphics are based. Students learn the concept of "cone" in high school, but they study it in more detail only when they enter technical universities. Conical surfaces play an important role in human life. Roofs of buildings, architectural structures and technical facilities are designed on the basis of these surfaces. This article describes such concepts as conical surfaces, cones, their basic properties and construction features. This article may be interesting for high school students, first and second year students of technical universities, and teachers of descriptive geometry and mathematics.

Key words: cone, conical surfaces, conic section, diagrams, teaching at the undergraduate levels of a technical university, teaching analytical geometry, teaching descriptive geometry.

References

1. Zhirnyh, B. G., Seregin, V. I. & Sharikyan, Yu. Eh. (2017). *Nachertatel'naya geometriya*, Izd-vo MGTU im. N. Eh. Baumana, Moscow, 166 p.
2. Gordon, V. O. & Semencov-Ogievskij, M. A. (2007). *Kurs nachertatel'noj geometrii: ucheb. posobie*, Nauka, Moscow, 272 p.
3. Ivanov, G. S. (2008). *Nachertatel'naya geometriya: ucheb*., GOU VPO MGUL, Moscow, 224 p.
4. Frolov, S. A. (2007). *Nachertatel'naya geometriya: ucheb*., Moscow INFRA-M, 286 p.
5. Danko, P. E. (2003). *Vysshaya matematika v uprazhneniyah i zadachah: v 2 ch. Cp. 1: ucheb. posobie dlya vuzov,* OOO “Izdatel'stvo “Mir i obrazovanie”, Moscow, 304 p.

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	07.12.18	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	20.01.19
Принята к публикации *Accepted for publication*	20.01.19	Опубликована *Published*	31.03.19

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru