ISSN 2304-120X
Концепт
научно-методический электронный журнал

Вергазова О. Б., Хасанов Н. А. Методические особенности организации работы студентов по теме «Исследование числовых рядов на сходимость» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2019. – № V6. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2019/196051.htm.

ART 196051 УДК 378.147

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент кафедры математического моделирования ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga.aika@yandex.ru

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Методические особенности организации работы студентов по теме «Исследование числовых рядов на сходимость»

Аннотация. *С целью повышения уровня математической подготовки студентов технических специальностей необходимо особое внимание уделять тем вопросам математики, без прочного знания которых невозможно успешное обучение в высшем учебном заведении. В данной статье на примере организации работы студентов по решению задач по теме «Исследование числовых рядов на сходимость» демонстрируются особенности аудиторного или самостоятельного изучения данного вопроса. Содержание статьи представляет интерес для преподавателей и студентов специальностей технического или математического направления.*
Ключевые слова: *высшая математика, числовой ряд, аудиторная работа студентов, внеаудиторная работа студентов.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Одним из важных навыков для студента технического профиля, приобретаемых в процессе изучения высшей математики, является навык решения задачи исследования числовых и функциональных рядов на сходимость. Изучение данного вопроса отражает идеи системно-деятельностного подхода в освоении курса высшей математики. Данный раздел предоставляет хороший материал для совершенствования навыка работы с теоретическим материалом. Отдельные вопросы темы «Исследование числовых рядов на сходимость» могут быть предложены студентам для внеаудиторного изучения. Такая самостоятельная работа студентов обязательно сопровождается контролем качества приобретенных знаний, умений и навыков.

Перед изучением данного вопроса преподаватель организует подготовительную работу аудиторного или внеаудиторного характера по активизации знаний ранее изученных вопросов, необходимых для успешного освоения данной темы. Необходимо повторить основные методы вычисления пределов, четко различать необходимые и достаточные признаки. В результате подготовительной работы студент должен знать следующие определения и теоремы: числовой ряд, сумма ряда, формула n-го члена ряда, необходимый признак сходимости числового ряда, достаточные признаки сходимости рядов. Теоретический материал, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения преподаватель может разместить на своем сайте, персональной странице официального сайта вуза или воспользоваться средствами любой современной виртуальной обучающей среды (например, Moodle).

ISSN 2304-120X
Концепт. Научно-методический электронный журнал
Вергазова О. Б., Хасанов Н. А. Методические особенности организации работы студентов по теме «Исследование числовых рядов на сходимость» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2019. – № V6. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2019/196051.htm.

В качестве подготовительной работы можно рекомендовать работу с вопросами по теоретическому материалу (задача 1).

Задача 1

Дан ряд $\sum a_n$. Укажите, какие из следующих утверждений верны:

1) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то о сходимости ряда ничего определенного сказать нельзя.
2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.
3) Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
4) Если ряд расходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.
5) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Затем необходимо обсудить со студентами алгоритм (схему) исследования числового знакоположительного ряда на сходимость. Такую схему в качестве наглядного пособия можно использовать в виде слайда или раздаточного материала (рис. 1).

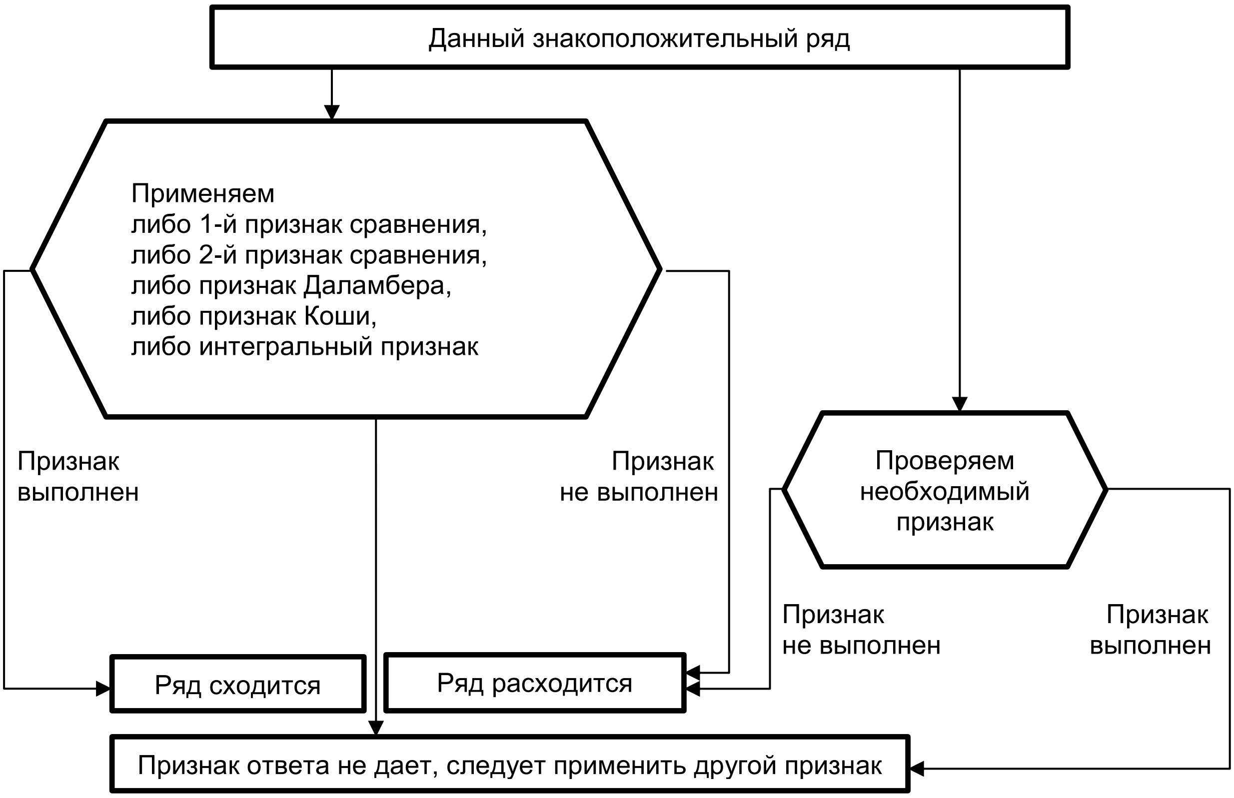

Рис. 1. Общая схема числового знакоположительного ряда на сходимость [1]

Начинать исследование ряда на сходимость удобно с необходимого признака (в тех случаях, где это сделать нетрудно). В этом случае ход рассуждений выглядит следующим образом.

Схема исследования:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \rightarrow$ ряд расходится.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \rightarrow$ нельзя сделать вывод о сходимости ряда. Нужно продолжить исследование с помощью достаточных признаков сходимости.

Пример 1

Выяснить, сходится или расходится ряд $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\frac{4}{7}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{n}{n+3}+\cdots$.

Проверим выполнение необходимого признака: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n}} = 1 \neq 0$. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+3}$ расходится.

Ответ: ряд расходится.

Задача 2

Доказать расходимость следующих рядов, используя необходимое условие сходимости. Для выполнения данного задания необходимо повторить некоторые приемы вычисления предела функции.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} cos\frac{1}{n^3}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+3}}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^3}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ln(n+1)}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)arctg\frac{1}{n+2}$;
6) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{3n+1}$;
7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}$;
8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ [2–4].

Далее необходимо показать студентам на примерах решения задач ход рассуждений при исследовании числовых рядов на сходимость и рекомендовать решить предложенные задачи самостоятельно с целью формирования и развития навыка применения признаков сходимости. Обычно начинают такую работу с применения признаков сравнения.

Пример 2

Рассмотрим знакоположительный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{ln\,n}$.

В качестве достаточного признака применим первый признак сравнения.

При $n \geq 2$ $\ln n < n$. Тогда справедливо неравенство для обратных положительных величин $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$.

Возьмем за эталонный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ (гармонический ряд), который расходится. Если эталонный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то и ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Ответ: ряд расходится.

Для самостоятельного исследования студентам рекомендуется решить задачу 3.

Задача 3

Исследовать ряд на сходимость, применив признаки сравнения:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{5^n+1}$ [5–7].

Рассмотрим примеры и задачи на применение признаков Даламбера и Коши.

Пример 3

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots2n}\cdot\frac{1}{n\cdot3^{n+1}}$. Применим признак Даламбера.

Имеем $a_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots2n}\cdot\frac{1}{n\cdot3^{n+1}}$, $a_{n+1} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots2n(2n+2)}\cdot\frac{1}{(n+1)\cdot3^{n+2}}$. Вычислим предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot n\cdot 3^{n+1}}{(2n+2)(n+1)\cdot3^{n+2}} = \frac{1}{3}.\ \frac{1}{3} < 1$, значит, данный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Пример 4

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n+1})^n$. По признаку Коши $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n}{3n+1})^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1$. Таким образом, ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Для самостоятельного решения студентам рекомендуется выполнить задачи 4 и 5.

Задача 4

Исследовать ряд на сходимость, применив признак Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots2n}\cdot\frac{1}{n\cdot3^{n+1}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}}$ [8–10].

Задача 5

Исследовать ряд на сходимость, применив признак Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n+1})^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ [11–13].

Для работы с интегральным признаком студенты должны самостоятельно повторить таблицу ранее изученных интегралов и основные методы вычисления интегралов.

Пример 5

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ ln\ n}$ с помощью интегрального признака. Необходимый признак выполнен: $\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ ln\ n} = 0$. Члены ряда монотонно убывают при $n \geq 2$: $\frac{1}{n\ln n} > \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Применим интегральный признак, рассмотрим интеграл: $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ lnx} = ln\left|lnx\right|\Big|_2^{+\infty} = +\infty$. Интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ lnx}$ расходится, следовательно, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ ln\ n}$ расходится.

Ответ: ряд расходится.

Задача 6

Исследовать ряд на сходимость, применив интегральный признак:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где $0 < p < 1$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}(\ln n)^k}$ [14–16].

Для исследования на сходимость знакочередующихся рядов ход рассуждений можно продемонстрировать студентам на примере схемы, изображенной на рис. 2.

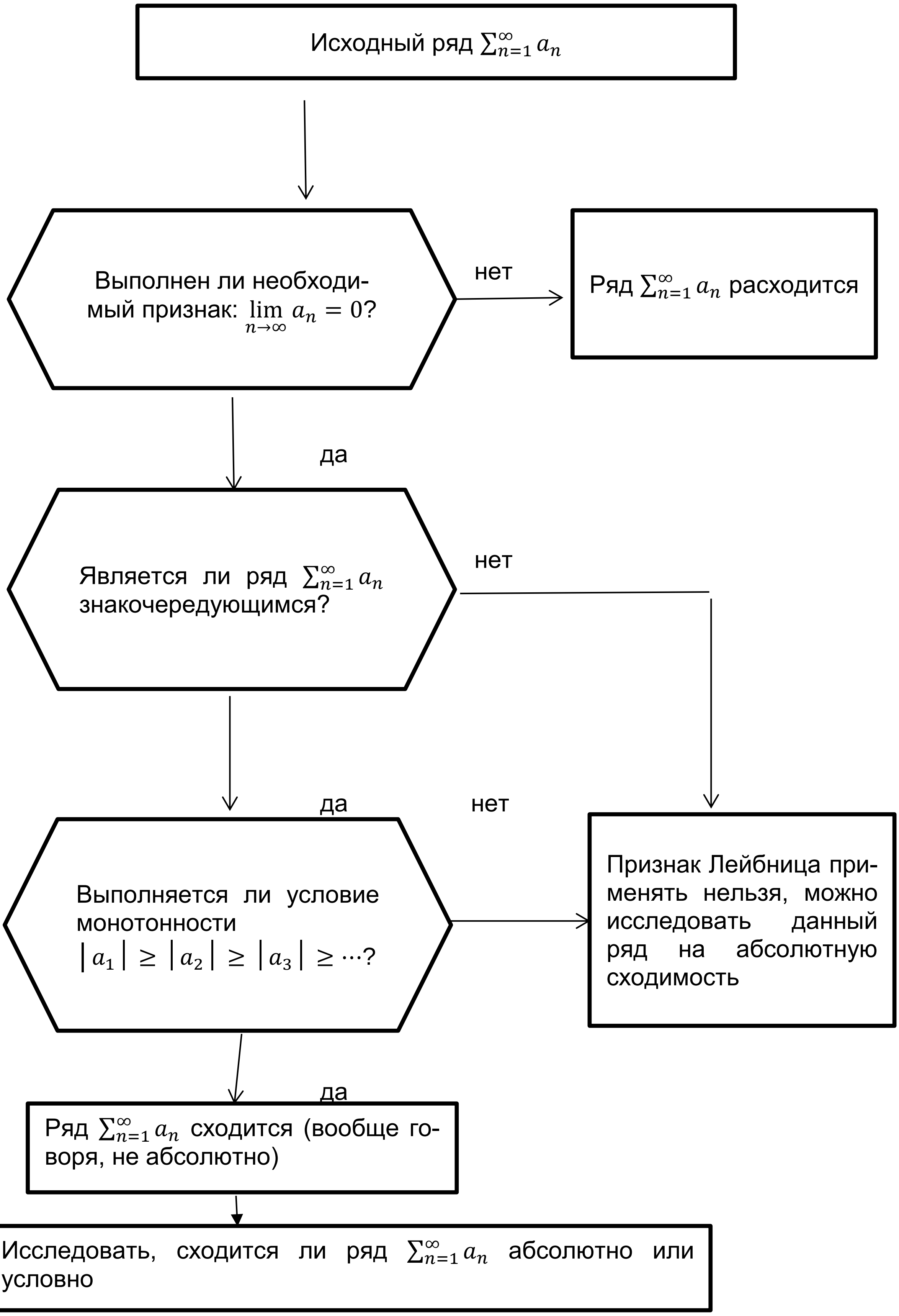

Рис. 2. Схема исследования знакочередующегося ряда на сходимость с помощью признака Лейбница [17]

Для исследования знакочередующегося ряда на сходимость можно предложить следующие примеры для демонстрации хода рассуждений и задачи для самостоятельного решения.

Пример 6

Исследуем на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$. Составим ряд из абсолютных величин: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Получим геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится. Значит, исходный ряд сходится абсолютно.

Ответ: ряд сходится абсолютно.

Пример 7

Исследуем на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+3}$. Проверим необходимый признак: $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})}=0$. Необходимый признак выполнен. Выясним, выполнено ли для данного знакочередующегося ряда условие монотонности: $|a_n| \geq |a_{n+1}|$, $\frac{n+1}{n^2+3}\geq\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+3}$, $\frac{n+1}{n^2+3}-\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+3}=\frac{n^2+3n-2}{(n^2+3)((n+1)^2+3)}>0$ при $n\geq 1$. Таким образом, условие монотонности выполнено. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+3}$ сходится по признаку Лейбница. Далее необходимо выяснить, абсолютно или условно сходится ряд. Нетрудно установить, например, по интегральному признаку, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+3}$ расходится.

Ответ: ряд сходится условно.

Задача 7

Исследовать сходимость знакочередующихся рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+1}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+3}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n-2}{3n-1}$ [18–20].

В работе с такого рода схемами-алгоритмами следует придерживаться дифференцированного подхода: в зависимости от уровня успеваемости студентов (низкий, средний, высокий) можно организовывать работу по готовым схемам по всем вопросам темы (низкий уровень) или по отдельным вопросам в качестве примера (средний и высокий уровни). Кроме того, при подготовке студентов к экзамену работа с данными схемами и примерами решения задач позволит быстро восстановить нужные навыки.

Таким образом, при изучении темы «Исследование числовых рядов на сходимость» аудиторная и внеаудиторная деятельность студентов может быть организована с учетом особенностей данного учебного вопроса. Алгоритмичность, наглядные схемы-алгоритмы для рассуждений, указания по решению задач, система упражнений для самостоятельной работы позволяют студентам в сжатые сроки успешно усвоить данный учебный материал [21–23].

Ссылки на источники

1. Голенко К. А., Хереско Т. А., Щетинина Н. Н. Методические указания для подготовки к контрольным работам по курсу высшей математики. – М.: Изд-во МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1986. – 36 с.
2. Там же.
3. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 2. – М.: Изд. «Мир и Образование», 2002. – 416 с.
4. Власова Е. А. Ряды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 612 с.
5. Голенко К. А., Хереско Т. А., Щетинина Н. Н. Указ. соч.

6. Данко П. Е. Указ. соч.
7. Власова Е. А. Указ. соч.
8. Данко П. Е. Указ. соч.
9. Власова Е. А. Указ. соч.
10. Малыгина О. А. Изучение математического анализа на основе системно-деятельностного подхода. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 416 с.
11. Голенко К. А., Хереско Т. А., Щетинина Н. Н. Указ. соч.
12. Данко П. Е. Указ. соч.
13. Власова Е. А. Указ. соч.
14. Голенко К. А., Хереско Т. А., Щетинина Н. Н. Указ. соч.
15. Данко П. Е. Указ. соч.
16. Власова Е. А. Указ. соч.
17. Голенко К. А., Хереско Т. А., Щетинина Н. Н. Указ. соч.
18. Там же.
19. Данко П. Е. Указ. соч.
20. Власова Е. А. Указ. соч.
21. Данко П. Е. Указ. соч.
22. Власова Е. А. Указ. соч.
23. Малыгина О. А. Указ. соч.

Olga Vergazova,
Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Mathematical Modelling Chair, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
olga.aika@yandex.ru
Nail Khasanov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Mathematical Modelling Chair, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
nail_khasanov@mail.ru

Methods of students' work organization to learn the topic "Research of numerical series for convergence"

Abstract. In order to improve the level of mathematical training of engineering majors, it is necessary to pay special attention to those mathematical issues, without solid knowledge of which successful learning in a university is impossible. This article demonstrates methods of organizing classroom or independent students' work by the example of solving tasks on the topic "Research of numerical series for convergence". The article may be interesting to teachers as well as Mathematics and Engineering majors.

Key words: higher mathematics, number series, classroom work of students, extracurricular work of students.

References

1. Golenko, K. A., Heresko, T. A. & Shchetinina, N. N. (1986). *Metodicheskie ukazaniya dlya podgotovki k kontrol'-nym rabotam po kursu vysshej matematiki*, Izd-vo MVTU im. N. E. Baumana, Moscow, 36 p. (in Russian).
2. Ibid.
3. Danko, P. E. (2002). Vysshaya matematika v uprazhneniyah i zadachah: v 2 ch. Ch. 2, Izd. "Mir i Obrazovanie", Moscow, 416 p. (in Russian).
4. Vlasova, E. A. (2002). *Ryady*, Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, Moscow, 612 p. (in Russian).
5. Golenko, K. A., Heresko, T. A. & Shchetinina, N. N. (1986). Op. cit.
6. Danko, P. E. (2002). Op. cit.
7. Vlasova, E. A. (2002). Op. cit.
8. Danko, P. E. (2002). Op. cit.
9. Vlasova, E. A. (2002). Op. cit.
10. Malygina, O. A. (2008). *Izuchenie matematicheskogo analiza na osnove sistemno-deyatel'nostnogo podhoda*, Izd-vo LKI, Moscow, 416 p. (in Russian).
11. Golenko, K. A., Heresko, T. A. & Shchetinina, N. N. (1986). Op. cit.
12. Danko, P. E. (2002). Op. cit.
13. Vlasova, E. A. (2002). Op. cit.
14. Golenko, K. A., Heresko, T. A. & Shchetinina, N. N. (1986). Op. cit.
15. Danko, P. E. (2002). Op. cit.
16. Vlasova, E. A. (2002). Op. cit.
17. Golenko, K. A., Heresko, T. A. & Shchetinina, N. N. (1986). Op. cit.

18. Ibid.
19. Danko, P. E. (2002). Op. cit.
20. Vlasova, E. A. (2002). Op. cit.
21. Danko, P. E. (2002). Op. cit.
22. Vlasova, E. A. (2002). Op. cit.
23. Malygina O. A. Op. cit.

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	15.03.19	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	20.04.19
Принята к публикации *Accepted for publication*	20.04.19	Опубликована *Published*	30.06.19

ISSN 2304-120X

www.e-koncept.ru