ISSN 2304-120X

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал

Попова Е. М., Чигирёва О. Ю. Методика изложения темы «Применение степенных рядов для приближенного вычисления определенных интегралов» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2019. – № V6. – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2019/196056.htm.

ART 196056 УДК 378.147

Попова Елена Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
elmipo@yandex.ru

Чигирёва Ольга Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
mkfn12@yandex.ru

Методика изложения темы «Применение степенных рядов для приближенного вычисления определенных интегралов»

Аннотация. *В статье предлагается методика изложения темы «Применение степенных рядов для приближенного вычисления определенных интегралов». Рассмотрен метод, позволяющий вычислять значения определенных интегралов, когда первообразная подынтегральной функции явно не выражается через элементарные функции. Приведены типовые задачи домашнего задания с подробно разобранными решениями. Содержание статьи будет полезно студентам, а также преподавателям соответствующих курсов.*
Ключевые слова: *степенной ряд, интервал сходимости, теорема Абеля, почленное интегрирование степенного ряда, ряд Маклорена.*
Раздел: *(01) отдельные вопросы сферы образования.*

Интегрирование как операция обратная дифференцированию используется практически во всех областях науки. Интеграл возникает при решении задач о нахождении длины кривой, площади поверхности, объема тела, массы кривой, поверхности, пространственного тела, при нахождении работы вектора вдоль кривой, потока вектора через поверхность и пр. Кроме того, многие специальные функции задаются с помощью интегралов. Метод интегральных преобразований (Фурье, Лапласа) широко используется при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, в математической физике, электродинамике, теории сигналов и цепей. Поэтому умение интегрировать является обязательным для выпускника технического университета.

Однако лишь малая доля интегралов, встречающихся на практике, выражаются через элементарные функции. Чаще всего проинтегрировать в элементарных функциях не удается. Одним из таких примеров является интеграл $\int e^{-x^2}dx$, который связан со специальными функциями, используемыми в теории вероятностей, статистической физике, теории теплопроводности и диффузии [1, 2]. Функции, связанные с интегралами вида $\int \cos x^2 dx$ и $\int \sin x^2 dx$, применяются в оптике и называются *интегралами Френеля*. В теории автоматического регулирования используют интегралы вида $\int \frac{e^x}{x}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ и $\int \frac{\cos x}{x}dx$, при помощи которых вводят специальные функции, называемые *интегральной показательной функцией, интегральным синусом и косинусом*. Также не удается представить через элементарные функции интегралы вида $\int \frac{\arcsin x}{x}dx$ и $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

В статье рассмотрен метод, позволяющий вычислять значения определенных интегралов, когда первообразная подынтегральной функции явно не выражается через элементарные функции [3].

Цель работы – помочь студентам приобрести навыки применения данного метода для решения прикладных задач.

Изучение данной темы требует определенного уровня подготовки. Авторы предполагают, что студенту известны основные понятия теории числовых рядов, и предлагают для контроля выполнить несложные задания по пройденному материалу. При возникновении затруднений все необходимые сведения можно найти в [4].

Рассмотренный в статье метод основан на разложении функций в ряд Маклорена и вычислении сумм числовых рядов с заданной точностью. Для успешного освоения студентами данной темы в работе представлен теоретический материал по теме «Степенные ряды» в объеме, необходимом для понимания данного метода: приведены основные определения и формулировки теорем, доказательства которых можно найти в [5]. Разложения основных функций в ряд Маклорена сведены в таблицу. Особое внимание уделено практической составляющей. В статье подробно разобраны типовые задачи домашнего задания, вызывающие наибольшие затруднения у студентов. Такой подход к изложению материала поможет студентам при самостоятельном изучении данной темы.

Задания на повторение темы «Числовые ряды»

Для повторения пройденного материала можно рекомендовать следующие теоретические вопросы и задачи на вычисление суммы числового ряда с заданной точностью.

1. Сформулируйте определение *числового ряда* и *n-й частичной суммы* числового ряда.
2. Какой числовой ряд называют: а) *сходящимся*; б) *расходящимся*? Что называют *суммой* числового ряда?
3. Дайте определение *n-го остатка* числового ряда и сформулируйте *свойства сходящихся числовых рядов*.
4. Какой числовой ряд называют *знакочередующимся*? Приведите формулировку *теоремы Лейбница* и следствие из нее.
5. При каких значениях q *геометрический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходится? Как вычислить сумму этого ряда?
6. При каких значениях p *ряд Дирихле* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится?
7. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ сходится, и вычислить значение его суммы с точностью до $\varepsilon = 0,01$.

Далее перейдем к изложению основных вопросов по теории степенных рядов.

Действительные степенные ряды

Определение. ***Действительным степенным рядом*** называют функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $x \in (-\infty, +\infty)$, где коэффициенты ряда a_n – действительные числа.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ сходится в некоторой точке $x = x_1 \neq x_0$, то он сходится абсолютно для всех x, таких, что $|x-x_0| < |x_1 - x_0|$. Если степенной ряд расходится в точке $x = x_2 \neq x_0$, то он расходится при любом x, для которого $|x-x_0| > |x_2 - x_0|$.

Следствие. Для каждого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ существует единственное число $R\ (0 \le R \le +\infty)$, такое, что данный ряд сходится абсолютно в интервале $(x_0 - R, x_0 + R) \subset (-\infty, +\infty)$ и расходится при $|x - x_0| > R, (R < +\infty)$.

Если $R = 0$, то степенной ряд сходится в единственной точке $x = x_0$; если $R = +\infty$, то степенной ряд сходится абсолютно на всей числовой прямой $x \in (-\infty, +\infty)$.

При этом число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ – ***интервалом сходимости*** данного ряда.

Замечание. Для нахождения области сходимости степенного ряда при $0 < R < +\infty$ необходимо дополнительное исследование поведения степенного ряда в граничных точках $x = x_0 \pm R$.

Далее приведем формулировки ***основных теорем о степенных рядах***.

Теорема 1. Если $R > 0$ – радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, то этот ряд сходится равномерно и абсолютно на любом отрезке, целиком лежащем в интервале сходимости.

Следствие. Сумма $S(x)$ степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ является непрерывной функцией в интервале сходимости.

Теорема 2 (о почленном дифференцировании степенного ряда). Сумма $S(x)$ степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ с радиусом сходимости $R > 0$ является бесконечно дифференцируемой функцией в интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$, причем

$$S^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) a_n (x-x_0)^{n-m}, m = 1, 2, \ldots,$$

где радиус сходимости ряда в правой части равенства также равен R.

Теорема 3 (о почленном интегрировании степенного ряда). Для всякого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ с суммой $S(x)$ и радиусом сходимости $R > 0$ справедливо равенство

$$\int_{x'}^{x''} S(y)dy = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_{x'}^{x''} (y - x_0)^n dy \right), \quad x', x'' \in (x_0 - R, x_0 + R),$$

причем радиус сходимости ряда справа также равен R.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные любого порядка. Тогда степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

называют ***рядом Тейлора*** функции $f(x)$ в точке x_0. При $x_0 = 0$ ряд Тейлора называют ***рядом Маклорена***.

Определение. ***Действительную функцию*** $f(x)$ действительного переменного называют ***аналитической*** в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и ее можно представить в этой окрестности некоторым сходящимся степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon), \varepsilon > 0.$$

Такое представление аналитической функции называют ее ***разложением в степенной ряд*** в окрестности точки x_0.

Следует отметить, что разложение аналитической функции в степенной ряд единственно и этим рядом является ее ряд Тейлора.

Один из способов разложения функций в степенные ряды основан на использовании представления основных функций в виде ряда Маклорена (см. таблицу).

Разложение основных функций в ряд Маклорена

Функция и ее разложение в ряд Маклорена	***Область сходимости степенного ряда***
1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$	$x \in (-\infty, +\infty)$
2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$	$x \in (-\infty, +\infty)$
3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$	$x \in (-\infty, +\infty)$
4. $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$	$x \in (-\infty, +\infty)$
5. $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$	$x \in (-\infty, +\infty)$
6. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$	$x \in (-1, 1]$
7. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n =$ $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots,$ $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{\mathbf{N} \cup \{0\}\}$	$\alpha > 0: \ x \in [-1, 1]$ $-1 < \alpha < 0: \ x \in (-1, 1]$ $\alpha \le -1: \ x \in (-1, 1)$
8. $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$	$x \in [-1, 1]$

Общая схема решения задачи о приближенном вычислении определенных интегралов с применением степенных рядов

Пусть требуется вычислить значение определенного интеграла с заданной точностью ε.

Этап 1. Предположим, что подынтегральная функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, а область интегрирования целиком содержится в интервале сходимости этого ряда. Применив теорему о почленном интегрировании степенного ряда, получим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$. В результате приходим к задаче о вычислении суммы S сходящегося числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ с заданной точностью ε.

Этап 2. Для приближенного вычисления суммы S с точностью ε найдем частичную сумму $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ с таким наименьшим номером n, для которого модуль суммы n-го остатка ряда не превышает заданной точности:

$$|S - S_n| = |R_n| < \varepsilon .$$

Если числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ является знакочередующимся и удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то согласно следствию из этой теоремы имеем

$$|R_n| \le c_{n+1} .$$

Если числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ является знакопостоянным, то для оценки R_n строят мажорирующую геометрическую прогрессию $\{b_1, b_1 q, b_1 q^2, \ldots\}$:

$$c_{n+k} < b_1 q^{k-1}, k \in \mathbf{N} ,$$

откуда следует $R_n < \dfrac{b_1}{1-q}$.

Примеры решения задач

В этой части статьи разобраны примеры приближенного вычисления тех интегралов, которые часто встречаются в приложениях, например, в теории автоматического регулирования.

Пример 1. Вычислить значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

<u>Решение.</u> Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} .$$

Данное разложение имеет место при всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Проинтегрируем почленно записанный выше ряд:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}.$$

Полученный числовой ряд является знакочередующимся и удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Следовательно, для суммы R_n остатка этого ряда справедлива оценка:

$$|R_n|\le\frac{1}{(2n+3)\cdot(2n+3)!}.$$

Найдем наименьшее значение n, при котором выполняется неравенство:

$$|R_n|<\varepsilon .$$

Вычислим:

$$|R_1|\le\frac{1}{5\cdot 5!}=\frac{1}{600}\approx 0,0017>0,001;$$

$$|R_2|\le\frac{1}{7\cdot 7!}=\frac{1}{35280}\approx 0,000028<0,001.$$

Отсюда находим: $n=2$.

Таким образом,

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx\approx\sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}\approx 0,946.$$

Пример 2. Вычислить значение интеграла

$$\int_0^{1/5}\frac{e^x-1}{x}dx$$

с точностью до $\varepsilon=0,001$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right)=\frac{1}{x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

и почленно проинтегрируем этот ряд

$$\int_0^{1/5}\frac{e^x-1}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\int_0^{1/5}x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^{1/5}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^{n+1}(n+1)\cdot(n+1)!}.$$

В результате получили знакопостоянный числовой ряд. Для оценки суммы R_n остатка этого ряда построим мажорирующую геометрическую прогрессию:

$$R_n=\frac{1}{5^{n+2}(n+2)\cdot(n+2)!}+\frac{1}{5^{n+3}(n+3)\cdot(n+3)!}+\frac{1}{5^{n+4}(n+4)\cdot(n+4)!}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{5^{n+2}(n+2)\cdot(n+2)!}\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{n+2}{n+3}\cdot\frac{1}{n+3}+\frac{1}{5^2}\cdot\frac{n+2}{n+4}\cdot\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{5^{n+2}(n+2)\cdot(n+2)!}\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n+3}+\frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{(n+3)^2}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{5^{n+2}(n+2)\cdot(n+2)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5(n+3)}}=\frac{n+3}{5^{n+1}(5n+14)(n+2)\cdot(n+2)!}$$

Определим наименьшее значение n, при котором выполняется неравенство:

$$R_n<\varepsilon.$$

Согласно полученной оценки для R_n, имеем:

$$R_0<\frac{3}{5\cdot 14\cdot 2\cdot 2!}=\frac{3}{280}\approx 0,0107>0,001;$$

$$R_1<\frac{4}{5^2\cdot 19\cdot 3\cdot 3!}=\frac{4}{8550}\approx 0,00047<0,001.$$

Следовательно, $n=1$.

В результате находим:

$$\int_0^{1/5}\frac{e^x-1}{x}dx\approx\sum_{n=0}^{1}\frac{1}{5^{n+1}(n+1)\cdot(n+1)!}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2\cdot 2\cdot 2!}\approx 0,210.$$

Пример 3. Вычислить значение интеграла

$$\int_0^1\cos x^2dx$$

с точностью до $\varepsilon=0,001$.

<u>Решение.</u> Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена:

$$\cos x^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

Далее почленно проинтегрируем этот степенной ряд:

$$\int_0^1\cos x^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^1x^{4n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\Big|_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)\cdot(2n)!}.$$

Полученный числовой ряд является знакочередующимся и удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Следовательно, для суммы R_n остатка этого ряда справедлива оценка:

$$|R_n|\le\frac{1}{(4n+5)\cdot(2n+2)!}.$$

Найдем наименьшее значение n, при котором выполняется неравенство:

$$|R_n|<\varepsilon.$$

Вычислим:

$$|R_1|\le\frac{1}{9\cdot 4!}=\frac{1}{216}\approx 0,0046>0,001;$$

$$|R_2|\le\frac{1}{13\cdot 6!}=\frac{1}{9360}\approx 0,00011<0,001.$$

Отсюда находим: $n=2$.

Таким образом,

$$\int_0^1\cos x^2dx\approx\sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!}=1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}\approx 0,905.$$

Пример 4. Вычислить значение интеграла

$$\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$$

с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена:

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

Интервалом сходимости данного ряда является $x \in (-1,1)$.

Поскольку область интегрирования принадлежит интервалу сходимости, то записанный выше ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^{1/2} x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2\cdot 2^{2n+1}}.$$

Полученный числовой ряд является знакочередующимся и удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Следовательно, для суммы R_n остатка этого ряда справедлива оценка:

$$|R_n| \le \frac{1}{(2n+3)^2\cdot 2^{2n+3}}.$$

Найдем наименьшее значение n, при котором выполняется неравенство:

$$|R_n| < \varepsilon.$$

Вычислим:

$$|R_1| \le \frac{1}{5^2\cdot 2^5} = \frac{1}{800} \approx 0,0013 > 0,001;$$

$$|R_2| \le \frac{1}{7^2\cdot 2^7} = \frac{1}{6272} \approx 0,00016 < 0,001.$$

Отсюда получаем: $n = 2$.

Таким образом,

$$\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \approx \sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2\cdot 2^{2n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2\cdot 2^3} + \frac{1}{5^2\cdot 2^5} \approx 0,487.$$

Пример 5. Вычислить значение интеграла

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^2}}$$

с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена:

$$(1-x^2)^{-1/5} = 1 + \left(-\frac{1}{5}\right)(-x^2)\frac{1}{1!} + \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)(-x^2)^2\frac{1}{2!} + \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{11}{5}\right)(-x^2)^3\frac{1}{3!} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1!}x^2 + \frac{1\cdot 6}{5^2}\cdot\frac{1}{2!}x^4 + \frac{1\cdot 6\cdot 11}{5^3}\cdot\frac{1}{3!}x^6 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots(5n-4)}{5^n\cdot n!}x^{2n}$$

Интервалом сходимости данного ряда является $x \in (-1,1)$.

Согласно теореме о почленном интегрировании степенного ряда имеем:

$$\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^2}}=\int_0^{1/2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots(5n-4)}{5^n\cdot n!}\right)x^{2n}dx=$$

$$=x\Big|_0^{1/2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots(5n-4)}{5^n\cdot n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots(5n-4)}{5^n\cdot n!}\cdot\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots(5n-4)}{4^n\cdot(2n+1)\cdot 5^n\cdot n!}\right)$$

В результате получили знакопостоянный числовой ряд. Для оценки суммы R_n остатка этого ряда построим мажорирующую геометрическую прогрессию:

$$R_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots(5n+1)}{4^{n+1}\cdot(2n+3)\cdot 5^{n+1}\cdot(n+1)!}+\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots(5n+1)\cdot(5n+6)}{4^{n+2}\cdot(2n+5)\cdot 5^{n+2}\cdot(n+2)!}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots(5n+1)\cdot(5n+6)\cdot(5n+11)}{4^{n+3}\cdot(2n+7)\cdot 5^{n+3}\cdot(n+3)!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n+1)}{20^{n+1}(2n+3)\cdot(n+1)!}\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{5n+6}{5n+10}\cdot\frac{2n+3}{2n+5}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{(5n+6)(5n+11)}{(5n+10)(5n+15)}\cdot\frac{2n+3}{2n+7}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots(5n+1)}{20^{n+1}(2n+3)\cdot(n+1)!}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots(5n+1)}{20^{n+1}(2n+3)\cdot(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots(5n+1)}{20^{n+1}(2n+3)\cdot(n+1)!}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots(5n+1)}{30\cdot 20^n(2n+3)\cdot(n+1)!}$$

Определим наименьшее значение n, при котором выполняется неравенство:

$$R_n<\varepsilon.$$

Согласно полученной оценки для R_n, имеем:

$$R_2<\frac{1\cdot 6\cdot 11}{30\cdot 20^2\cdot 7\cdot 3!}\approx 0,00013<0,001.$$

Следовательно, $n=2$.

В результате находим:

$$\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^2}}dx\approx\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3\cdot 20\cdot 1!}+\frac{1\cdot 6}{5\cdot 20^2\cdot 2!}\right)\approx 0,509.$$

Работа основана на личном опыте авторов преподавания данной дисциплины. Предложенная методика изложения материала сочетает краткие теоретические сведения и специально подобранные примеры решения типовых задач домашнего задания, что позволит сформировать у студентов правильное представление о способах решения и приобрести необходимые навыки и компетенции. Статья будет полезна студентам при самостоятельной работе, а также преподавателям при подготовке к практическим занятиям.

Ссылки на источники

1. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория вероятностей. Математическая статистика. – М.: Физматлит, 2005. – 296 с.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004. − 798 с.
3. Власова Е. А. Ряды: учеб. для вузов / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. − 612 с.
4. Там же.
5. Там же.

Elena Popova,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
elmipo@yandex.ru
Olga Chigireva,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
mkfn12@yandex.ru

“Application of power series for the approximate calculation of definite integrals” – topic presentation methodology

Abstract. The article proposes a method of presenting the topic "Application of power series for the approximate calculation of definite integrals". The authors consider a method that makes it possible to calculate the values of definite integrals when the antiderivative integrand is not explicitly expressed in terms of elementary functions. The typical tasks of homework with detailed solutions are given. The article will be useful for students as well as teachers of the relevant courses.

Key words: power series, convergence interval, Abel's theorem, termwise integration of a power series, Maclaurin series.

References

1. Bocharov, P. P. & Pechinkin, A. V. (2005). *Teoriya veroyatnostej. Matematicheskaya statistika*, Fizmatlit, Moscow, 296 p. (in Russian).
2. Tihonov, A. N. & Samarskij, A. A. (2004). *Uravneniya matematicheskoj fiziki*, Nauka, Moscow, 798 p. (in Russian).
3. Vlasova, E. A. (2002). *Ryady: ucheb. dlya vuzov*, Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, Moscow, 612 p. (in Russian).
4. Ibid.
5. Ibid.

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	27.03.19	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	30.04.19
Принята к публикации *Accepted for publication*	30.04.19	Опубликована *Published*	30.06.19

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru