ART 196018 **УДК 378.147**

Попова Елена Михайловна,
доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
elmipo@yandex.ru

Косова Анна Владимировна,
старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
Anna.v.kosova@mail.ru

Методические особенности изложения темы «Решение задачи Коши методом включения начальных условий в мгновенно действующие источники»

Аннотация. *В статье предложена методика изложения темы «Решение задачи Коши методом включения начальных условий в мгновенно действующие источники» в курсе уравнений математической физики. При этом задача Коши рассматривается в обобщенной постановке, что позволяет избавиться от громоздких вычислений, которые появляются при ненулевых начальных условиях и отвлекают от сути проблемы. В статье приведен метод решения задачи Коши, основанный на использовании фундаментального решения. Статья написана на основе большого опыта преподавания уравнений математической физики и будет полезна студентам приборостроительных специальностей, а также преподавателям соответствующих курсов.*

Ключевые слова: *фундаментальное решение оператора, метод включения начальных условий в мгновенно действующие источники.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Очень часто в курсах «Интегральные преобразования и уравнения математической физики» в технических вузах избегают использования обобщенных функций и решают задачу Коши операционным методом в классической постановке. Это громоздко, если начальные условия ненулевые. Гораздо удобнее рассматривать задачу Коши в обобщенной постановке и включать начальные условия в мгновенно действующие источники при $t=0$. Теория обобщенных функций – это основной язык современной математической физики, электродинамики, квантовой механики и пр. Известно, что строгое изложение теории обобщенных функций вызывает у студентов второго курса немалые затруднения. В [1] предложена методика строгого изложения теории обобщенных функций, доступная студентам инженерных специальностей младших курсов. В ней сначала будет рассмотрено понятие фундаментального решения линейного дифференциального оператора. Затем с помощью фундаментального решения будет решена задача Коши методом включения начальных условий в мгновенно действующие источники.

Введем обозначения, а также напомним определения и факты (см. [2–5]), которые будут использованы в настоящей статье.

Символом $C^m(R)$ обозначим множество функций, непрерывных вместе со своими производными $\dfrac{d^k f(t)}{dt^k}, 0\le k\le m<\infty$. Класс функций, принадлежащих $C^m(R)$ при любых m, т. е. класс бесконечно дифференцируемых функций, обозначим $C^m(R)$.

Функция $\varphi(t): R \to R$ называется финитной, если существует такой отрезок $\left[a_\varphi, b_\varphi\right]$, что $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \notin \left[a_\varphi, b_\varphi\right]$.

Множество всех финитных бесконечно дифференцируемых функций называется пространством основных функций и обозначается $D(R)$.

Итак, $D(R) = \{\varphi \in C^m(R) | \varphi(t) \equiv 0, \forall t \in [a_\varphi, b_\varphi]\}$.

Множество всех линейных непрерывных функционалов (см. [6–9]) на $D(R)$ называется пространством обобщенных функций и обозначается $D'(R)$.

Если функция $f \in D'(R)$, то ее обобщенная производная – это элемент $f' \in D'(R)$, определяемый по формуле $(f', \varphi) = -(f, \varphi')$, для любой $\varphi \in D(R)$.

Любая обобщенная функция $f \in D'(R)$ является бесконечно дифференцируемой в обобщенном смысле, и ее n-я производная $f^{(n)}$ определяется по формуле $(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)})$ для любой $\varphi \in D(R)$.

Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора

Дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$Lu(t) = f(t), \tag{1}$$

где $f \in D'(R)$ а $L = \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_0$ – линейный дифференциальный оператор.

Начнем с некоторых наводящих соображений. Предположим, что у оператора L существует обратный оператор L^{-1}. Применяя обратный оператор к левой и правой частям уравнения (1), получаем:

$$L^{-1}Lu(t) = L^{-1} f(t),$$

что эквивалентно равенству

$$u(t) = L^{-1} f(t). \tag{2}$$

Действие, обратное дифференцированию, – это интегрирование. Поэтому будем искать обратный оператор в виде

$$L^{-1} f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, y) f(y) dy, \tag{3}$$

где $G(t, y)$ называется ядром интегрального оператора.

Применим к обеим частям (2) оператор L. Тогда, учитывая, что оператор L применяется по переменной t, можно занести оператор под знак интеграла:

$$Lu(t) = L(L^{-1} f(t) = L\int_{-\infty}^{+\infty} G(t, y) f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} LG(t, y) f(y) dy. \tag{4}$$

Из (1) и (4) получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} LG(t, y) f(y) dy = f(t). \tag{5}$$

По определению δ – функции (см. [10–13])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-y) f(y) dy = f(t). \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6), получаем:

$$LG(t, y) = \delta(t-y). \tag{7}$$

Решение уравнения (7) называют фундаментальным решением оператора L, или функцией Грина, функцией источника, функцией влияния.

Итак, функция Грина является решением уравнения (7), в котором правая часть $\delta(t-y)$ – это результат точечного возмущения, сосредоточенного в точке t. Физический смысл функции $G(t,y)$ состоит в том, что она является откликом на это точечное возмущение.

Часто $G(t,y)$ зависит только от разности $t-y$, то есть $G(t,y)=\varepsilon(t-y)$. В этом случае формула (7) упрощается:

$$L\varepsilon(z)=\delta(z),$$

где $z=t-y$, и определение фундаментального решения можно дать следующим образом.

Определение 1. Фундаментальным решением оператора L называется любая обобщенная функция $\varepsilon \in D'(R)$, удовлетворяющая на R уравнению $L\varepsilon=\delta$, то есть для любой $\varepsilon \in D'(R)$ и любого $\varphi \in D(R)$ верно

$$(L\varepsilon,\varphi)=(\delta,\varphi). \tag{8}$$

Замечание. Если ε – фундаментальное решение оператора L, а u_0 – решение однородного уравнения $Lu=0$, то $\varepsilon+u_0$ – тоже фундаментальное решение оператора L.

В самом деле, в силу линейности оператора L, получим:

$$L(\varepsilon+u_0)=L\varepsilon+Lu_0=\delta+0=\delta.$$

Пример 1. Найдем фундаментальное решение оператора $L=\frac{d}{dt}+a$, где $a-const$.

Для этого надо решить уравнение $L\varepsilon=\delta$, то есть $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}+a\varepsilon(t)=\delta(t)$.

Воспользуемся методами операционного исчисления для обобщенных функций (см. [14–16]). Изображение $\varepsilon(t)$ обозначим $E(p)$. Известно, что изображение $\frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial t}$ равно $pE(p)$, а изображение $\delta(t)$ равно 1. Тогда в силу теоремы линейности, получаем:

$$pE(p)+aE(p)=1,$$

откуда

$$E(p)=\frac{1}{p+a}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем:

$$\varepsilon(t)=e^{-at}\eta(t).$$

С помощью фундаментального решения оператора L можно решить уравнение $Lu=f$.

Теорема Дюамеля. Пусть $\varepsilon(t)$ – фундаментальное решение оператора L, т. е. $\varepsilon(t)$ – решение уравнения $L\varepsilon=\delta$. Пусть функция f такова, что $\varepsilon * f \in D'(R)$. Тогда решение уравнения $Lu=f$ единственно в классе обобщенных функций $D'(R)$ и может быть представлено в виде

$$u=\varepsilon * f. \tag{9}$$

Доказательство: проверим, что $u=\varepsilon * f$ является решением уравнения $Lu=f$. Учитывая свойство линейности и дифференцирования свертки и что $\delta * f=f$ (см. [17, 18]), получаем:

$$Lu=L(\varepsilon * f)=L\varepsilon * f=\delta * f=f.$$

Покажем, что других решений у уравнения $Lu=f$ нет. Если u_1, u_2 – различные решения уравнения $Lu=f$, то $u=u_1-u_2$ есть решение уравнения $Lu=0$. Действительно,

$$Lu=Lu_1-Lu_2=f-f=0.$$

Покажем, что $u \equiv 0$. Имеем:

$$u = u * \delta = u * L\varepsilon = Lu * \varepsilon = 0 * \varepsilon = 0.$$

Замечание (физический смысл формулы (9)). Правая часть уравнения $Lu = f$, т. е. источник $f(t)$, может быть представлена в виде

$$f(t) = (f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\delta(t-z)dz,$$

где интеграл – это суперпозиция точечных источников вида $f(z)\delta(t-z)$. Каждый точечный источник $f(z)\delta(t-z)$ определяет возмущение вида $f(z)\varepsilon(t-z)$. Поэтому решение $u = f * \varepsilon$ – это суперпозиция всех возмущений.

Решение задачи Коши методом включения начальных условий в мгновенно действующие источники

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор L, действующий на функции $u(t)$ следующим образом:

$$L(u(t)) = u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}u'(t) + a_n u(t). \quad (10)$$

Будем решать задачу Коши:

$$\begin{cases} Lu(t) = f(t) & (11) \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, ..., u^{(n-1)}(0) = u_{n-1} & (12) \end{cases}$$

Задача Коши (11) – (12) рассматривается в классической постановке, то есть мы рассматриваем уравнение (и все функции, которые в него входят) при $t \ge 0$.

Для обобщенного решения и уравнения $Lu = f$ на всей оси, т. е. при $t \in (-\infty, +\infty)$, как было показано, справедлива формула $u = f * \varepsilon$, где ε – фундаментальное решение оператора L.

Сведем классическую задачу Коши (11)–(12) на полуоси $t \ge 0$ к обобщенной задаче Коши, заданной при $t \in (-\infty, +\infty)$. Для этого продолжим $u(t)$ и $f(t)$ нулем при $t < 0$, т. е. будем считать, что $u(t)$ и $f(t)$ оригиналы ([19, 20]), и рассмотрим уравнение $Lu = f$ на всей оси.

Далее будем считать, что $u(t)$ и $f(t)$ – это регулярные обобщенные функции ([21, 22]). Так как $u(t)$ удовлетворяет начальным условиям (12), то она имеет в точке $t = 0$ разрыв первого рода. Величина скачка равна u_0, и обобщенная производная функции $u(t)$ (см. [23–26]) равна $u_{об}{}'(t) = u_{кл}{}'(t) + u_o\delta(t)$.

Аналогично,

$$u_{об}{}''(t) = u_{кл}{}''(t) + u_o\delta'(t) + u_1\delta(t)$$

$$...$$

$$u_{об}{}^{(n-1)}(t) = u_{кл}{}^{(n-1)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} u_k \delta^{(n-1-k)}(t).$$

Рассмотрим $L_{об}[u(t)] = u_{об}{}^{(n)}(t) + a_1 u_{об}^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}u'_{об}(t) + a_n u(t) = L[u(t)] + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(n-1-k)}(t)$,

где

$$c_{n-1} = u_0$$

$$c_{n-2} = a_1 u_0 + u_1$$

$$...$$

$$c_0 = a_{n-1}u_0 + ... + a_1 u_{n-2} + u_{n-1}.$$

Так как $Lu(t) = f(t)$, то классической задаче Коши

$$\begin{cases} Lu = f, t \ge 0 \\ u^{(k)}(0) = u_k, k = 0,\ldots,n-1 \end{cases}$$

соответствует обобщенная задача

$$L_{об}\left[u(t)\right] = f + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(n-1-k)}, t \in (-\infty, +\infty). \quad (13)$$

Решение обобщенного уравнения (13) можно получить, найдя фундаментальное решение ε оператора L и воспользовавшись формулой Дюамеля

$$u = \varepsilon * (f + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(n-1-k)}).$$

Пример 2. Найдем решение задачи Коши

$$\begin{cases} u'' + u' = 1 \\ u(0) = 1, u'(0) = 1 \end{cases}$$

методом включения начальных условий в мгновенно действующие источники с помощью теоремы Дюамеля.

Решение. Найдем фундаментальное решение оператора $L = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt}$ методами операционного исчисления

$$L\varepsilon = \delta, \Longrightarrow p^2E(p) + pE(p) = 1, \Longrightarrow E(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \doteqdot \eta(t) - e^{-t}\eta(t).$$

Таким образом, фундаментальное решение оператора $L = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt}$ имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \eta(t)(1 - e^{-t}).$$

Далее перейдем от классической постановки задачи Коши к обобщенной постановке методом включения

$$\begin{aligned} u'_{об} &= u'_{кл} + 1\cdot\delta \\ u''_{об} &= u''_{кл} + 1\cdot\delta' + \delta \end{aligned}.$$

Обобщенная задача будет иметь вид:

$$L_{об}(u) = u''_{об} + u'_{об} = u''_{кл} + 1\cdot\delta' + \delta + u'_{кл} + 1\cdot\delta = \eta + 2\delta + \delta'.$$

Следовательно, $u = \varepsilon * (\eta + 2\delta + \delta')$.

Из свойств свертки и дельта-функции Дирака вытекает, что

$$(f*g)' = f'*g = f*g', \ f*\delta = f, \eta' = \delta.$$

Поэтому

$$u = \varepsilon*\eta + 2\varepsilon*\delta + \varepsilon*\delta' = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\tau)(1-e^{-\tau})\eta(t-\tau)d\tau + 2\eta(t)(1-e^{-t}) + (\eta(t)(1-e^{-t}))' =$$

$$= (t + e^{-t} - 1)\eta(t) + 2\eta(t)(1 - e^{-t}) + \eta'(t)(1 - e^{-t}) + \eta(t)e^{-t} =$$
$$= (t+1)\eta(t),$$

так как $\eta'(t)(1-e^{-t}) = \delta(t)(1-e^{-t}) = 0.$

Итак, $u(t) = (t+1)\eta(t)$.

Методика, положенная в основу данной работы, позволяет сформировать навыки решения задачи Коши в обобщенной постановке, что дает возможность избавиться от больших вычислений. Теоретический материал носит справочный характер и помогает преподавателям и студентам при подготовке к занятиям.

Ссылки на источники

1. Попова Е. М., Чигирева О. Ю. Обобщенные функции. Обобщенные производные. Дельта-функция Дирака // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V7. – С. 54–62. – URL: http://e-koncept.ru/2018/186062.htm.
2. Бутко Я. А. Элементы функционального анализа и методы математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988.
4. Лошкарев А. И., Облакова Т. В. Фундаментальное решение дифференциального оператора и задачи Коши. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006.
5. Попова Е. М., Чигирева О. Ю. Указ. соч.
6. Бутко Я. А. Указ. соч.
7. Владимиров В. С. Указ. соч.
8. Лошкарев А. И., Облакова Т. В. Указ. соч.
9. Попова Е. М., Чигирева О. Ю. Указ. соч.
10. Бутко Я. А. Указ. соч.
11. Владимиров В. С. Указ. соч.
12. Лошкарев А. И., Облакова Т. В. Указ. соч.
13. Попова Е. М., Чигирева О. Ю. Указ. соч.
14. Бутко Я. А. Указ. соч.
15. Владимиров В. С. Указ. соч.
16. Лошкарев А. И., Облакова Т. В. Указ. соч.
17. Владимиров В. С. Указ. соч.
18. Лошкарев А. И., Облакова Т. В. Указ. соч.
19. Владимиров В. С. Указ. соч.
20. Лошкарев А. И., Облакова Т. В. Указ. соч.
21. Владимиров В. С. Указ. соч.
22. Лошкарев А. И., Облакова Т. В. Указ. соч.
23. Бутко Я. А. Указ. соч.
24. Владимиров В. С. Указ. соч.
25. Лошкарев А. И., Облакова Т. В. Указ. соч.
26. Попова Е. М., Чигирева О. Ю. Указ. соч.

Elena Popova,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
elmipo@yandex.ru
Anna Kosova,
Senior Lecturer, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
Anna.v.kosova@mail.ru

Methodological features of the presentation of the topic “Solution of the Cauchy problem by method of incorporating initial conditions into instantaneous sources”

Abstract. This article proposes a method for presenting the topic “Solution of the Cauchy problem by method of incorporating initial conditions into instantaneous sources” in the course of mathematical physics equations. The Cauchy problem is considered in a generalized formulation, which allows us to get rid of cumbersome calculations that appear under nonzero initial conditions and distract from the essence of the problem. This article presents a method for solving the Cauchy problem, based on the use of a fundamental solution. The article is based on a wide experience in teaching mathematical physics equations and may be useful for students of instrument-making specialties, as well as for teachers of relevant courses.

Key words: fundamental solution of the operator, method of incorporating initial conditions into instantaneous sources.

References

1. Popova, E. M. & Chigireva, O. Yu. (2018). “Obobshchennye funkcii. Obobshchennye proizvodnye. Del'ta-funkciya Diraka”, *Nauchno-metodicheskij ehlektronnyj zhurnal “Koncept”,* № V7, pp. 54–62. Available at: http://e-koncept.ru/2018/186062.htm (in Russian).

2. Butko, Ya. A. (2011). *Ehlementy funkcional'nogo analiza i metody matematicheskoj fiziki*, Izd-vo MGTU im. N. Eh. Baumana, Moscow (in Russian).
3. Vladimirov, V. S. (1988). *Uravneniya matematicheskoj fiziki*, Nauka, Moscow (in Russian).
4. Loshkarev A. I. & Oblakova T. V. (2006). *Fundamental'noe reshenie differencial'nogo operatora i zadachi Koshi,* Izd-vo MGTU im. N. Eh. Baumana, Moscow (in Russian).
5. Popova, E. M. & Chigireva, O. Yu. (2018). Op. cit.
6. Butko, Ya. A. (2011). Op. cit.
7. Vladimirov, V. S. (1988). Op. cit.
8. Loshkarev A. I. & Oblakova T. V. (2006). Op. cit.
9. Popova, E. M. & Chigireva, O. Yu. (2018). Op. cit.
10. Butko, Ya. A. (2011). Op. cit.
11. Vladimirov, V. S. (1988). Op. cit.
12. Loshkarev A. I. & Oblakova T. V. (2006). Op. cit.
13. Popova, E. M. & Chigireva, O. Yu. (2018). Op. cit.
14. Butko, Ya. A. (2011). Op. cit.
15. Vladimirov, V. S. (1988). Op. cit.
16. Loshkarev A. I. & Oblakova T. V. (2006). Op. cit.
17. Vladimirov, V. S. (1988). Op. cit.
18. Loshkarev A. I. & Oblakova T. V. (2006). Op. cit.
19. Vladimirov, V. S. (1988). Op. cit.
20. Loshkarev A. I. & Oblakova T. V. (2006). Op. cit.
21. Vladimirov, V. S. (1988). Op. cit.
22. Loshkarev A. I. & Oblakova T. V. (2006). Op. cit.
23. Butko, Ya. A. (2011). Op. cit.
24. Vladimirov, V. S. (1988). Op. cit.
25. Loshkarev A. I. & Oblakova T. V. (2006). Op. cit.
27. Popova, E. M. & Chigireva, O. Yu. (2018). Op. cit.

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	17.11.18	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	20.01.19
Принята к публикации *Accepted for publication*	20.01.19	Опубликована *Published*	31.03.19

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru